Klausur zum Grundwissen Schadenversicherungsmathematik

Ch. Hipp, M. Morlock, H. Schmidli, K.D. Schmidt

Mai 2015 in Köln

Aufgaben mit Musterlösungen

Aufgabe 1 (Risikomodelle)

Eine Versicherung modelliert die Schadenhöhen aus einem Portfolio mit nur wenigen Daten entweder durch die Exponentialverteilung $\mathrm{Exp}(a)$ mit der Dichte f mit

$$f(x) \;:=\; a\exp(-ax)\,\chi_{(0,\infty)}(x)$$

oder durch die Pareto–Verteilung $\mathrm{Par}(1,b)$ mit der Dichte g mit

$$g(x) \;:=\; b\,x^{-(b+1)}\,\chi_{(1,\infty)}(x)$$

Für 9 bekannte Schäden sind die Statistiken

$$\widehat{\mu} \;=\; \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{9} X_k = 3.4760$$

und

$$\widehat{\mu}_{\ln} \;=\; \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{9} \ln(X_k) = 0.7332$$

bekannt.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $\ln(X)$ für den Fall, dass X die Pareto–Verteilung $\mathrm{Par}(1,b)$ besitzt.

(b) Schätzen Sie für beide Verteilungen die Parameter aus den Daten. Verwenden Sie für die Schätzung des Parameters b das Resultat aus (a).
Hinweis:
Für den Maximum–Likelihood Schätzer $\widehat{a}$ des Parameters a gilt $\widehat{a} = 1/\widehat{\mu}$.

(c) Schätzen Sie, gestützt auf die Schätzer der Parameter, unter beiden Verteilungsannahmen die Nettoprämie. Nehmen Sie dabei an, dass im Schnitt ein Schaden in zwei Jahren auftritt und dass die Schadenanzahl unabhängig von der Schadenhöhe ist.

(d) Welche Nettoprämie ist vertrauenswürdiger? Begründen Sie Ihre Meinung.

Lösung:

(a) Die Verteilungsfunktion ist $G(x) = 1 - x^{-b}$ für $x \geq 1$. Somit gilt

$$\mathbb{P}[\ln X > x] = \mathbb{P}[X > \mathrm{e}^x] = (\mathrm{e}^x)^{-b} = \mathrm{e}^{-bx} \; .$$

Somit ist $\ln X$ $\text{Exp}(b)$ verteilt.

(b) Aus dem Hinweis sind die Schätzer $\hat{a} = 1/\hat{\mu} = 0.2877$ und $\hat{b} = 1/\hat{\mu}_{\ln} = 1.3639$.

(c) Für die Exponentialverteilung erhalten wir den geschätzten Erwartungswert $1/\hat{a} = \hat{\mu} = 3.4760$ (Maximum-Likelihood- und Momenten-Schätzer sind identisch). Für die Paretoverteilung $\hat{b}/(\hat{b} - 1) = 1/(1 - \mu_{\ln}) = 3.7481$. Die erwartete Schadensanzahl wird mit 0.5 geschätzt. Somit erhalten wir mit der Waldschen Formel die geschätzte Nettoprämie 1.7380, bzw. 1.87405.

(d) Die Frage ist ohne die genauen Daten schwierig zu beantworten. Grundsätzlich ist die Paretoverteilung die gefährlichere Verteilung, und liefert auch die höhere Prämie. Um auf der sicheren Seite zu stehen, ist es sinnvoller die höhere Prämie zu wählen. Hätte man mehr Daten, könnte man mit einem Anpassungstest überprüfen, welche Verteilung eher zu den Daten passt.
Die Daten wurden mit einer Exp(1/3) Verteilung simuliert.

Aufgabe 2 (Risikomodelle)

Ein kollektiver Versicherungsvertrag erzeugt pro Jahr N Schäden mit Schadenhöhen $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, wobei alle Zufallsvariablen stochastisch unabhängig sind. Die Verteilung von N ist gegeben durch

n	0	1	2	3	5
$P[N=n]$	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1

und die Schadenhöhen haben die Verteilung

x	10	20	50	100
$P[X=x]$	0.1	0.2	0.3	0.4

Berechnen Sie das Solvenzkapital, das heißt, das kleinste Kapital x mit

$$P\left[\sum_{k=1}^{N} X_k \leq x\right] \;\geq\; 0.995$$

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit für 5 Schäden der Höhe 100 ist $0.1 \cdot 0.4^5 = 0.001024 < 0.005$. Die Wahrscheinlichkeit für 4 Schäden der Höhe 100 und einen kleineren Schaden ist $0.1 \cdot 5 \cdot 0.4^4 \cdot (1 - 0.4) = 0.00768 > 0.005$. Somit muss das Solvenzkapital mindestens 410 sein. Dieser Wert kann nicht mit nur 4 Schäden ereicht werden. Wir haben dann

5. Schaden	W'keit	Summe
100	0.001024	0.001024
50	0.00384	0.004864
20	0.00256	0.007424

Somit ist das gesuchte Kapital 420. Dieses Kapital reicht mit Wahrscheinlichkeit $1 - 0.004864 = 0.995136$ aus.

Aufgabe 3 (Tarifierung)

Bei einem Risiko tritt ein Schaden mit der Wahrscheinlichkeit 0.8 ein. Für die von der Anzahl der Schäden unabhängigen Schadenhöhen X_k gilt:

x	10	100	200
$P[X_k = x]$	0.2	0.4	0.4

Das Versicherungsunternehmen berechnet die Bruttorisikoprämie nach dem Erwartungswertprinzip mit dem Parameter $\beta = 0.1$ und die Bruttoprämie als das 1.5–fache der Bruttorisikoprämie.

(a) Berechnen Sie die Bruttoprämie.

(b) Berechnen Sie die Bruttoprämie, wenn das Versicherungsunternehmen eine Beitragsrückerstattung in Höhe von 7% der Bruttoprämie gewährt, falls kein Schaden gemeldet wird und die Versicherungsnehmer sich rational verhalten.

(c) Berechnen Sie die Bruttoprämie bei einer Selbstbeteiligung in Höhe von 10.

(d) Analysieren Sie die Unterschiede der Bruttoprämien bei (b) und (c).

Hinweis: Berücksichtigen Sie im Hinblick auf die Berechnung des Sicherheitszuschlags die unterschiedliche Risikosituation in den drei Fällen.

Lösung:

(a) Nettorisikoprämie NRP für den Schaden S

$NRP = E[S] = 0.8 \cdot (10 \cdot 0{,}2 + 100 \cdot 0.4 + 200 \cdot 0.4) = 97.6$

Bruttorisikoprämie BRP und Bruttoprämie BP

$BRP = 1.1 \cdot 97.6 = 107.36$

$BP = 1.5 \cdot 107.36 = 161.04$

(b) Annahme: Ein Schaden der Höhe 10 EURO wird selbst reguliert. Bereits ohne Beitragsrückerstattung und dem damit geringeren Beitrag als im Fall einer Beitragsrückerstattung wäre die Beitragsrückerstattung größer als 10 EURO. Die Beitragsrückerstattung (7% der Bruttoprämie) ist ferner immer kleiner als 100, da die Bruttoprämie kleiner als 200 sein muss.

Die NRP ist damit der Erwartungswert der Schadenzahlungen zuzüglich der Beitragsrückerstattungen des Versicherungsunternehmens:

$NRP = 0.36 \cdot 0.07 \cdot BP + 100 \cdot 0.32 + 200 \cdot 0.32 = 0.0252 \cdot BP + 96$

$BRP = 1.1 \cdot (0.0252 \cdot BP + 96) = 0.02772 \cdot BP + 105.6$

$BP = 1.5 \cdot (0.02772 \cdot BP + 105.6) = 0.04158 \cdot BP + 158.4$

und damit

$BP = 158.4 / (1 - 0.04158) = 165.27$

$BRE = 165.27 \cdot 0.07 = 11.57$

(c) $NRP = 0.8 \cdot (90 \cdot 0.4 + 190 \cdot 0.4) = 89.6$

$BRP = 1.1 \cdot 89.6 = 98.56$

$BP = 1.5 \cdot 98.56 = 147.84$

(d) Die Einbeziehung der BRE in die Prämienberechnung und die dadurch verursachte Vergrößerung der Auszahlung (Die Zahlung einer BRE wird genauso behandelt wie eine Schadenzahlung.) vergrößert die NRP. Auf die NRP werden prozentuale Zuschläge von 10% sowie ferner 50% erhoben. Dies führt zu einer Erhöhung der Bruttoprämie. Diese Erhöhung wird aber nur zu einem kleineren Teil (mit 7%) an den Versicherungsnehmer im Zuge der BRE zurückgegeben.

Aufgabe 4 (Tarifierung)

Das Kollektiv eines Tarifs setzt sich zu 60% aus Risiken des Typs A und zu 40% aus Risiken des Typs B zusammen. Die Risikotypen A bzw. B besitzen Poisson–verteilte Schadenzahlen N_A bzw. N_B mit $N_A \sim \text{Poi}(0.1)$ bzw. $N_B \sim \text{Poi}(0.3)$ (pro Versicherungsperiode). Ob ein Versicherungsnehmer zum Typ A oder B gehört, kann nur anhand der Schadenhistorie geschätzt werden. Die Schadenereignisse sind (bedingt auf den Risikotyp) stochastisch unabhängig. Der Erwartungswert der Schadenhöhe beträgt bei beiden Risikotypen jeweils 5000.

(a) Berechnen Sie nach Bayes die bedingten Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein beliebig herausgegriffener Versicherungsnehmer zum Risikotyp A bzw. B gehört, falls er in der ersten Versicherungsperiode schadenfrei war.

(b) Lösen Sie (a) für einen Versicherungsnehmer, bei dem in der ersten Versicherungsperiode genau ein Schaden aufgetreten ist.

(c) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie nach Bayes für einen Versicherungsnehmer, bei dem in der ersten Versicherungsperiode kein bzw. genau ein Schaden aufgetreten ist.

(d) Das Versicherungsunternehmen plant ein Bonus–Malus–System mit den Klassen 1 und 2. Ein Versicherungsnehmer ist in der Klasse 2, wenn er in der vorherigen Versicherungsperiode keinen Schaden hatte, andernfalls in der Klasse 1. Berechnen Sie die risikogerechten Prämien für die Klassen 1 und 2 ab der zweiten Versicherungsperiode. Vergleichen Sie die Nettorisikoprämien gemäß (c) und (d) und geben Sie Gründe für die Unterschiede an.

Lösung:

(a) Bezeichne N die Zahl der in der vorangehenden Versicherungsperiode beobachteten Schäden und $P[N = k \mid A] = P[N_A = k]$ bzw. $P[N = k \mid B] = P[N_B = k]$; ($k \in \mathbb{N}_0$). Ein beliebig herausgegriffener Versicherungsnehmer gehört nach Bayes dann mit der folgenden Wahrscheinlichkeit zum Risikotyp A bzw. B:

$$
\begin{aligned}
P[A \mid N = 0] &= P[N = 0 \mid A] \cdot P[A] \,/\, P[N = 0] \\
&= P[N = 0 \mid A] \cdot P[A] \,/\, \{P[N = 0 \mid A] \cdot P[A] + P[N = 0 \mid B] \cdot P[B]\} \\
&= e^{-0.1} \cdot 0.6 \,/\, \{ e^{-0.1} \cdot 0.6 + e^{-0.3} \cdot 0.4\} = e^{-0.1} \cdot 0.6/0.84 \\
&= 0.65
\end{aligned}
$$

$P[B \mid N = 0] = 1- 0.65 = 0.35$

(b)
$$
\begin{aligned}
P[A \mid N = 1] &= P[N = 1 \mid A] \cdot P[A] \,/\, P[N = 1] \\
&= P[N = 1 \mid A] \cdot P[A] \,/\, \{P[N = 1 \mid A] \cdot P[A] + P[N = 1 \mid B] \cdot P[B]\} \\
&= 0.1 \cdot e^{-0.1} \cdot 0.6 \,/\, \{0.1 \cdot e^{-0.1} \cdot 0.6 + 0.3 \cdot e^{-0.3} \cdot 0.4\} \\
&= 0.38
\end{aligned}
$$

$P[B \mid N = 1] = 1- 0.38 = 0.62$

(c) Prämie für die zweite Versicherungsperiode, falls in der ersten kein Schaden aufgetreten ist:

$E[S \mid N = 0] = 5\,000 \cdot \{0.1 \cdot 0.65+0.3 \cdot 0.35\} = 850$

Prämie für die zweite Versicherungsperiode, falls in der ersten genau ein Schaden aufgetreten ist:

$E[S \mid N = 1] = 5\,000 \cdot \{0.1 \cdot 0.38+0.3 \cdot 0.62\} = 1\,120$

(d) Aus (c) mit
$E[S \mid N = 0] = 5\,000 \cdot \{0.1 \cdot 65+0.3 \cdot 0.35\} = 850$
sowie (a) mit
$P[N > 0] = 1- P[N = 0] = 0.16$
und dem Satz von den Iterierten Erwartungswerten

$$
\begin{aligned}
5\,000 \cdot \{0.1 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4\} = E[S] &= E[E[S \mid N]] \\
&= E[S \mid N = 0] \cdot P[N = 0] + E[S \mid N > 0] \cdot P[N > 0]
\end{aligned}
$$

folgt
$E[S \mid N > 0] = [900 - 850 \cdot 0.84] / 0.16 = 1\,162.50$

Alternativ (ohne Rundungsfehler)

$$
\begin{aligned}
E[S \mid N > 0] &= 5\,000 \cdot \{0.1 \cdot P[A \mid N > 0] + 0.3 \cdot P[B \mid N > 0]\} \\
&= 5\,000 \cdot \{0.1 \cdot (1-e^{-0.1}) \cdot 0.6 \,/\, P[N > 0] + 0.3 \cdot (1-e^{-0.3}) \cdot 0.4 \,/\, P[N > 0]\} \\
&= 1\,144.85
\end{aligned}
$$

Für Versicherungsnehmer, die im ersten Jahr schadenfrei waren, stimmen die Netto-risikoprämie nach Bayes und die Prämie gemäß der Tarifierung mit Bonuszahlungen bei

einem schadenfreien Verlauf überein. In Klasse 2 ist die Nettorisikoprämie höher als Prämie nach Bayes für den Fall, dass genau ein Schaden aufgetreten ist, da in der Klasse 2 auch Fälle mit mehr als einem Schaden erfasst werden.
Insgesamt stimmen bei diesem einfachen Bonussystem die Nettorisikoprämien nach Bayes und in der Klasse 2 bei schadenfreiem Verlauf in der zweiten Periode überein. Allerdings differenziert die Berechnung der Nettoriskoprämien nach Bayes in Abhängigkeit von der Zahl der beobachteten Schäden und im Zeitverlauf, während die Prämien in den Klassen 1 und 2 des Bonus-Malus-Systems ein stationäres Verhalten aufweisen. (Die „Klassenzusammensetzung“ ist stationär.)

Aufgabe 5 (Reservierung)

Das folgende Abwicklungsdreieck enthält die kumulierten Schadenzahlungen $S_{i,k}$ für die Anfalljahre 2012 bis 2014 sowie a–priori Schätzer γ^{extern} des Abwicklungsmusters für Quoten und a–priori Schätzer α^{extern} der erwarteten Endschadenstände.

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	**a–priori Endschadenstand** α_i^{extern}
2012	656	800	840	900
2013	720	920		1000
2014	800			1100
γ_k^{extern}	0.80	0.92	1	

(a) Schätzen Sie die Gesamtreserve mit dem Bornhuetter–Ferguson Verfahren unter Verwendung der a–priori Schätzer für das Abwicklungsmuster für Quoten.

(b) Schätzen Sie die Gesamtreserve mit dem Loss–Development Verfahren unter Verwendung der a–priori Schätzer für das Abwicklungsmuster für Quoten.

(c) Schätzen Sie die Gesamtreserve mit dem Chain–Ladder Verfahren.

(d) Berechnen Sie die Chain–Ladder Quoten.

(e) Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Lösung:

(a) Mit dem Bornhuetter–Ferguson Verfahren erhält man die Endschadenstände

$$\begin{aligned} S^{\mathrm{BF}}_{2013,2} &= 920 + 0.08 \times 1000 &= 1000 \\ S^{\mathrm{BF}}_{2014,2} &= 800 + 0.20 \times 1100 &= 1020 \end{aligned}$$

und damit die Anfalljahrreserven

$$\begin{aligned} R^{\mathrm{BF}}_{2013} &= 1000 - 920 &= 80 \\ R^{\mathrm{BF}}_{2014} &= 1020 - 800 &= 220 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Gesamtreserve

$$R^{\mathrm{BF}} = 80 + 220 = 300$$

(b) Mit dem Loss–Development Verfahren erhält man die Endschadenstände

$$\begin{aligned} S^{\mathrm{LD}}_{2013,2} &= \frac{920}{0.92} &= 1000 \\ S^{\mathrm{LD}}_{2014,2} &= \frac{800}{0.80} &= 1000 \end{aligned}$$

und damit die Anfalljahrreserven

$$\begin{aligned} R^{\mathrm{LD}}_{2013} &= 1000 - 920 &= 80 \\ R^{\mathrm{LD}}_{2014} &= 1000 - 800 &= 200 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Gesamtreserve

$$R^{\mathrm{LD}} = 80 + 200 = 280$$

(c) Für die Chain–Ladder Faktoren gilt

$$\begin{aligned} \varphi^{\mathrm{CL}}_{2} &= \frac{840}{800} &= 1.05 \\ \varphi^{\mathrm{CL}}_{1} &= \frac{800 + 920}{656 + 720} &= 1.25 \end{aligned}$$

Mit dem Chain–Ladder Verfahren erhält man daher die Endschadenstände

$$\begin{aligned} S^{\mathrm{CL}}_{2013,2} &= 920 \times 1.05 &= 966 \\ S^{\mathrm{CL}}_{2014,2} &= 800 \times 1.25 \times 1.05 &= 1050 \end{aligned}$$

und damit die Anfalljahrreserven

$$\begin{aligned} R^{\mathrm{CL}}_{2013} &= 966 - 920 &= 46 \\ R^{\mathrm{CL}}_{2014} &= 1050 - 800 &= 250 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Gesamtreserve

$$R^{\mathrm{CL}} = 46 + 250 = 296$$

(d) Für die Chain–Ladder Quoten gilt

$$\begin{aligned}
\gamma_2^{\text{CL}} &= 1 \\
\gamma_1^{\text{CL}} &= \frac{1}{1.05} = 0.9524 \\
\gamma_0^{\text{CL}} &= \frac{0.9524}{1.25} = 0.7619
\end{aligned}$$

(e) Die Bornhuetter–Ferguson Gesamtreserve ist höher als die Loss–Development Gesamtreserve; dies ist auf die relativ hohen a–priori Schätzer der erwarteten Endschadenstände zurückzuführen, die sich vor allem in Anfalljahr 2014 auswirken.
Die Chain–Ladder Gesamtreserve ist ebenfalls höher als die Loss–Development Gesamtreserve; dies ist darauf zurückzuführen, dass die Chain–Ladder Quote für Abwicklungsjahr 0 kleiner ist als der a–priori Schätzer.

Aufgabe 6 (Reservierung)

Das folgende Abwicklungsdreieck enthält die Prämien π_i für die Anfalljahre 2012 bis 2014 und die in den Abwicklungsjahren 0 bis 2 geleisteten Zahlungen $Z_{i,k}$ sowie a–priori Schätzer für das Abwicklungsmuster für Anteile:

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	**Prämie** π_i
2012	724	210	54	1200
2013	818	222		1200
2014	888			1200
$\vartheta_k^{\text{extern}}$	0.80	0.16	0.04	

Es wird angenommen, dass die erwarteten Endschadenquoten für alle Anfalljahre identisch sind.

(a) Schätzen Sie die erwartete Endschadenquote mit dem Cape–Cod Verfahren unter Verwendung der a–priori Schätzer für das Abwicklungsmuster für Anteile.

(b) Schätzen Sie die Reserve für 2015 mit dem Cape–Cod Verfahren unter Verwendung der a–priori Schätzer für das Abwicklungsmuster für Anteile.

(c) Schätzen Sie die erwartete Endschadenquote mit dem additiven Verfahren.

(d) Schätzen Sie die Reserve für 2015 mit dem additiven Verfahren.

(e) Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Lösung:

(a) Beim Cape–Cod Verfahren wird die erwartete Endschadenquote durch die Cape–Cod Endschadenquote κ^{CC} geschätzt. Für die Berechnung von κ^{CC} benötigt man die Summe der aktuellen Schadenstände und die Summe der verbrauchten Prämien. Aus dem Abwicklungsdreieck für Zuwächse erhält man mit

Anfall– jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2
2012	724	934	988
2013	818	1040	
2014	888		

das Abwicklungsdreieck für Schadenstände und für die verbrauchten Prämien erhält man mit den a–priori Schätzern γ^{extern} für das Abwicklungsmuster für Quoten mit

Anfall– jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	**Prämie** π_i
2012			1200	1200
2013		1152		1200
2014	960			1200
$\vartheta_k^{\text{extern}}$	0.80	0.16	0.04	
γ_k^{extern}	0.80	0.96	1	

die verbrauchten Prämien. Daher gilt

$$\kappa^{\text{CC}} = \frac{888 + 1040 + 988}{960 + 1152 + 1200} = 0.88$$

(b) Für die Reserve für 2015 gilt

$$R_{2015}^{\text{CC}} = Z_{2014,1}^{\text{CC}} + Z_{2013,2}^{\text{CC}}$$

und wegen

$$\begin{aligned} Z_{2014,1}^{\text{CC}} &= \vartheta_1^{\text{extern}} \, \pi_{2014} \, \kappa^{\text{CC}} = 0.16 \times 1200 \times 0.88 = 168.96 \\ Z_{2013,2}^{\text{CC}} &= \vartheta_2^{\text{extern}} \, \pi_{2013} \, \kappa^{\text{CC}} = 0.04 \times 1200 \times 0.88 = 42.24 \end{aligned}$$

erhält man

$$R_{2015}^{\text{CC}} = 168.96 + 42.24 = 211.20$$

(c) Für die additiven Schadenquotenzuwächse gilt

$$\begin{aligned} \zeta_2^{\text{AD}} &= \frac{54}{1200} = 0.045 \\ \zeta_1^{\text{AD}} &= \frac{210 + 222}{1200 + 1200} = 0.180 \\ \zeta_0^{\text{AD}} &= \frac{724 + 818 + 888}{1200 + 1200 + 1200} = 0.675 \end{aligned}$$

Für die additive Endschadenquote erhält man daher

$$\kappa^{\mathrm{AD}} \quad = \quad 0.045 + 0.180 + 0.675 \quad = \quad 0.9$$

(d) Für die Reserve für 2015 erhält man

$$R_{2015}^{\mathrm{AD}} \quad = \quad Z_{2014,1}^{\mathrm{AD}} + Z_{2013,2}^{\mathrm{AD}} \quad = \quad 0.180 \times 1200 + 0.045 \times 1200 \quad = \quad 270$$

(e) Die additive Reserve ist deutlich höher als die Cape–Cod Reserve. Der Grund liegt darin, dass das additive Verfahren gerade das Cape–Cod Verfahren mit additiven Quoten ist und dass beim Cape–Cod Verfahren im vorliegenden Fall die Abwicklungsgeschwindigkeit höher ist als beim additiven Verfahren:

	Abwicklungsjahr k			
	0	1	2	$\sum$
ζ_k^{AD}	0.675	0.180	0.045	0.900
$\vartheta_k^{\mathrm{AD}}$	0.750	0.200	0.050	1
γ_k^{AD}	0.750	0.950	1	
$\gamma_k^{\mathrm{extern}}$	0.800	0.960	1	

Wegen der höheren Abwicklungsgeschwindigkeit ist die Cape–Cod Endschadenquote kleiner als die additive Endschadenquote, und daher ist auch die Cape–Cod Reserve kleiner als die additive Reserve.

Aufgabe 7 (Risikoteilung und Rückversicherung)

Ein Erstversicherer will seinen Bestand rückversichern, den er im kollektiven Modell mit der Schadenzahl N und den Schadenhöhen $X_1, X_2, \ldots$ darstellt. Seine Annahmen sind, dass $E[N] = \mathrm{Var}[N] = 10$ sowie

$$P[X_i = 500] = 0.8, \quad P[X_i = 2000] = 0.1, \quad P[X_i = 6000] = 0.1$$

gilt und dass seine Prämieneinnahmen 15000 betragen werden.
Rückversicherer A bietet an, für eine Rückversicherungsprämie von 5000 bei jedem Schaden größer als 500 die Hälfte des Schadens zu erstatten.
Rückversicherer B will für eine Rückversicherungsprämie von 5000 bei jedem Schaden der Höhe 6000 den Betrag von 4000 bezahlen.

(a) Welches Angebot, A oder B, ist für den Erstversicherer vorteilhafter, gemessen am Erwartungswert und an der Varianz seines Gewinnes? Hierbei bleiben Zuschläge für Sicherheit und Kosten unberücksichtigt.

(b) Wie kann man die Leistung des Rückversicherers B als Schadenexzedenten–Rückversicherung darstellen?

(c) Für eine Rückversicherungsprämie von 10000 kann der Erstversicherer zwei solche Rückversicherungsverträge bei A oder bei B oder je einen bei beiden Rückversicherern abschließen. Welche der drei Möglichkeiten ist die günstigste für den Erstversicherer?

Der Erwartungswert des Gewinnes G ohne Rückversicherung (und ohne Zuschläge) ist

$$E[G] = 15.000 - 10 \times (0,8 \times 500 + 0,1 \times 8.000) = 15.000 - 12.000 = 3.000.$$

Weil $E[N] = Var(N)$ gilt, berechnet sich die Varianz des Gewinnes mit der Formel

$$Var(G) = E[N] \times E[X_i^2],$$

also

$$\begin{aligned} Var(G) &= 10 \times (0,8 \times 500^2 + 0,1 \times 2.000^2 + 0,1 \times 6.000^2) \\ &= 10 \times (400 \times 500 + 200 \times 2.000 + 600 \times 6.000) = 42.000.000. \end{aligned}$$

(a) Mit Rückversicherung A ergibt sich

$$E[G_A] = 10.000 - 10 \times (0,8 \times 500 + 0,1 \times 1.000 + 0,1 \times 3.000) = 2.000,$$

die Varianz ist

$$Var(G_A) = 10 \times (0,8 \times 500^2 + 0,2 \times 1.000^2 + 0,1 \times 3.000^2) = 12.000.000.$$

Mit Rückversicherung B erhält man

$$E[G_B] = 10.000 - 10 \times (0,8 \times 500 + 0,2 \times 2.000 + 0,1 \times 2.000) = 2.000,$$

und die Varianz ist

$$Var(G_B) = 10 \times (0,8 \times 500^2 + 0,2 \times 2.000^2 + 0,1 \times 2.000^2) = 10.000.000.$$

Wegen der kleineren Varianz – bei gleichem Erwartungswert – ist Rückversicherung B vorteilhafter.

(b) Mit Priorität 2.000 (und Limit 4000 oder ohne Limit).

(c) Die drei möglichen Kombinationen werden mit AA, AB und BB bezeichnet. Bei der Kombination AA beispielsweise zahlt der Rückversicherer jeden Schaden der Höhe 2.000 oder 6.000. Bei BB wird bei einem Schaden der Höhe 6.000 die Summe 8.000 bezahlt. Damit ist, wie oben,

$$E[G_{AA}] = E[G_{AB}] = E[G_{BB}] = 1.000,$$

und die Varianzen sind

$$Var[G_{AA}] = 2.000.000, Var[G_{AB}] = 4.000.000, Var[G_{BB}] = 10.000.000.$$

Die für den Erstversicherer günstigste Variante besteht darin, beim Rückversicherer A zweimal dieselbe Rückversicherung abzuschlieîen. Dies ist plausibel, weil die Gewinne aus Rückversicherung zwar den erwarteten Ertrag erhöhen, aber auch die Varianz des Gewinns des Erstversicherers vergröîern.

Das Bereicherungsverbot war zwar bis 2007 Bestandteil des Versicherungsvertragsgesetzes, ist aber nicht relevant für die Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 8 (Risikoteilung und Rückversicherung)

Ein Erstversicherer hat ein Risiko X mit einer Selbstbeteiligung der Höhe S übernommen und das Risiko bei einem Rückversicherer mit einer Priorität M und einem Limit L abgesichert. Vom Schaden X zahlt der Erstversicherer also den S überschreitenden Teil, der Rückversicherer bezahlt davon den M überschreitenden Teil, höchstens jedoch L. Die Verteilung von X sei die verschobene Pareto–Verteilung mit der Dichte f mit

$$f(x) \quad := \quad 2(1+x)^{-3}\,\chi_{(0,\infty)}(x)$$

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zahlung $(X-S)^+$ des Erstversicherers ohne Rückversicherung.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zahlung des Rückversicherers.

Verwenden Sie dabei die Darstellung des Erwartungswertes aus der Formelsammlung: Für Zufallsvariable $Y \geq 0$ mit $E[Y] < \infty$ gilt

$$E[Y] \quad = \quad \int_0^\infty (1 - F(y))\,dy$$

wobei F die Verteilungsfunktion von Y ist.

Um die Abhängigkeit der Verteilungsfunktion von der betrachteten Zufallsvariable sichtbar zu machen, benutzen wir für $1 - F(x)$ die Schreibweise $\mathbb{P}\{Y > x\}$. Die erwähnte Darstellung hat dann die Form

$$E[Y] = \int_0^\infty \mathbb{P}\{Y > x\} dx.$$

Für $Y = (X - S)^+$ ist wegen $\mathbb{P}\{Y > x\} = \mathbb{P}\{X > S + x\}$

$$E[Y] = \int_0^\infty \mathbb{P}\{X > S + x\} dx = \int_S^\infty \mathbb{P}\{X > x\} dx.$$

Man erhält dann mit $\mathbb{P}\{X > x\} = (1 + x)^{-2}$

$$E[(X - S)^+] = \int_S^\infty (1 + x)^{-2} dx = (1 + S)^{-1}.$$

Die Zahlung Z des Rückversicherers hat die Form

$$Z = \min\{((X - S)^+ - M)^+, L\},$$

und dies ist dasselbe wie $\min\{(X - S - M)^+, L\}$. Mit der Darstellung

$$\min\{(X - S - M)^+, L\} = (X - S - M)^+ - (X - S - M - L)^+$$

ergibt sich für den Erwartungswert

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_{S+M}^\infty \mathbb{P}\{X > x\} dx - \int_{S+M+L}^\infty \mathbb{P}\{X > x\} dx \\ &= \frac{1}{1 + S + M} - \frac{1}{1 + S + M + L}. \end{aligned}$$

Der erste Teil der Aufgabe wurde von einigen Klausurteilnehmern gelöst mit dem Hinweis, dass durch den Selbstbehalt S eine um $S + 1$ verschobene Paretoverteilung $Par(S{+}1, 2)$ entsteht. Dabei muss man jedoch berücksichtigen, dass dies die *bedingte* Verteilung von Y, gegeben $Y > 0$, ist.