**Aufgabe 1 (Risikomodelle)**

Ein Versicherungsvertrag erzeugt pro Jahr $N$ Schäden mit Schadenhöhen $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, wobei alle Zufallsvariablen stochastisch unabhängig sind. Die Schadenhöhen haben die Verteilung

| $x$ | 50 | 200 | 2000 |
|---|---|---|---|
| $P[X_k = x]$ | 0.70 | 0.29 | 0.01 |

Für die Schadenanzahl ist bekannt, dass $E[N] = 2$ und $\mathrm{Var}[N] = 1$ gilt. Der Versicherer berechnet die Prämien mit einem Varianzprinzip mit dem Parameter $\alpha = 0.001$.

(a) Berechnen Sie die jährliche Prämie des Vertrages.

(b) Um Administrationskosten zu sparen wird ein Selbstbehalt von 100 pro Schaden eingeführt. Berechnen Sie die Prämie für den Vertrag mit Selbstbehalt.

(c) Berechnen Sie die Variationskoeffizienten der beiden Verträge und vergleichen Sie diese mit den Prämien.

**Lösung:**

(a) Die Schadenhöhe hat den Erwartungswert

$$E[X] = 50 \cdot 0.70 + 200 \cdot 0.29 + 2000 \cdot 0.01 = 113$$

und die Varianz

$$\mathrm{Var}[X] = \left(50^2 \cdot 0.70 + 200^2 \cdot 0.29 + 2000^2 \cdot 0.01\right) - 113^2 = 40\,581$$

Nach den Gleichungen von Wald gilt für den Gesamtschaden $S$

$$E[S] = E[N]\,E[X] = 2 \cdot 113 = 226$$

und

$$\mathrm{Var}[S] = E[N]\,\mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[N]\,E[X]^2 = 2 \cdot 40\,581 + 1 \cdot 113^2 = 93\,931$$

Dies ergibt die Prämie

$$\Pi = E[S] + \alpha\,\mathrm{Var}[S] = 226 + 0.001 \cdot 93\,931 = 319.931$$

(b) Für $\tilde{X} := (X - 100)^+$ gilt

$$E[\tilde{X}] = 100 \cdot 0.29 + 1900 \cdot 0.01 = 48$$

und

$$\mathrm{Var}[\tilde{X}] = \left(100^2 \cdot 0.29 + 1900^2 \cdot 0.01\right) - 48^2 = 36\,696$$

Für den Gesamtschaden $\tilde{S}$ erhalten wir

$$E[\tilde{S}] = E[N]\,E[\tilde{X}] = 2 \cdot 48 = 96$$

und

$$\operatorname{Var}[\tilde{S}] = E[N]\operatorname{Var}[\tilde{X}] + \operatorname{Var}[N]\,E[\tilde{X}]^2 = 2 \cdot 36\,696 + 1 \cdot 48^2 = 75\,696$$

Dies ergibt die Prämie

$$\tilde{\Pi} = E[\tilde{S}] + \alpha \operatorname{Var}[\tilde{S}] = 96 + 0.001 \cdot 75\,696 = 171.696$$

(c) Der Variationskoeffizient ohne Selbstbehalt ist

$$\kappa = \frac{\sqrt{\operatorname{Var}[S]}}{E[S]} = \frac{\sqrt{93\,931}}{226} = 1.356113$$

und der Variationskoeffizient mit Selbstbehalt ist

$$\tilde{\kappa} = \frac{\sqrt{\operatorname{Var}[\tilde{S}]}}{E[\tilde{S}]} = \frac{\sqrt{75\,696}}{96} = 2.865928$$

Das Risiko, gemessen am Variationskoeffizienten, hat sich mehr als verdoppelt, die Prämie wird aber um den etwa eineinhalbfachen Selbstbehalt reduziert. Dies liegt daran, dass der Variationskoeffizient, beziehungsweise die Varianz, kein gutes Risikomaß ist und ein wesentlicher Teil der Prämie durch die Varianz bestimmt ist und diese sich aus dem Quadrat der Schadenhöhe berechnet. Des Weiteren wird durch das Teilen durch den viel kleineren Erwartungswert der Variationskoeffizient groß, was nicht wirklich dem Streuungsrisiko entspricht.

**Aufgabe 2 (Risikomodelle)**

Der Gesamtschaden $S$ in einem Kollektiv von Sturmrisiken werde als zusammengesetzt Poisson–verteilt mit Poisson–Parameter $\lambda = 0.3$ und Schadenhöhen $X_k$ mit der Pareto–Verteilung $\mathrm{Par}_0(1,3)$ modelliert. Das heißt, die $X_k$ sind verteilt mit der Dichte $f(x) = 3\,(x+1)^{-4}\,\chi_{(0,\infty)}(x)$ und alle Zufallsvariablen sind unabhängig. Eine Aktuarin soll für das Risikomanagement das 99.5% Quantil schätzen, das heißt, den Wert $x$, für den $P[S > x] = 0.005$ gilt.

(a) Welchen Wert erhält man mit einer Normalapproximation?

(b) Um die Flanke der Verteilung des Gesamtschadens besser zu approximieren verwendet die Aktuarin eine Pareto–Verteilung $\mathrm{Par}_0(a, b)$, die denselben Erwartungswert und dieselbe Varianz wie $S$ hat. Welches Quantil erhält die Aktuarin?

(c) Eine Kollegin schlägt vor, eine Pareto–Verteilung $\mathrm{Par}_0(a, 3)$ zu verwenden, die denselben Erwartungswert wie $S$ hat. Welches Quantil erhält die Kollegin?

(d) Diskutieren Sie die drei Approximationen.

**Lösung:**

(a) Der Erwartungswert und die Varianz der Poisson–Verteilung sind gleich 0.3. Der Erwartungswert der Pareto-Verteilung ist $1/(3-1) = 0.5$ und die Varianz ist $(3 \cdot 1^2)/(2^2 \cdot 1) = 0.75$. Daher ist das zweite Moment gleich $0.75 + 0.5^2 = 1$. Somit folgt aus den Wald'schen Formeln

$$E[S] = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15$$

und

$$\mathrm{Var}[S] = 0.3 \cdot 1 = 0.3$$

Die Normalapproximation ist daher die Approximation durch die Normalverteilung $N(0.15; 0.3)$. Aus der Tabelle der Standardnormalverteilung erhalten wir das Quantil 2.58. Damit gilt $x = 0.15 + 2.58\sqrt{0.3} = 1.5631$.

(b) Wir erhalten die Gleichungen

$$\frac{a}{b-1} = E[S] = 0.15$$

und

$$\frac{b\,a^2}{(b-1)^2\,(b-2)} = \mathrm{Var}[S] = 0.3$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite ergibt

$$0.15^2\,\frac{b}{b-2} = 0.3$$

und damit $b = 2.162162$ und $a = 0.174324$. Um das Quantil $x$ zu berechnen setzen wir

$$0.005 = \left(\frac{0.174324}{x + 0.174324}\right)^{2.162162} = \left(\frac{1}{1 + x/0.174324}\right)^{2.162162}$$

und erhalten $x = 1.8468$.

(c) Mit $b = 3$ erhalten wir $a = 0.3$. Also gilt für das gesuchte Quantil $x$

$$0.005 = \left(\frac{1}{1 + x/0.3}\right)^3$$

und damit $x = 1.4544$.

(d) Der Wert 0.995 liegt ziemlich weit in der Flanke. Da die Flanke der Normalverteilung sehr schnell nach 0 abfällt, ist eine Normalapproximation auf jeden Fall schlecht. Verwenden wir die Pareto–Verteilung, wird der Wert besser ausfallen. Die Flanke der zusammengesetzten Poisson–Verteilung verhält sich asymptotisch gemäß $P[S > x] \sim 0.3\,P[X > x]$, also wie die (subexponentielle) Schadenverteilung. Dies ist, bis auf den Vorfaktor, im wesentlichen die dritte Approximation. Daher könnte man erwarten, dass die dritte Approximation die beste ist, was aber nicht zutrifft. Für die volle Punktzahl wird erwartet, dass erkannt wird, dass eine Approximation mit schwerer Flanke vorzuziehen ist.
Die exakte Berechnung mit der Panjer–Rekursion ergibt $x = 3.0855$. Somit unterschätzen alle Approximationen den wirklichen Wert.

## Aufgabe 3 (Tarifierung)

Der Gesamtschaden $S$ eines Risikos sei durch ein kollektives Modell bestimmt mit der Poisson–verteilten Schadenzahl $N$ mit dem Parameter $\lambda = 0.5$ und exponentialverteilten Schadenhöhen mit dem Erwartungswert 2000. Alle Zufallsvariablen werden als stochastisch unabhängig angenommen.

(a) Berechnen Sie die Bruttorisikoprämie nach dem Standardabweichungsprinzip mit dem Parameter $\beta = 0.1$.

(b) Lösen Sie (a) für den Fall einer Selbstbeteiligung in Höhe von 1000 bei jedem Schaden.

(c) Vergleichen Sie das Verhältnis der Erwartungswerte der Entschädigungen im Fall (a) und (b) mit dem Verhältnis der Bruttorisikoprämien sowie mit dem Verhältnis der Variationskoeffizienten der Entschädigungen. Interpretieren Sie die Unterschiede.

**Lösung:** Die Verteilung der Schadenhöhe $X$ besitzt die Dichtefunktion $f$ mit

$$f(x) := \alpha\, e^{-\alpha x}\, \chi_{(0,\infty)}(x)$$

mit

$$\alpha := 1/2000$$

Daher gilt

$$E[X^2] = \mathrm{Var}[X] + E[X]^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = 2000^2 + 2000^2 = 8\,000\,000$$

(a) Für den Gesamtschaden $S_a$ gilt

$$E[S_a] = E[N]\, E[X] = 0.5 \cdot 2000 = 1000$$

Da $N$ eine Poisson–Verteilung besitzt, gilt außerdem

$$\mathrm{Var}[S_a] = E[N]\, E[X^2] = 0.5 \cdot 8\,000\,000 = 4\,000\,000$$

Insbesondere gilt

$$\sqrt{\mathrm{Var}[S_a]} = 2000$$

Damit erhält man die Bruttorisikoprämie

$$\Pi[S_a] = E[S_a] + \beta \sqrt{\mathrm{Var}[S_a]} = 1000 + 0.1 \cdot 2000 = 1200$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} E[(X-1000)^+] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-1000)^+\, \alpha\, e^{-\alpha x}\, \chi_{(0,\infty)}(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-1000)\, \alpha\, e^{-\alpha x}\, \chi_{(1000,\infty)}(x)\, dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} y\,\alpha\, e^{-\alpha(y+1000)}\, \chi_{(0,\infty)}(y)\, dy \\
&= e^{-1000\,\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} y\,\alpha\, e^{-\alpha y}\, \chi_{(0,\infty)}(y)\, dy \\
&= e^{-1000\,\alpha}\, E[X] \\
&= e^{-0.5} \cdot 2000 \\
&= 1213.06
\end{aligned}
$$

Für den Gesamtschaden $S_b$ gilt daher

$$E[S_b] = E[N]\, E[(X-1000)^+] = 0.5 \cdot 1213.06 = 606.53$$

Analog erhält man

$$
\begin{aligned}
E[((X-1000)^+)^2] &= e^{-1000\,\alpha}\, E[X^2] \\
&= e^{-0.5} \cdot 8\,000\,000 \\
&= 4\,852\,245.28
\end{aligned}
$$

und damit

$$\mathrm{Var}[S_b] = E[N]\, E[((X-1000)^+)^2] = 0.5 \cdot 4\,852\,245.28 = 2\,426\,122.64$$

Insbesondere gilt

$$\sqrt{\mathrm{Var}[S_b]} = 1557.60$$

Damit erhält man die Bruttorisikoprämie

$$\Pi[S_b] = E[S_b] + \beta\,\sqrt{\mathrm{Var}[S_b]} = 606.53 + 0.1 \cdot 1557.60 = 762.29$$

(c) Das Verhältnis der Erwartungswerte der Entschädigungen beträgt

$$\frac{E[S_a]}{E[S_b]} = \frac{1000}{606.53} = 1.65$$

Das Verhältnis der Bruttorisikoprämien beträgt

$$\frac{\Pi[S_a]}{\Pi[S_b]} = \frac{1200}{762.29} = 1.57$$

Das Verhältnis der Variationskoeffizienten der Entschädigungen beträgt

$$\frac{\sqrt{\mathrm{Var}[S_a]}/E[S_a]}{\sqrt{\mathrm{Var}}[S_b]/E[S_b]} = \frac{2000/1000}{1557.60/606.53} = 0.78$$

Der Erwartungswert der Entschädigungen ohne Selbstbeteiligung beträgt das 1.65–fache der Entschädigungen unter Berücksichtigung des Selbstbehalts; daher sinken die Entschädigungen aufgrund des Selbstbehalts im Mittel auf 60.61%. Dagegen sinken die entsprechenden Bruttorisikoprämien nur auf 63.69% des ursprünglichen Werts. Die Erklärung hierfür liefert der Variationskoeffizient als Risikomaß: Das Verhältnis der Variationskoeffizienten von 0.78 besagt, dass das Risiko für das Versicherungsunternehmen wesentlich steigt, wenn eine Selbstbeteiligung vereinbart wird.

## Aufgabe 4 (Tarifierung)

Das Kollektiv eines Tarifs setzt sich zu 70% aus Risiken des Typs $A$ und zu 30% aus Risiken des Typs $B$ zusammen. Ob ein Versicherungsnehmer zum Typ $A$ oder $B$ gehört, kann nur anhand der Schadenhistorie geschätzt werden. Jedes Jahr kann höchstens ein Schaden eintreten. Die beiden Risikotypen unterscheiden sich durch ihre Schadeneintrittswahrscheinlichkeit pro Jahr:

| Risikotyp | $A$ | $B$ |
|---|---|---|
| Schadeneintrittswahrscheinlichkeit | 0.1 | 0.3 |

Die Schadenereignisse sind (bedingt auf den Risikotyp) stochastisch unabhängig. Der Erwartungswert der Schadenhöhe beträgt einheitlich 1000.

(a) Berechnen Sie nach Bayes die bedingten Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein beliebig herausgegriffener Versicherungsnehmer, der in 9 bzw. 7 von 10 Jahren schadenfrei war, zum Risikotyp $A$ bzw. $B$ gehört.

(b) Wie hoch ist die risikogerechte Nettorisikoprämie für einen beliebig herausgegriffenen Versicherungsnehmer, der in 9 bzw. 7 von 10 Jahren schadenfrei war?

(c) Das Versicherungsunternehmen will ein einfaches Bonus–Malus System mit den zwei Klassen $I$ und $II$ einrichten. Im ersten Jahr ist jeder Versicherungsnehmer in der Klasse $I$. In den folgenden Jahren ist ein Versicherungsnehmer in der Klasse $II$, wenn er im vorangegangenen Jahr schadenfrei war, und ansonsten in der Klasse $I$.

 (i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Versicherungsnehmer vom Typ $A$ bzw. $B$, sich im 2. bzw. 3. bzw. 4. Jahr in der Klasse $II$ zu befinden?

 (ii) Bestimmen Sie die Nettorisikoprämien für Versicherungsnehmer, die sich im 2. Jahr in der Klasse $I$ bzw. $II$ befinden.

 (iii) Vergleichen Sie die Ergebnisse von (c)(ii) und (b).

**Lösung:**

(a) Bezeichne $M$ die Anzahl der Schäden in den ersten 10 Jahren. Nach der Formel von Bayes gilt dann

$$\begin{aligned}
P[A|M=1] &= \frac{P[M=1|A]\,P[A]}{P[M=1|A]\,P[A]+P[M=1|B]\,P[B]} \\
&= \frac{\binom{10}{1}\cdot 0.1\cdot 0.9^9\cdot 0.7}{\binom{10}{1}\cdot 0.1\cdot 0.9^9\cdot 0.7+\binom{10}{1}\cdot 0.3\cdot 0.7^9\cdot 0.3} \\
&= \frac{9^9\cdot 7}{9^9\cdot 7+3\cdot 7^9\cdot 3} \\
&= \frac{9^8}{9^8+7^8} \\
&= 0.882
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} P[B|M=1] &= 1 - P[A|M=1] \\ &= 1 - 0.882 \\ &= 0.118 \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned} P[A|M=3] &= \frac{P[M=3|A]\,P[A]}{P[M=3|A]\,P[A] + P[M=3|B]\,P[B]} \\ &= \frac{\binom{10}{3}\cdot 0.1^3 \cdot 0.9^7 \cdot 0.7}{\binom{10}{3}\cdot 0.1^3 \cdot 0.9^7 \cdot 0.7 + \binom{10}{3}\cdot 0.3^3 \cdot 0.7^7 \cdot 0.3} \\ &= \frac{9^7 \cdot 7}{9^7 \cdot 7 + 3^3 \cdot 7^7 \cdot 3} \\ &= \frac{9^5}{9^5 + 7^6} \\ &= 0.334 \end{aligned}$$

und damit

$$P[B|M=3] \;=\; 0.666$$

(b) Bezeichne $N$ die Anzahl der Schäden und $S$ den Gesamtschaden im Jahr 11. Dann gilt

$$S = 1000\,N$$

und aufgrund der bedingten Unabhängigkeit der Schadenzahlen gilt

$$\begin{aligned} &P[N=n|M=m] \\ &= \frac{P[N=n, M=m]}{P[M=m]} \\ &= \frac{P[N=n, M=m|A]\,P[A] + P[N=n, M=m|B]\,P[B]}{P[M=m]} \\ &= \frac{P[N=n|A]\,P[M=m|A]\,P[A] + P[N=n|B]\,P[M=m|B]\,P[B]}{P[M=m]} \\ &= \frac{P[N=n|A]\,P[M=m, A] + P[N=n|B]\,P[M=m, B]}{P[M=m]} \\ &= P[N=n|A]\,P[A|M=m] + P[N=n|B]\,P[B|M=m] \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} E[S|M=1] &= 1000\,E[N|M=1] \\ &= 1000\,P[N=1|M=1] \\ &= 1000\,\Big(P[N=1|A]\,P[A|M=1] + P[N=1|B]\,P[B|M=1]\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1000 \cdot (0,1 \cdot 0.882 + 0.3 \cdot 0.118) \\
&= 123.60
\end{aligned}
$$

und analog

$$
\begin{aligned}
E[S|M=3] &= 1000 \Big( P[N=1|A]\, P[A|M=3] + P[N=1|B]\, P[B|M=3] \Big) \\
&= 1000 \cdot (0,1 \cdot 0.334 + 0.3 \cdot 0.666) \\
&= 233.20
\end{aligned}
$$

(c) (i) Im ersten Versicherungsjahr befindet sich jeder Versicherungsnehmer mit Wahrscheinlichkeit 1 in Klasse $I$. Da ab dem zweiten Versicherungsjahr die Zuordnung eines Versicherungsnehmers zu einer Klasse nur von der Anzahl der Schäden des Vorjahres abhängt, befindet sich in jedem Jahr $n \geq 2$

- ein Versicherungsnehmer vom Typ $A$ mit Wahrscheinlichkeit 0.1 in Klasse $I$ und mit Wahrscheinlichkeit 0.9 in Klasse $II$, und
- ein Versicherungsnehmer vom Typ $B$ mit Wahrscheinlichkeit 0.3 in Klasse $I$ und mit Wahrscheinlichkeit 0.7 in Klasse $II$.

(ii) Bezeichne nun $M$ die Anzahl der Schäden im Jahr 1 und $N$ die Anzahl der Schäden und $S$ den Gesamtschaden im Jahr 2. Dann gilt

$$S = 1000\, N$$

Aus der Formel von Bayes erhält man

$$
\begin{aligned}
P[A|M=0] &= \frac{P[M=0|A]\, P[A]}{P[M=0|A]\, P[A] + P[M=0|B]\, P[B]} \\
&= \frac{0.9 \cdot 0.7}{0.9 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.3} \\
&= 0.75
\end{aligned}
$$

und damit

$$P[B|M=0] \;=\; 0.25$$

sowie

$$
\begin{aligned}
P[A|M=1] &= \frac{P[M=1|A]\, P[A]}{P[M=1|A]\, P[A] + P[M=1|B]\, P[B]} \\
&= \frac{0.1 \cdot 0.7}{0.1 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.3} \\
&= 0.4375
\end{aligned}
$$

und damit

$$P[B|M=1] \;=\; 0.5625$$

Aus der ersten Gleichung unter (b) ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
P[N=1|I] &= P[N=1|M=1] \\
&= P[N=1|A]\,P[A|M=1] + P[N=1|B]\,P[B|M=1] \\
&= 0.1 \cdot 0.4375 + 0.3 \cdot 0.5625 \\
&= 0.2125
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
E[S|I] &= 1000\,P[N=1|M=1] \\
&= 1000 \cdot 0.2125 \\
&= 212.50
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
P[N=1|II] &= P[N=1|M=0] \\
&= P[N=1|A]\,P[A|M=0] + P[N=1|B]\,P[B|M=0] \\
&= 0.1 \cdot 0.75 + 0.3 \cdot 0.25 \\
&= 0.15
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
E[S|II] &= 1000\,P[N=1|M=0] \\
&= 1000 \cdot 0.15 \\
&= 150
\end{aligned}$$

(iii) Die Risiken vom Typ $A$ sind vergleichsweise häufig in Klasse $II$ und die Risiken vom Typ $B$ sind vergleichsweise häufig in Klasse $I$. Allerdings ist die Prämiendifferenzierung nicht so ausgeprägt wie bei einer Tarifierung auf der Basis von Bayes. Letztere berücksichtigt die gesamte Schadenhistorie und hat damit einen weit stärkeren Einfluss als das Bonus-Malus-System, das lediglich das Schadengeschehen des letzten Jahres berücksichtigt.

**Aufgabe 5 (Reservierung)**

Für einen Bestand von Risiken sind für die Anfalljahre 2010 bis 2013 die Prämien $\pi_i$ und die aktuellen Schadenstände bekannt. Des weiteren liegen auf der Grundlage eines Marktportfolios a–priori Schätzer $\widehat{\alpha}_i^{\text{extern}}$ für die erwarteten Endschadenstände und a–priori Schätzer $\widehat{\vartheta}_k^{\text{extern}}$ für das Abwicklungsmuster für Anteile vor.

| **Anfall–jahr** $i$ | **Abwicklungsjahr** $k$ 0 | 1 | 2 | 3 | **Prämie** $\pi_i$ | **a–priori Endschadenstand** $\widehat{\alpha}_i^{\text{extern}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2010 | | | | 1537 | 1500 | 1400 |
| 2011 | | | 1400 | | 1750 | 1600 |
| 2012 | | 1240 | | | 2000 | 1800 |
| 2013 | 860 | | | | 2500 | 2000 |
| $\widehat{\vartheta}_k^{\text{extern}}$ | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | | |

(a) Schätzen Sie den Endschadenstand und die Reserve für das Anfalljahr 2013 mit dem Bornhuetter–Ferguson Verfahren.

(b) Schätzen Sie den Endschadenstand und die Reserve für das Anfalljahr 2013 mit dem Loss–Development Verfahren.

(c) Schätzen Sie den Endschadenstand und die Reserve für das Anfalljahr 2013 mit dem Cape–Cod Verfahren.
*Hinweis*: Es gilt $\widehat{\kappa}^{\text{CC}} = 0.92$.

(d) Vergleichen Sie die Ergebnisse.

(e) Geben Sie an und begründen Sie, welche Schätzwerte für den Endschadenstand und die Reserve sich durch eine Korrektur des aktuellen Schadenstandes des Anfalljahres 2013 verändern würden.

**Lösung:** Die drei Verfahren unterliegen dem Bornhuetter–Ferguson Prinzip. Daher sind die Schätzer des Endschadenstandes und der Reserve des Anfalljahres 2013 durch

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{2013,3} &:= S_{2013,0} + (1-\widehat{\gamma}_0^{\text{extern}})\,\widehat{\alpha}_{2013}\\ \widehat{R}_{2013} &:= (1-\widehat{\gamma}_0^{\text{extern}})\,\widehat{\alpha}_{2013}\end{aligned}$$

gegeben, wobei $\widehat{\alpha}_{2013}$ ein verfahrensspezifischer Schätzer des erwarteten Endschadenstandes des Anfalljahres 2013 ist. Wegen $\widehat{\gamma}_0^{\text{extern}} = \widehat{\vartheta}_0^{\text{extern}} = 0.4$ gilt

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{2013,3} &:= 860 + 0.6\,\widehat{\alpha}_{2013}\\ \widehat{R}_{2013} &:= 0.6\,\widehat{\alpha}_{2013}\end{aligned}$$

(a) Für das Bornhuetter–Ferguson Verfahren gilt

$$\widehat{\alpha}_{2013} := \widehat{\alpha}_{2013}^{\text{extern}} = 2000$$

und damit

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_{2013,3} &= 860 + 0.6 \times 2000 &= 860 + 1200 &= 2060 \\
\widehat{R}_{2013} &= 0.6 \times 2000 &= 1200 &
\end{aligned}$$

(b) Für das Loss–Development Verfahren gilt

$$\widehat{\alpha}_{2013} := \widehat{\alpha}_{2013}^{\mathrm{LD}} = \frac{S_{2013,0}}{\widehat{\gamma}_0^{\mathrm{extern}}} = \frac{860}{0.4} = 2150$$

und damit

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_{2013,3} &= 860 + 0.6 \times 2150 &= 860 + 1290 &= 2150 \\
\widehat{R}_{2013} &= 0.6 \times 2150 &= 1290 &
\end{aligned}$$

(c) Für das Cape–Cod Verfahren gilt

$$\widehat{\alpha}_{2013} := \widehat{\alpha}_{2013}^{\mathrm{CC}} = \pi_{2013}\, \widehat{\kappa}^{\mathrm{CC}} = 2500 \times 0.92 = 2300$$

und damit

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_{2013,3} &= 860 + 0.6 \times 2300 &= 860 + 1380 &= 2240 \\
\widehat{R}_{2013} &= 0.6 \times 2300 &= 1380 &
\end{aligned}$$

(d) Die niedrigsten Schätzwerte ergeben sich für das Bornhuetter–Ferguson Verfahren und die höchsten für das Cape–Cod Verfahren. Diese Unterschiede sind auf die verfahrensspezifischen a–priori Schätzer der erwarteten Endschadenstände zurückzuführen, denn auch hier ergibt sich der niedrigste Schätzwert für das Bornhuetter–Ferguson Verfahren und der höchste für das Cape–Cod Verfahren. Das Bornhuetter–Ferguson Verfahren verwendet den relativ niedrigen a–priori Schätzer des erwarteten Endschadenstandes des Anfalljahres 2013 und das Cape–Cod Verfahren verwendet die relativ hohe Prämie des Anfalljahres 2013; das Loss–Development Verfahren hingegen verwendet weder die Prämie noch den a–priori Schätzer des erwarteten Endschadenstandes.

(e) Bei allen drei Verfahren ist der Schätzwert für den Endschadenstand die Summe aus dem aktuellen Schadenstand und dem Schätzwert für die Reserve; daher bewirkt eine Veränderung des aktuellen Schadenstandes des Anfalljahres 2013 in allen drei Fällen eine Veränderung des Schätzwertes des Endschadenstandes. Beim Bornhuetter–Ferguson Verfahren hat der aktuelle Schadenstand keinen Einfluss auf den a–priori Schätzer des erwarteten Schadenstandes; er hat daher auch keinen Einfluss auf den Schätzer der Reserve. Dagegen geht beim Loss–Development Verfahren und beim Cape–Cod Verfahren der aktuelle Schadenstand in den a–priori Schätzer des erwarteten Schadenstandes und damit auch in den Schätzer der Reserve ein.

**Aufgabe 6 (Reservierung)**

Für einen Bestand von Risiken sind für die Anfalljahre 2010 bis 2013 die Prämien und die folgenden Schadenstände bekannt:

| **Anfall–jahr** $i$ | **Abwicklungsjahr** $k$ 0 | 1 | 2 | 3 | **Prämie** $\pi_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2010 | 390 | 640 | 720 | 900 | 1200 |
| 2011 | 380 | 560 | 780 | | 1300 |
| 2012 | 430 | 720 | | | 1100 |
| 2013 | 384 | | | | 1200 |

Es wird angenommen, dass ein Abwicklungsmuster für Quoten vorliegt.

(a) Schätzen Sie die Cape–Cod Endschadenquote mit Hilfe der Chain–Ladder Quoten.

(b) Schätzen Sie die Cape–Cod Endschadenquote mit Hilfe der additiven Quoten.

(c) Bestimmen Sie die individuelle Endschadenquote des Anfalljahres 2010.

(d) Schätzen Sie die individuellen Endschadenquoten der Anfalljahre 2011 bis 2013 mit Hilfe der Chain–Ladder Quoten.

(e) Dem Cape–Cod Verfahren liegt die Annahme anfalljahrunabhängiger erwarteter Endschadenquoten zugrunde. Beurteilen Sie diese Annahme im Hinblick auf die geschätzten individuellen Endschadenquoten und die Daten des Anfalljahres 2012.

**Lösung:**

(a) Für die Chain–Ladder Faktoren erhält man

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} &= \frac{900}{720} &&= 1.25 \\
\widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}} &= \frac{720+780}{640+560} &&= 1.25 \\
\widehat{\varphi}_1^{\mathrm{CL}} &= \frac{640+560+720}{390+380+430} &&= 1.60
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_3^{\mathrm{CL}} &= &&= &&= 1.00 \\
\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{CL}} &= \widehat{\gamma}_3^{\mathrm{CL}}/\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} &&= 1/1.25 &&= 0.80 \\
\widehat{\gamma}_1^{\mathrm{CL}} &= \widehat{\gamma}_2^{\mathrm{CL}}/\widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}} &&= 0.80/1.25 &&= 0.64 \\
\widehat{\gamma}_0^{\mathrm{CL}} &= \widehat{\gamma}_1^{\mathrm{CL}}/\widehat{\varphi}_1^{\mathrm{CL}} &&= 0.64/1.60 &&= 0.40
\end{aligned}$$

Für die verbrauchten Prämien erhält man daher

| **Anfall–jahr** $i$ | **Abwicklungsjahr** $k$ 0 | 1 | 2 | 3 | **Prämie** $\pi_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2010 | | | | 1200 | 1200 |
| 2011 | | | 1040 | | 1300 |
| 2012 | | 704 | | | 1100 |
| 2013 | 480 | | | | 1200 |
| $\widehat{\gamma}_k^{\text{CL}}$ | 0.40 | 0.64 | 0.80 | 1.00 | |

Daraus ergibt sich die Cape–Cod Endschadenquote

$$\widehat{\kappa}^{\text{CC}} = \frac{384 + 720 + 780 + 900}{480 + 704 + 1040 + 1200} = 0.8131$$

(b) Aus dem Abwicklungsdreieck für Schadenstände ergibt sich das folgende Abwicklungsdreieck für Zuwächse:

| **Anfall–jahr** $i$ | **Abwicklungsjahr** $k$ 0 | 1 | 2 | 3 | **Prämie** $\pi_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2010 | 390 | 250 | 80 | 180 | 1200 |
| 2011 | 380 | 180 | 220 | | 1300 |
| 2012 | 430 | 290 | | | 1100 |
| 2013 | 384 | | | | 1200 |

Für die additiven Schadenquotenzuwächse erhält man daher

$$\begin{aligned}
\widehat{\zeta}_3^{\text{AD}} &= \frac{180}{1200} &&= 0.15 \\
\widehat{\zeta}_2^{\text{AD}} &= \frac{80 + 220}{1200 + 1300} &&= 0.12 \\
\widehat{\zeta}_1^{\text{AD}} &= \frac{250 + 180 + 290}{1200 + 1300 + 1100} &&= 0.20 \\
\widehat{\zeta}_0^{\text{AD}} &= \frac{390 + 380 + 430 + 384}{1200 + 1300 + 1100 + 1200} &&= 0.33
\end{aligned}$$

und daraus ergibt sich die additive Endschadenquote

$$\widehat{\kappa}^{\text{AD}} = \widehat{\zeta}_0^{\text{AD}} + \widehat{\zeta}_1^{\text{AD}} + \widehat{\zeta}_2^{\text{AD}} + \widehat{\zeta}_3^{\text{AD}} = 0.33 + 0.20 + 0.12 + 0.15 = 0.80$$

Bei Verwendung der additiven Quoten gilt $\widehat{\kappa}^{\text{CC}} = \widehat{\kappa}^{\text{AD}}$ und damit

$$\widehat{\kappa}^{\text{CC}} = 0.80$$

Alternativ kann man $\widehat{\vartheta}_k^{\text{AD}} = \widehat{\zeta}_k^{\text{AD}}/\widehat{\kappa}^{\text{AD}}$ und sodann $\widehat{\gamma}_k^{\text{AD}} = \sum_{l=0}^{k} \widehat{\vartheta}_l^{\text{AD}}$ berechnen und erhält dann $\widehat{\kappa}^{\text{CC}}$ wie unter (a).

(c) Die individuelle Endschadenquote des Anfalljahres 2010 ist durch

$$\widehat{\kappa}_{2010}^{\text{ind}} := \frac{S_{2010,3}}{\pi_{2010}} = \frac{900}{1200} = 0.75$$

gegeben.

(d) Die individuellen Endschadenquoten der Anfalljahre 2011 bis 2013 können durch den Anteil des aktuellen Schadenstandes an der verbrauchten Prämie geschätzt werden. Unter Verwendung der Chain–Ladder Quoten erhält man

$$\begin{aligned}
\widehat{\kappa}^{\text{ind}}_{2011} &= \frac{780}{0.80 \times 1300} = 0.75 \\
\widehat{\kappa}^{\text{ind}}_{2012} &= \frac{720}{0.64 \times 1100} = 1.02 \\
\widehat{\kappa}^{\text{ind}}_{2013} &= \frac{384}{0.40 \times 1200} = 0.80
\end{aligned}$$

(e) Der Schätzwert der individuellen Endschadenquote des Anfalljahres 2012 fällt aus dem Rahmen. Daher ist es fraglich, ob die Annahme anfalljahrunabhängiger Endschadenquoten erfüllt ist. Andererseits fallen auch der aktuelle Schadenstand und die Prämie des Anfalljahres 2012 aus dem Rahmen. Hier ist zu klären, ob der aktuelle Schadenstand des Anfalljahres 2012 durch einen außergewöhnlichen Schaden verursacht wurde.

**Aufgabe 7 (Risikoteilung und Rückversicherung)**

Ein Erstversicherer will seinen Bestand rückversichern, den er im kollektiven Modell mit einer Schadenzahl $N$ und Schadenhöhen $X_1, X_2, \ldots$ darstellt. Seine Annahmen sind, dass $N$ eine Poisson–Verteilung mit Erwartungswert 10 hat und dass

$$P[X_k = 500] = 0.8 \qquad \text{und} \qquad P[X_k = 2\,000] = 0.2$$

gilt. Seine Prämieneinnahmen betragen 10 000.
Rückversicherer $A$ bietet an, für eine Rückversicherungsprämie von 5 000 bei jedem Schaden 400 zu erstatten.
Rückversicherer $B$ will für eine Rückversicherungsprämie von 3 000 bei jedem Schaden der Höhe 2 000 die Hälfte des Schadens bezahlen.

(a) Welches Angebot, $A$ oder $B$, ist für den Erstversicherer vorteilhafter, gemessen am Erwartungswert und an der Varianz seines Gewinnes? Betrachten Sie hierbei den Gewinn als Differenz der Prämien und der Zahlungen, ohne Berücksichtigung von Kosten, Steuern und Zinserträgen.

(b) Welche Art der Rückversicherung bietet Rückversicherer $B$ eigentlich an?

**Lösung:**

(a) Der Erwartungswert des Gewinnes $G$ ohne Rückversicherung ist

$$E[G] = 10\,000 - E[N]\,E[X] = 10\,000 - 10 \cdot (500 \cdot 0.8 + 2\,000 \cdot 0.2) = 2\,000$$

Weil $N$ Poisson-verteilt ist, berechnet sich die Varianz des Gewinnes mit der Formel

$$\mathrm{Var}[G] = E[N]\,E[X^2]$$

und man erhält

$$\mathrm{Var}[G] = 10 \cdot (500^2 \cdot 0.8 + 2\,000^2 \cdot 0.2) = 10\,000\,000$$

Für den Gewinn $G_A$ mit Rückversicherung $A$ ergibt sich

$$E[G_A] = 10\,000 - 5\,000 - 10 \cdot (100 \cdot 0.8 + 1\,600 \cdot 0.2) = 1\,000$$

und

$$\mathrm{Var}[G_A] = 10 \cdot (100^2 \cdot 0.8 + 1\,600^2 \cdot 0.2) = 5\,200\,000$$

Für den Gewinn $G_B$ mit Rückversicherung $B$ erhält man

$$E[G_B] = 10\,000 - 3\,000 - 10 \cdot (500 \cdot 0.8 + 1\,000 \cdot 0.2) = 1\,000$$

und

$$\mathrm{Var}[G_B] = 10 \cdot (500^2 \cdot 0.8 + 1\,000^2 \cdot 0.2) = 4\,000\,000$$

Wegen der kleineren Varianz – bei gleichem Erwartungswert – ist die Rückversicherung $B$ vorteilhafter.

(b) Eine Schadenexzedenten–Rückversicherung mit Priorität 1 000.

**Aufgabe 8 (Risikoteilung und Rückversicherung)**

Ein Erstversicherer übernimmt ein Risiko $S = X_1 + ... + X_N$ mit Schadenzahl $N$ und Einzelschäden $X_1, X_2, \ldots,$ bei dem eine Selbstbeteiligung des Versicherungsnehmers von 300 pro Schaden vereinbart ist. Für dieses Risiko kann der Erstversicherer eine Schadenexzedenten–Rückversicherung mit Priorität $M$ abschließen, bei der der Rückversicherer bei einer Schadenzahlung $Y$ des Erstversicherers den $M$ übersteigenden Teil $\max\{Y - M, 0\}$ übernimmt.
Berechnen Sie den erwarteten Gewinn des Erstversicherers mit und ohne Rückversicherung unter folgenden Annahmen: $N$ ist Poisson–verteilt mit Erwartungswert 0.2, für die Einzelschäden gilt

$$P[X_k = 500] = 0.8 \qquad \text{und} \qquad P[X_k = 1\,000] = P[X_k = 5\,000] = 0.1\,,$$

es gilt $M = 1\,000$, die Erstversicherungsprämie ist 200 und die Rückversicherungsprämie beträgt 80.
Betrachten Sie hierbei den Gewinn als Differenz der Prämien und der Zahlungen, ohne Berücksichtigung von Kosten, Steuern und Zinserträgen.

**Lösung:** Für jeden möglichen Wert eines Einzelschadens $X$ bestimmen wir die Höhe der Zahlung $Y$ des Erstversicherers mit Berücksichtigung der Selbstbeteiligung sowie die Höhe der Zahlung $Z$ unter Berücksichtigung der Selbstbeteiligung und der Rückversicherung:

| $X$ | $Y$ | $Z$ |
|---|---|---|
| 500 | 200 | 200 |
| 1000 | 700 | 700 |
| 5000 | 4700 | 1000 |

Der erwartete Gewinn ohne Rückversicherung ist

$$200 - E[N]\,E[Y] = 200 - 0.2 \cdot (200 \cdot 0.8 + 700 \cdot 0.1 + 4700 \cdot 0.1) = 60$$

Der erwartete Gewinn mit Rückversicherung ist

$$200 - 80 - E[N]\,E[Z] = 120 - 0.2 \cdot (200 \cdot 0.8 + 700 \cdot 0.1 + 1000 \cdot 0.1) = 54$$

**Aufgabe 9 (Zusatzaufgabe I)**

Für einen Bestand von Risiken sind die folgenden Schadenstände bekannt:

| **Anfall–jahr** $i$ | **Abwicklungsjahr** $k$ 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 109 | 192 | 250 | 295 |
| 1 | 110 | 208 | 246 | |
| 2 | 111 | 194 | | |
| 3 | 112 | | | |

Es wird angenommen, dass ein Abwicklungsmuster $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ für Faktoren vorliegt und dass es einen Parameter $\psi$ gibt mit

$$\varphi_k \;=\; 1 + \frac{\psi}{k}$$

für $k = 1, 2, 3$.

(a) Bestimmen Sie die Chain–Ladder Faktoren.

(b) Bestimmen Sie nach der Methode der Kleinsten Quadrate einen Schätzwert $\widehat{\psi}$ für den Parameter $\psi$.

(c) Bestimmen Sie die ausgeglichenen Chain–Ladder Faktoren

$$\widehat{\varphi}_k \;:=\; 1 + \frac{\widehat{\psi}}{k}$$

(d) Welcher Effekt ergibt sich für die Schätzwerte der Endschadenstände, wenn man beim Chain–Ladder Verfahren die Chain–Ladder Faktoren durch die ausgeglichenen Chain–Ladder Faktoren ersetzt?

**Lösung:**

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} &= & &= \frac{295}{250} &&= 1.18 \\
\widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}} &= \frac{250+246}{192+208} & &= \frac{496}{400} &&= 1.24 \\
\widehat{\varphi}_1^{\mathrm{CL}} &= \frac{192+208+194}{109+110+111} & &= \frac{594}{330} &&= 1.80
\end{aligned}$$

(b) Der Schätzer für $\psi$ nach der Methode der Kleinsten Quadrate ergibt sich durch Minimierung der Funktion $h$ mit

$$h(\widehat{\psi}) := \sum_{k=1}^{3} \left(1 + \frac{\widehat{\psi}}{k} - \widehat{\varphi}_k^{\mathrm{CL}}\right)^2$$

Es gilt

$$h'(\widehat{\psi}) = \sum_{k=1}^{3} 2\left(1 + \frac{\widehat{\psi}}{k} - \widehat{\varphi}_k^{\mathrm{CL}}\right)\frac{1}{k} = 2\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{k} + \frac{\widehat{\psi}}{k^2} - \frac{\widehat{\varphi}_k^{\mathrm{CL}}}{k}\right)$$

und

$$h''(\widehat{\psi}) = 2\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k^2} > 0$$

Durch Nullsetzen der ersten Ableitung erhält man die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\widehat{\psi}}{k^2} \quad = \quad \sum_{k=1}^{3}\frac{\varphi_k^{\mathrm{CL}} - 1}{k}$$

und damit

$$\widehat{\psi} \quad = \quad \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{\widehat{\varphi}_k^{\mathrm{CL}} - 1}{k}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k^2}} = \frac{\dfrac{0.80}{1} + \dfrac{0.24}{2} + \dfrac{0.18}{3}}{1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9}} = 0.72$$

Wegen $h''(\widehat{\psi}) > 0$ ist $\widehat{\psi} = 0.72$ die (eindeutige) Lösung des Minimierungsproblems.

(c) Für die ausgeglichenen Chain–Ladder Faktoren ergibt sich

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_1 &= 1 + \frac{\widehat{\psi}}{1} = 1.72 \\
\widehat{\varphi}_2 &= 1 + \frac{\widehat{\psi}}{2} = 1.36 \\
\widehat{\varphi}_3 &= 1 + \frac{\widehat{\psi}}{3} = 1.24
\end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$\begin{array}{lcccccl}
\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} & = & 1.18 & < & 1.24 & = & \widehat{\varphi}_3 \\
\widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}}\,\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} & = & 1.24 \times 1.18 & < & 1.36 \times 1.24 & = & \widehat{\varphi}_2\,\widehat{\varphi}_3 \\
\widehat{\varphi}_1^{\mathrm{CL}}\,\widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}}\,\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} & = & 1.80 \times 1.24 \times 1.18 & < & 1.72 \times 1.36 \times 1.24 & = & \widehat{\varphi}_1\,\widehat{\varphi}_2\,\widehat{\varphi}_3
\end{array}$$

Daher ergeben sich bei Verwendung der ausgeglichenen Chain–Ladder Faktoren für alle Anfalljahre höhere Schätzwerte für die Endschadenstände als bei Verwendung der Chain–Ladder Faktoren.

**Aufgabe 10 (Zusatzaufgabe II)**

(a) Eine Zufallsvariable $X$ mit einer Pareto–Verteilung eignet sich als Modell für Großschäden; sie hat für $t > 1$ die Tailwahrscheinlichkeit

$$P[X > t] = t^{-b}$$

mit einem Parameter $b > 0$. Je kleiner $b$ ist, desto gefährlicher wird dieses Risiko. Dies sollte man auch am Variationskoeffizienten $\mathrm{VarK}[X]$ dieses Risikos sehen: Überprüfen Sie, ob $\mathrm{VarK}[X]$ für $b > 2$ fallend in $b$ ist.

(b) Die skalierte Pareto–Verteilung mit den Parametern $a, b > 0$ hat für $t > a$ die Tailwahrscheinlichkeit

$$P[X > t] = a^b\, t^{-b}$$

Wie hängt der Variationskoeffizient dieser Verteilung für $b > 2$ von $a$ ab?

**Lösung:**

(a) Wegen

$$E[X] = \frac{b}{b-1}$$

und

$$E[X^2] = \frac{b}{b-2}$$

gilt

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{b}{(b-1)^2\,(b-2)}$$

(dies ist auch die in der Formelsammlung für $\mathrm{Par}(1, b)$ angegebene Varianz), und damit

$$\mathrm{VarK}[X]^2 = \frac{1}{b\,(b-2)}$$

Dieser Ausdruck ist für $b > 2$ monoton fallend in $b$.

(b) Gar nicht: Ist $X$ Pareto–verteilt mit den Parametern 1 und $b > 0$, dann ist $aX$ skaliert Pareto–verteilt mit den Parametern $a > 0$ und $b > 0$. Der Variationskoeffizient ist skalenunabhängig. Daher gilt für alle $a > 0$

$$\mathrm{VarK}[aX] = \mathrm{VarK}[X]$$

(Das kann man auch direkt mit den in der Formelsammlung angegebenen Größen $E[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$ nachrechnen.)