Klausur zum
Grundwissen Schadenversicherungsmathematik

Ch. Hipp, M. Morlock, H. Schmidli und K.D. Schmidt

Mai 2013 in Köln

Die Klausur besteht aus 8 Aufgaben und zwei Zusatzaufgaben. Eine oder zwei Zusatzaufgaben werden nur gewertet, wenn eine bzw. zwei der anderen Aufgaben nicht bearbeitet oder als nicht bearbeitet gekennzeichnet wurden. Bei jeder Aufgabe sind maximal 15 Punkte zu erreichen. Insgesamt sind damit maximal 120 Punkte möglich. Zum Bestehen der Klausur reichen 48 Punkte.
Zugelassen sind die klassische Formelsammlung, die verteilt wird, sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner. Antworten sind zu begründen. Bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1 (Risikomodelle)

Ein Aktuar modelliert ein Portfolio in der Kraftfahrzeughaftpflichtversicherung als Zusammengesetzte Poisson-Verteilung mit $\lambda = 100$ und $P_X \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 1$ und $\sigma^2 = 3$. Wir erinnern uns, dass $\mathbb{E}[X^n] = \exp\{n\mu + \sigma^2 n^2/2\}$. Um das Risikokapital zu berechnen, benötigt der Aktuar das 99.5% Quantil des Gesamtschadenverteilung P_S des Portfolios. Der Aktuar will das Kapital mit Hilfe einer Approximation abschätzen.

(a) Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und (relative) Schiefe der $\mathrm{ZPV}(\lambda, P_X)$.
Hinweis: Für die weiteren Teilaufgaben: $\mathbb{E}[S] \approx 1\,218$, $\mathrm{Var}[S] \approx 298\,096$, $\gamma[S] \approx 9$.

(b) Approximieren Sie das Quantil mit Hilfe einer Normalapproximation.

(c) Approximieren Sie das Quantil mit Hilfe der Normal-Power-Approximation.

(d) Approximieren Sie das Quantil mit Hilfe einer Lognormalapproximation, das heisst einer Lognormalverteilung, die dieselben ersten zwei Momente wie P_S hat.

(e) Diskutieren Sie die Resultate.

Lösung:

(a) Wir haben $\mathbb{E}[X] = \exp\{5/2\}$, $\mathbb{E}[X^2] = \exp\{8\}$, $\mathbb{E}[X^3] = \exp\{33/2\}$. Aus der Formelsammlung finden wir $\mathbb{E}[S] = 100 \exp\{5/2\}$, $\mathrm{Var}[S] = 100 \exp\{8\}$ und

$$\gamma[S] = \frac{\exp\{33/2\}}{\sqrt{100 \exp\{3 \cdot 8\}}} = \frac{1}{10} \exp\{9/2\} \, .$$

(b) Das 99.5%-Quantil der Standardnormalverteilung ist $2,5758$. Somit ist das gesuchte Kapital

$$K_{\mathrm{N}} = \mu_S + 2,5758\sqrt{\sigma_S^2} = 100 \exp\{5/2\} + 25,758\mathrm{e}^4 \approx 2\,625 \, .$$

(c) Aus der Formelsammlung finden wir die Approximation

$$2,5758 = \frac{10}{\mathrm{e}^{9/2}}\left(\sqrt{\frac{1}{100}\mathrm{e}^9 + 0,6\mathrm{e}^{9/2}\frac{K_{\mathrm{NP}} - 100\mathrm{e}^{5/2}}{10\mathrm{e}^4} + 9} - 3\right) .$$

Dies ergibt das Quantil

$$K_{\mathrm{NP}} = 100\mathrm{e}^{5/2} + \frac{100}{6\sqrt{\mathrm{e}}}\left(\left(3 + 0,25758\mathrm{e}^{9/2}\right)^2 - \frac{\mathrm{e}^9}{100} - 9\right) \approx 7\,240 \, .$$

(d) Wir müssen das Gleichungssystem

$$\exp\{\mu_\mathrm{A} + \tfrac{1}{2}\sigma_\mathrm{A}^2\} = 100\mathrm{e}^{5/2}\ , \qquad \exp\{2\mu_\mathrm{A} + \sigma_\mathrm{A}^2\}\bigl(\exp\{\sigma_\mathrm{A}^2\} - 1\bigr) = 100\mathrm{e}^8$$

lösen. Es folgt

$$\exp\{\sigma_\mathrm{A}^2\} - 1 = \frac{100\mathrm{e}^8}{100^2\mathrm{e}^5} = \frac{\mathrm{e}^3}{100}\ ,$$

Also $\sigma_\mathrm{A}^2 = \ln(1 + 0,01\mathrm{e}^3)$. Der zweite Parameter wird $\mu_\mathrm{A} = \ln(100\mathrm{e}^{5/2}) - \frac{1}{2}\ln(1 + 0,01\mathrm{e}^3)$. Das gesuchte Kapital wird dann

$$K_\mathrm{LN} = \exp\bigl\{\ln(100\mathrm{e}^{5/2}) - \tfrac{1}{2}\ln(1 + 0,01\mathrm{e}^3) + 2,5758\sqrt{\ln(1 + 0,01\mathrm{e}^3)}\bigr\} \approx 3\,346\ .$$

(e) Die Normalapproximation ist symmetrisch und hat keine Schiefe. Da die Verteilung von S ziemlich schief ist, kann nicht erwartet werden, dass die Normalapproximation eine gute Schätzung liefert. Es ist daher nicht erstaunlich, dass die beiden anderen Approximationen höhere Quantile liefern. Die Lognormalapproximation basiert nur auf den ersten beiden Momenten. Daher kann man erwarten, dass das Quantil eher unterschätzt wird. Es erstaunt, dass die Normal-Power-Approximation ein so grosses Quantil liefert. Mittels Panjer-Rekursion findet man das Kapital 3 640.

Aufgabe 2 (Risikomodelle)

Ein kollektiver Versicherungsvertrag erzeugt pro Jahr N Schäden mit Schadenshöhen $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, wobei alle Variablen stochastisch unabhängig sind. Die Verteilung von N ist gegeben durch

n	0	1	2	3
$\mathbb{P}[N=n]$	0,5	0,3	0,15	0,05

Die Schäden haben die Verteilung

x	50	100	200
$\mathbb{P}[X=x]$	0,5	0,4	0,1

Eine Aktuarin soll die jährliche Prämie für die nächsten zwei Jahre festlegen. Sie nimmt an, dass die Schäden in zwei verschiedenen Jahren unabhängig sind. Für den Vertrag steht ein Anfangskapital von 500 zur Verfügung.

(a) Bestimmen Sie die Nettoprämie des Risikos.

(b) Bestimmen Sie die Verteilung der Schadenanzahl für einen Zeitraum von zwei Jahren.

(c) Die jährliche Prämie soll minimal so bestimmt werden, dass das Anfangskapital plus Prämie(n) für das erste Jahr ausreicht, und mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98% auch für das zweite Jahr ausreicht.

Lösung:

(a) Der Erwartungswert von N ist $1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,05 = 0,75$. Der Erwartungswert von X ist $50 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,4 + 200 \cdot 0,1 = 85$. Nach der Waldschen Identität ist die Nettoprämie des Risikos $\mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X] = 0,75 \cdot 85 = 63,75$.

(b) Die Verteilung von X ist die selbe wie für ein Jahr. Für $\tilde{N} = N_1 + N_2$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[\tilde{N} = 0] &= 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 \;, \\
\mathbb{P}[\tilde{N} = 1] &= 0,5 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,5 = 0,30 \;, \\
\mathbb{P}[\tilde{N} = 2] &= 0,5 \cdot 0,15 + 0,3 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,5 = 0,24 \;, \\
\mathbb{P}[\tilde{N} = 3] &= 0,5 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,15 + 0,15 \cdot 0,3 + 0,05 \cdot 0,5 = 0,14 \;, \\
\mathbb{P}[\tilde{N} = 4] &= 0,3 \cdot 0,05 + 0,15 \cdot 0,15 + 0,05 \cdot 0,3 = 0,0525 \;, \\
\mathbb{P}[\tilde{N} = 5] &= 0,15 \cdot 0,05 + 0,05 \cdot 0,15 = 0,015 \;, \\
\mathbb{P}[\tilde{N} = 6] &= 0,05 \cdot 0,05 = 0,0025 \;,
\end{aligned}
$$

(c) Der maximal mögliche Schaden im ersten Jahr beträgt $3 \cdot 200 = 600$. Damit Ruin im ersten Jahr nicht eintreten kann, fehlen zum Anfangskapital noch 100. Die Prämie muss also mindestens 100 sein. Somit steht mindestens ein Kapital von 700 für zwei Jahre zur Verfügung. Drei Schäden sind damit auf jeden Fall durch Anfangskapital und Prämien abgedeckt. Drei oder weniger Schäden passieren mit einer Wahrscheinlichkeit von 93%. Vier Schäden sind abgedeckt, wenn nicht alle 200 betragen. Dies passiert mit Wahrscheinlichkeit $0,0525 \cdot (1 - 0,1^4) \approx 0,0525$. Zusammen sind dies schon über 98%. Also ist die gesuchte Prämie 100.

Aufgabe 3 (Tarifierung)

Ein Versicherungsnehmer hat mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 keinen Schaden und mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 genau einen Schaden. Für die Schadenhöhe gilt:

Schadenhöhe	100	1.000
Eintrittswahrscheinlichkeit	0,6	0,4

a) Berechnen Sie die Bruttorisikoprämie (Schadenerwartungswert plus Sicherheitszuschlag) nach dem Varianzprinzip mit dem Parameter $\beta = 0{,}001$.

b) Berechnen Sie den Beitrag für den Fall, dass der Versicherungsnehmer eine Beitragsrückerstattung in Höhe von 40% erhält, <u>falls kein Schaden auftritt</u> und der Beitrag auf Basis der Bruttorisikoprämie (Schadenerwartungswert plus Sicherheitszuschlag) gemäß a) berechnet wird.

c) Lösen Sie b) für den Fall, dass der Versicherungsnehmer eine Beitragsrückerstattung in Höhe von 40% erhält, <u>falls kein Schaden auftritt *und* ein Schaden der Höhe 100 nicht erstattet wird,</u> Der Beitrag soll wieder auf Basis der Bruttorisikoprämie (Schadenerwartungswert plus Sicherheitszuschlag) gemäß a) berechnet werden.

d) Wie groß ist der Erwartungswert des Saldos der Zahlungen des Versicherungsnehmers (Beitrags- und Schadenzahlung abzüglich Beitragsrückerstattung) im Fall b) bzw. c).

e) Vergleichen Sie die Ergebnisse von a) und d).

f) Diskutieren Sie <u>ohne Rechnung</u> die Frage:
Würden sich bei der Verwendung des Erwartungswertprinzip bei d) prinzipiell andere Ergebnisse für den Erwartungswert des Saldos aus Zahlungen und Beitragsrückerstattung des Versicherungsnehmers ergeben?

Lösung

a) Zusammenfassung von Schadenzahl und Schadenhöhe

Schaden	0	100	1.000
Eintrittswahrscheinlichkeit	0,7	0,18	0,12

S: Schaden
BRP_a: Bruttorisikoprämie
$E(S) \; = 100 \cdot 0{,}18 + 1.000 \cdot 0{,}12 = 138$
$Var(S) = 10.000 \cdot 0{,}18 + 1.000.000 \cdot 0{,}12 - 138^2 = 102.756$
$BRP_a \; = 138 + 0{,}001 \cdot 102.756 \; = 240{,}76$

b) BRP_b: Bruttorisikoprämie (=BRP_a)
B_b: Beitrag
$B_b = 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot B_b + BRP_b = 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot B_b + 240{,}76$
$B_b = 240{,}76 / (1 - 0{,}4 \cdot 0{,}7) = 334{,}39$

c) S: Schaden
BRP_c: Bruttorisikoprämie
B_c: Beitrag
$E(S) = 1.000 \cdot 0{,}12 = 120$
$Var(S) = 1.000.00 \cdot 0{,}12 - 120^2 = 105.600$
$B_c = BRP_c + (0{,}7+0{,}3 \cdot 0{,}6) \cdot 0{,}4 \cdot B_c = [120 + 0{,}001 \cdot 105.600] + 0{,}88 \cdot 0{,}4 \cdot B_c$
$B_c = 225{,}60/(1-0{,}352) = 348{,}15$

d) Z: Saldo aus Zahlungen des Versicherungsnehmers und Beitragsrückerstattung
db) $E(Z) = B_b - 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot B_b = 240{,}76$
dc) $E(Z) = B_c + 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 100 - (0{,}7+0{,}3 \cdot 0{,}6) \cdot 0{,}4 \cdot B_c = 243{,}60$

e) Der Erwartungswert des Saldos für den Versicherungsnehmer (die Nettozahlungen des Versicherungsnehmers) sind im Fall a) und b) identisch, da der von Versicherungsunternehmen erhobene Sicherheitszuschlag in beiden Fällen gleich groß ist und eine Beitragsrückerstattung in die Prämie eingepreist ist. D.h., die Beitragsrückerstattung erfolgt für das Versicherungsunternehmen aufwandsneutral.

Im Fall d) ist die Varianz des vom Versicherungsunternehmen übernommenen Risikos größer als bei a) und damit auch der vom Versicherungsnehmer zu tragende Sicherheitszuschlag.

f) Es würden sich bei der Zugrundelegung des Erwartungswertprinzips bei der Beitragsberechnung ebenfalls unterschiedliche Ergebnisse ergeben, aber im Unterschied zu dem obigen Ergebnis wäre auf Grund der Proportionalität des Sicherheitszuschlags zum Erwartungswert bei einer Selbstbeteiligung der Zahlungssaldo geringer.

Alternativ kann die Aufgabe (etwas aufwändiger) unter Beibehaltung der Schadenzahl mit P(N=0)=0,7 und P(N=1)=0,3 unter Verwendung der 2. Waldschen Regel gelöst werden.

Aufgabe 4 (Tarifierung)

Ein Versicherungsunternehmen verwendet zur Selektion von Risiken ein einfaches Bonus-Malus-System mit den drei Klassen 1, 2 und 3 für ein Kollektiv mit drei Risikotypen A, B und C. Diese Risikotypen unterscheiden sich nur in der Wahrscheinlichkeit während eines Jahres keinen Schaden zu melden. Das Versicherungsunternehmen weiß a priori nicht, zu welchem Risikotyp ein beliebig herausgegriffener Versicherungsnehmer gehört. Aus einer Verbandsstatistik sind lediglich folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt.

Risikotyp	A	B	C
Anteil am Kollektiv	0,5	0,3	0,2
Wahrscheinlichkeit der Schadenfreiheit	0,9	0,8	0,6

Bei Schadenfreiheit wird der Versicherungsnehmer im Folgejahr eine Klasse hochgestuft oder verbleibt in der höchsten Klasse 3. Bei nicht schadenfreiem Verlauf wird der Versicherungsnehmer im Folgejahr eine Klasse zurückgestuft oder verbleibt in der Klasse 1.

Im ersten Versicherungsjahr sind alle Versicherungsnehmer in der Klasse 1.

Falls ein Versicherungsnehmer nicht schadenfrei ist, beträgt der Erwartungswert seines jährlichen Gesamtschadens 1.000 EURO.

Schadenereignisse treten stochastisch unabhängig ein.

a) Wie groß ist die Nettorisikoprämie (der Erwartungswert der Schäden) in der Klasse 1 im ersten Versicherungsjahr?

b) Geben Sie die Übergangsmatrix eines Versicherungsnehmers des Risikotyps A in diesem Bonus-Malus-System an.
Wie groß ist die Nettorisikoprämie (der Erwartungswert der Schäden) in der Klasse 1 im dritten Versicherungsjahr?

c) Nach 10 Jahren hat der Risikotyp C die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung auf die drei Klassen:

Klasse	1	2	3
Anteil der Versicherungsnehmer des Typs C	0,21	0,32	0,47
Nettorisikoprämie	327	245	167

Berechnen Sie die Nettorisikoprämie nach Bayes für einen Versicherungsnehmer unbekannten Risikotyps für den Fall, dass er in den 10 Jahren 6 schadenfreie Jahre hatte.

Diskutieren Sie diese Nettorisikoprämie im Vergleich mit der Nettorisikoprämie eines Versicherungsnehmers des Risikotyps C. Dieser hat im Lauf von 10 Jahren im Durchschnitt 6 schadenfreie Jahre.

Lösung

a) S: Schaden eines beliebigen Versicherungsnehmers
$E(S) = 0{,}5\cdot 0{,}1\cdot 1.000 + 0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 1.000 + 0{,}2\cdot 0{,}4\cdot 1.000 = 190$

b) Übergangsmatrix P für einen Versicherungsnehmer des Risikotyps A:

0,1	0,9	0
0,1	0	0,9
0	0,1	0,9

Linksmultiplikation des Zustandsvektors (1; 0; 0) mit P^2 ergibt den Zustandsvektor $(0{,}1\cdot 0{,}1+0{,}9\cdot 0{,}1;\ 0{,}09;\ 0{,}9\cdot 0{,}9)$, wobei nur die erste Komponente von Interesse ist. Ein analoges Ergebnis ergibt sich für die Risikotypen B und C.

Für die Nettorisikoprämie NRP in der Klasse 1 gilt daher:

$$NRP = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}5 \cdot 100 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 200 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 400}{0{,}1 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 9{,}2} = \frac{49}{0{,}19} = 257{,}89$$

c) N: Zahl der schadenfreien Jahre im Zeitraum von 10 Jahren
P(Y): Wahrscheinlichkeit der Klassenzugehörigkeit zum Risikotyp Y

$$P(A|N=6) = \frac{\binom{10}{6}P(N=6|A)\cdot P(A)}{\binom{10}{6}\{P(N=6|A)\cdot P(A)+P(N=6|B)\cdot P(B)+P(N=6|C)\cdot P(C)\}}$$

$$= \frac{0{,}9^6\cdot 0{,}1^4\cdot 0{,}5}{0{,}9^6\cdot 0{,}1^4\cdot 0{,}5+0{,}8^6\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}3+0{,}6^6\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}2} = 0{,}0679$$

$$P(B|N=6) = \frac{0{,}8^6\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}3}{0{,}9^6\cdot 0{,}1^4\cdot 0{,}5+0{,}8^6\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}3+0{,}6^6\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}2} = 0{,}3216$$

$P(C|N=6) = 1- P(A|N=6) - P(B|N=6) = 0{,}6105$

Die Nettorisikoprämie NRP nach Bayes beträgt damit

$NRP = 0{,}0679\cdot 100 + 0{,}3216\cdot 200 + 0{,}6105\cdot 400 = 315{,}31$.

Im Durchschnitt bezahlt ein Versicherungsnehmer des Risikotyps C nach 10 Jahren die Nettorisikoprämie $NRP= 0{,}21\cdot 327 + 0{,}32\cdot 245 + 0{,}47\cdot 167 = 225{,}56$.
Das Bonus-Malus-System differenziert also wesentlich geringer als das Verfahren nach Bayes.

Aufgabe 5 (Reservierung)

Für einen Bestand von Risiken sind für jedes der Anfalljahre $i = 2009, \ldots, 2012$ die Zuwächse $Z_{i,k}$ mit $k = 0, \ldots, 3$ sowie ein Volumenmaß ν_i bekannt:

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Volumen** ν_i
2009	330	154	72	36	600
2010	390	666	84		700
2011	420	188			800
2012	480				900

(a) Bestimmen Sie die additiven Schadenquotenzuwächse.

(b) Bestimmen Sie die additive Endschadenquote.

(c) Bestimmen Sie die additiven Abwicklungsquoten.

(d) Schätzen Sie die Reserve für 2010 mit dem additiven Verfahren.

(e) Schätzen Sie die Reserve für 2010 mit dem Loss–Development Verfahren unter Verwendung der additiven Abwicklungsquoten.

(f) Diskutieren Sie die Auswirkungen des Ausreißers $Z_{2010,1}$.

Lösung:

(a) Für die additiven Schadenquotenzuwächse erhält man

$$\begin{aligned}
\widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}} &= \frac{36}{600} = 0,06\\
\widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}} &= \frac{72+84}{600+700} = 0,12\\
\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}} &= \frac{154+666+188}{600+700+800} = 0,48\\
\widehat{\zeta}_0^{\mathrm{AD}} &= \frac{330+390+420+480}{600+700+800+900} = 0,54
\end{aligned}$$

(b) Daraus ergibt sich die additive Endschadenquote

$$\widehat{\kappa}^{\mathrm{AD}} = \sum_{k=0}^{3} \widehat{\zeta}_k^{\mathrm{AD}} = 0,54+0,48+0,12+0,06 = 1,20$$

(c) Damit erhält man für die additiven Abwicklungsquoten die Werte

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_0^{\mathrm{AD}} &= \frac{0,54}{1,20} = 0,45\\
\widehat{\gamma}_1^{\mathrm{AD}} &= \frac{0,54+0,48}{1,20} = 0,85\\
\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{AD}} &= \frac{0,54+0,48+0,12}{1,20} = 0,95\\
\widehat{\gamma}_3^{\mathrm{AD}} &= 1
\end{aligned}$$

(d) Für die Reserve für das Anfalljahr 2010 ergibt sich mit dem additiven Verfahren

$$\widehat{R}_{2010}^{\mathrm{AD}} = \widehat{Z}_{2010,3}^{\mathrm{AD}} = \nu_{2010}\, \widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}} = 700 \times 0,06 = 42$$

(e) Für die Reserve für das Anfalljahr 2010 ergibt sich mit dem Loss–Development Verfahren wegen $S_{2010,2} = 390 + 666 + 84 = 1140$

$$\widehat{R}_{2010}^{\mathrm{LD}} = \widehat{S}_{2010,3}^{\mathrm{LD}} - S_{2010,2} = \frac{S_{2010,2}}{\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{AD}}} - S_{2010,2} = \frac{1140}{0,95} - 1140 = 60$$

(f) Der Ausreißer $Z_{2010,1}$ bewirkt eine Erhöhung des additiven Schadenquotenzuwachses $\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}}$ und damit der additiven Endschadenquote $\widehat{\kappa}^{\mathrm{AD}}$; daher bewirkt er eine Verringerung der additiven Abwicklungsquote $\widehat{\gamma}_0^{\mathrm{AD}}$ und eine Erhöhung der additiven Abwicklungsquoten $\widehat{\gamma}_1^{\mathrm{AD}}$ und $\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{AD}}$.
Der Ausreißer wirkt sich bei additiven Verfahren nicht aus.
In Bezug aus das Loss–Development Verfahren hat der Ausreißer zwei gegenläufige Effekte: Zum einen treibt er den aktuellen Schadenstand $S_{2010,2}$ in die Höhe, wodurch die Loss–Development Reserve tendenziell steigt; zum anderen wird dieser Effekt durch die Erhöhung der additiven Abwicklungsquote $\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{AD}}$ teilweise kompensiert. Insgesamt ist der Ausreißereffekt beim Loss–Development Verfahren gering, da die Schäden aus 2010 am Ende des Abwicklungsjahres 2 bereits weitgehend abgewickelt sind.

Aufgabe 6 (Reservierung)

Für einen Bestand von Risiken sind für jedes der Anfalljahre $i = 2009, \ldots, 2012$ die Schadenstände $S_{i,k}$ mit $k = 0, \ldots, 3$ sowie ein a–priori Schätzer $\widehat{\alpha}_i^{\text{extern}}$ des erwarteten Endschadenstandes gegeben:

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**a–priori Schätzer** $\widehat{\alpha}_i^{\text{extern}}$
2009	320	490	600	750	800
2010	330	510	650		850
2011	350	600			900
2012	400				950

(a) Bestimmen Sie die Chain–Ladder Faktoren.

(b) Bestimmen Sie die Chain–Ladder Quoten.

(c) Schätzen Sie den Endschadenstand für 2012 mit dem Chain–Ladder Verfahren.

(d) Schätzen Sie den Endschadenstand für 2012 mit dem Bornhuetter–Ferguson Verfahren.

(e) Schätzen Sie den Endschadenstand für 2012 mit der ersten Iteration des Bornhuetter–Ferguson Verfahrens, indem Sie den a–priori Schätzer $\widehat{\alpha}_{2010}^{\text{extern}}$ durch den unter (d) gewonnenen Bornhuetter–Ferguson Schätzer für den Endschadenstand $S_{2010,3}$ ersetzen und erneut das Bornhuetter–Ferguson Verfahren anwenden. (Schreibfehler: Gemeint ist natürlich $\widehat{\alpha}_{2012}^{\text{extern}}$ statt $\widehat{\alpha}_{2010}^{\text{extern}}$.)

(f) Zeigen Sie, dass für jedes Anfalljahr der Schätzer des Endschadenstandes nach dem iterierten Bornhuetter–Ferguson Verfahren zwischen dem Chain–Ladder Schätzer und dem Bornhuetter–Ferguson Schätzer liegt.

Lösung:

(a) Für die Chain–Ladder Faktoren gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} &= \frac{750}{600} = 1,25 \\
\widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}} &= \frac{600+650}{490+510} = 1,25 \\
\widehat{\varphi}_1^{\mathrm{CL}} &= \frac{490+510+600}{320+330+350} = 1,60
\end{aligned}$$

(b) Für die Chain–Ladder Quoten ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_3^{\mathrm{CL}} &= 1 \\
\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{CL}} &= \frac{1}{1,25} = 0,80 \\
\widehat{\gamma}_1^{\mathrm{CL}} &= \frac{0,80}{1,25} = 0,64 \\
\widehat{\gamma}_0^{\mathrm{CL}} &= \frac{0,64}{1,60} = 0,40
\end{aligned}$$

(c) Für den Endschadenstand für 2012 ergibt sich mit dem Chain–Ladder Verfahren

$$\widehat{S}_{2012,3}^{\mathrm{CL}} = S_{2012,0} \times \widehat{\varphi}_1^{\mathrm{CL}} \times \widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}} \times \widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} = 400 \times 1,60 \times 1,25 \times 1,25 = 1000$$

(d) Für den Endschadenstand für 2012 ergibt sich mit dem Bornhuetter–Ferguson Verfahren

$$\widehat{S}_{2012,3}^{\mathrm{BF}} = S_{2012,0} + (1 - \widehat{\gamma}_0^{\mathrm{CL}})\, \widehat{\alpha}_{2012}^{\mathrm{extern}} = 400 + (1 - 0,40) \times 950 = 970$$

(e) Für den Endschadenstand für 2012 ergibt sich mit der ersten Iteration des Bornhuetter–Ferguson Verfahrens

$$\widehat{S}_{2012,3}^{\mathrm{BF}(1)} = S_{2012,0} + (1 - \widehat{\gamma}_0^{\mathrm{CL}})\, \widehat{S}_{2012,3}^{\mathrm{BF}} = 400 + (1 - 0,40) \times 970 = 982$$

(f) Allgemein gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_{i,n}^{\mathrm{BF}(1)} &= S_{i,n-i} + (1 - \widehat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{CL}})\, \widehat{S}_{i,n}^{\mathrm{BF}} \\
&= \widehat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{CL}} \frac{S_{i,n-i}}{\widehat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{CL}}} + (1 - \widehat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{CL}})\, \widehat{S}_{i,n}^{\mathrm{BF}} \\
&= \widehat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{CL}}\, \widehat{S}_{i,n}^{\mathrm{CL}} + (1 - \widehat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{CL}})\, \widehat{S}_{i,n}^{\mathrm{BF}}
\end{aligned}$$

Daher ist $\widehat{S}_{i,n}^{\mathrm{BF}(1)}$ eine Konvexkombination von $\widehat{S}_{i,n}^{\mathrm{CL}}$ und $\widehat{S}_{i,n}^{\mathrm{BF}}$.

Aufgabe 7 (Rückversicherung und Risikoteilung)

Der Gesamtschaden X eines Versicherungsvertrages möge die folgende Verteilung besitzen:

$$\mathbb{P}\{X = 0\} = 0,9, \ \mathbb{P}\{X = 500\} = 0,09, \ \mathbb{P}\{X = 3.000\} = 0,01.$$

Für diesen Gesamtschaden schließt der Versicherer A einen Stop-Loss-Rückversicherungsvertrag mit Versicherer B ab, der durch Priorität $M = 500$ und Limit $L = 2.000$ bestimmt wird, bei dem also Versicherer B für $X > M$ den Teil $Y = \min(X - M, L)$ des Schadens X an Versicherer A zahlt. Versicherer B schließt wiederum für dieses Risiko einen ebensolchen Vertrag mit Versicherer C mit Priorität $M' = 500$ und Limit $L' = 1.000$ ab, der also bei Versicherer C bei $Y > M'$ zur Zahlung von $\min(Y - M', L')$ an Versicherer B führt.

a) Wie wird ein Gesamtschaden der Höhe X zwischen den drei Versicherern A, B und C aufgeteilt?

b) Welche Varianz hat X?

c) Berechnen Sie die Varianzen der Zahlungen der drei Versicherer A, B und C, und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis in 2.

d) Mit welcher Form der Risikoteilung $X = X_A + X_B + X_C$ erreicht man

$$Var(X_A) + Var(X_B) + Var(X_C) = Var(X)/3 = 35.625?$$

Lösung:

a) Ein Gesamtschaden der Höhe 500 wird von Versicherer A alleine gezahlt. Von einem Gesamtschaden von 3.000 zahlt Versicherer A 1.000, die verbleibenden 2.000 zahlt Versicherer B. Versicherer B erhält in diesem Falle 1.000 von Versicherer C. Also zahlen hier alle drei Versicherer den gleichen Anteil 1.000 des Gesamtschadens.

b) Mit $E[X] = 0,09 \times 500 + 0,01 \times 3.000 = 75$ und

$$E[X^2] = 0,09 \times 500^2 + 0,01 \times 3.000^2 = 112.500$$

erhält man

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 106.875$$

c) Versicherer B und C haben beide dieselbe Varianz, sie zahlen einen Anteil des Gesamtschadens in Höhe von 0 oder 1.000 mit Wahrscheinlichkeit 0,99 beziehungsweise 0,01. Diese Varianz $Var(X_B) = Var(X_C)$ ist

$$0,99 \times 0,01 \times 1.000^2 = 9.900.$$

Der Anteil der Zahlung X_A vovom Gesamtschaden, welchen Versicherer A zahlt, nimmt die Werte 0, 500 und 1.000 mit den Wahrscheinlichkeiten 0,9, 0,09 und 0,01 an. Die zugehörige Varianz ist

$$Var(X_A) = E[X_A^2] - (E[X_A])^2 = 29.475.$$

Die Summe der Varianzen ist deutlich kleiner als die Varianz von X:

$$\begin{aligned} Var(X_A) + Var(X_B) + Var(X_C) &= 29.475 + 2 \times 9.900 \\ &= 49.275 < 106.875 = Var(X). \end{aligned}$$

d) Mit $X_A = X_B = X_C = X/3$.

Aufgabe (Rückversicherung und Risikoteilung)

Der Gesamtschaden X wird vollständig für eine Prämie der Höhe 100 versichert. Bleibt der Vertrag in einer Periode schadenfrei, kann dieser für die Folgeperiode mit einer Prämie der Höhe 50 um eine Periode verlängert werden, höchstens für insgesamt drei Perioden. Der Schaden X nimmt die Werte $0, 500$ und 3.000 mit den Wahrscheinlichkeiten $0,9$, $0,09$ und $0,01$ an. Die Schäden in verschiedenen Perioden sind stochastisch unabhängig.

a) Welchen erwarteten Gewinn hat der Versicherer, wenn er die Verlängerungsoption mit reduzierter Prämie *nicht* anbietet?

b) Welchen erwarteten Gewinn hat der Versicherer, wenn er die Verlängerungsoption anbietet und der Versicherungsnehmer bei Schadenfreiheit (d. h. bei $X = 0$) die Verlängerungsoption wahrnimmt?

Lösung:

a) Der erwartete Gewinn ist die (erwartete) Prämieneinnahme, vermindert um die erwarteten Versicherungsleistungen, also

$$100 - E[X] = 100 - 0,09 \times 500 + 0,01 \times 3000 = 100 - 75 = 25.$$

b) Sind X_1, X_2, X_3 die Schäden in drei aufeinander folgenden Perioden, dann wird X_1 vom Versicherer immer gezahlt; X_2 wird nur dann bezahlt, wenn $X_1 = 0$ gilt. Und X_3 wird bezahlt, wenn $X_1 = X_2 = 0$ ist. Der Erwartungswert der Summe der Schäden S aus dem Vertrag ergibt sich somit wegen $E[X_i] = E[X] = 75$ aus

$$ES = E[X] \times (1 + 0.9 + 0.9^2) = 75 \times 2,71 = 203,25.$$

Ebenso ergibt sich der Erwartungswert der Beiträge:

$$\begin{aligned} E[B] &= 100 + 0.9 \times 50 + 0.9^2 \times 50 \\ &= 50 + 50 \times 2,71 = 50 + 135,5 = 185,5. \end{aligned}$$

Der erwartete Gewinn des Versicherers ist negativ, und zwar

$$185,5 - 203,25 = -17,75.$$

Aufgabe 9 (Zusatzaufgabe I)

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Daten, die einer Pareto-Verteilung $\mathrm{Par}(a, b)$ mit $b > 1$ folgen. Das heisst, $\mathbb{P}[X_k > x] = (a/x)^b$ für $x > a$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $M = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

(b) Bestimmen Sie m_n, so dass $\mathbb{P}[M > m_n] = 0,01$.

(c) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X_k \mid X_k \le m_n]$.

(d) Untersuchen und diskutieren Sie das Verhältnis von $\mathbb{E}[X_k]$ und $\mathbb{E}[X_k \mid X_k \le m_n]$ für $b = 6/5 = 1,2$, $n = 100$ und m_n aus Teilaufgabe (b).

Lösung:

(a) Es gilt

$$\mathbb{P}[M \le m] = \mathbb{P}[X_1 \le m, X_2 \le m, \ldots, X_n \le m] = \Big(1 - \big(\frac{a}{m}\big)^b\Big)^n .$$

(b) Wir schreiben im weiteren m statt m_n. Wir suchen die Lösung der Gleichung $\mathbb{P}[M \le m] = 0,99$. Dies ist

$$m = a(1 - 0,99^{1/n})^{-1/b} .$$

(c) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_k \mid X_k \le m] &= \frac{\int_a^m x a^b b x^{-b-1}\,\mathrm{d}x}{1-(a/m)^b} = \frac{ab}{b-1}\frac{1-(a/m)^{b-1}}{1-(a/m)^b} \\ &= \frac{ab}{b-1}\frac{1-(1-0,99^{1/n})^{(b-1)/b}}{0,99^{1/n}} .\end{aligned}$$

(d) Der Erwartungswert ist $\mathbb{E}[X_k] = ab/(b-1)$. Somit ist

$$\frac{\mathbb{E}[X_k \mid X_k \le m]}{\mathbb{E}[X_k]} = \frac{1-(1-0,99^{1/n})^{(b-1)/b}}{0,99^{1/n}} = \frac{1-(1-0,99^{1/100})^{1/6}}{0,99^{1/100}} \approx 0,7845 .$$

Bedingen wir auf $\{X_k \le m\}$, so wird der Erwartungswert um rund 21,5% unterschätzt. Man bemerke, dass $\mathbb{E}[X_k \mid X_k \le m] = \mathbb{E}[X_k \mid M \le m]$, so dass die Bedingung für alle Daten mit der hohen Wahrscheinlichkeit von $0,99$ eintritt. Das arithmetische Mittel als Schätzer für den Erwartungswert ist daher sehr riskant.

Aufgabe 10 (Zusatzaufgabe II)

Wir betrachten das Abwicklungsquadrat für Zuwächse $Z_{i,k}$ mit $i, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ und nehmen an, dass die Zuwächse

– für $i + k \leq n$ beobachtbar und

– für $i + k \geq n + 1$ nicht beobachtbar

sind. Wir nehmen desweiteren an, dass die Zuwächse unabhängig und normalverteilt sind und dass es bekannte Volumenmaße $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n$ und unbekannte Parameter $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ und $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ gibt derart, dass für alle $i, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} E[Z_{i,k}] &= \nu_i \, \zeta_k \\ \mathrm{var}[Z_{i,k}] &= \nu_i \, \tau_k \end{aligned}$$

gilt.

(a) Liegt ein Abwicklungsmuster vor und, wenn ja, welches?

(b) Bestimmen Sie die Maximum–Likelihood–Schätzer aller Parameter.

(c) Welches Reservierungsverfahren verwendet die Maximum–Likelihood Schätzer der Parameter $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$?

(d) Untersuchen Sie die Erwartungstreue der Maximum–Likelihood–Schätzer der Parameter $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$.

(e) Die Maximum–Likelihood–Schätzer der Parameter $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ sind nicht erwartungstreu. Dies kann durch eine längere Rechnung gezeigt und durch ein allgemeines Argument der Statistik plausibilisiert werden. Nennen Sie dieses statistische Argument.

Lösung:

(a) Wegen

$$\zeta_k \;=\; E\left[\frac{Z_{i,k}}{\nu_i}\right]$$

für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ liegt ein Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse vor.

(b) Wir bezeichnen die Gesamtheit der beobachtbaren Zuwächse mit $\mathbf{Z}$ und die Realisationen von $\mathbf{Z}$ mit $\mathbf{z}$. Aufgrund der Modellannahmen besitzt die gemeinsame Verteilung der beobachtbaren Zuwächse die Dichtefunktion f mit

$$f(\mathbf{z}) \;=\; \prod_{k=0}^{n} \prod_{i=0}^{n-k} \left(\frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\nu_i\,\tau_k}} \exp\left(-\frac{(z_{i,k} - \nu_i\,\zeta_k)^2}{2\,\nu_i\,\tau_k} \right) \right)$$

Wir bezeichnen des weiteren mit $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}$ einen Schätzer für die Gesamtheit der Parameter $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ und mit $\widehat{\boldsymbol{\tau}}$ einen Schätzer für die Gesamtheit der Parameter $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$. Für die Likelihood–Funktion L gilt dann

$$L\bigl(\widehat{\boldsymbol{\zeta}}, \widehat{\boldsymbol{\tau}} \mid \mathbf{Z}\bigr) \;=\; \prod_{k=0}^{n} \prod_{i=0}^{n-k} \left(\frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\nu_i\,\widehat{\tau}_k}} \exp\left(-\frac{(Z_{i,k} - \nu_i\,\widehat{\zeta}_k)^2}{2\,\nu_i\,\widehat{\tau}_k} \right) \right)$$

und für die Loglikelihood–Funktion $\ln \circ L$ erhält man

$$(\ln \circ L)\bigl(\widehat{\boldsymbol{\zeta}}, \widehat{\boldsymbol{\tau}} \mid \mathbf{Z}\bigr) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} \left(-\frac{1}{2} \ln(\widehat{\tau}_k) - \frac{(Z_{i,k} - \nu_i\,\widehat{\zeta}_k)^2}{2\,\nu_i\,\widehat{\tau}_k} \right) + C$$

wobei C eine Größe ist, die nicht von den Schätzern der Parameter abhängt. Für die partiellen Ableitungen der Loglikelihood–Funktion ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\ln \circ L)}{\partial \widehat{\zeta}_k}\bigl(\widehat{\boldsymbol{\zeta}}, \widehat{\boldsymbol{\tau}} \mid \mathbf{Z}\bigr) &= \sum_{i=0}^{n-k} \frac{Z_{i,k} - \nu_i\,\widehat{\zeta}_k}{\widehat{\tau}_k} \\
&= \frac{1}{\widehat{\tau}_k} \left(\sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,k} - \widehat{\zeta}_k \sum_{i=0}^{n-k} \nu_i \right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\ln \circ L)}{\partial \widehat{\tau}_k}\bigl(\widehat{\boldsymbol{\zeta}}, \widehat{\boldsymbol{\tau}} \mid \mathbf{Z}\bigr) &= \sum_{i=0}^{n-k} \left(-\frac{1}{2\,\widehat{\tau}_k} + \frac{(Z_{i,k} - \nu_i\,\widehat{\zeta}_k)^2}{2\,\nu_i\,\widehat{\tau}_k^2} \right) \\
&= \frac{1}{2\,\widehat{\tau}_k^2} \left(-(n-k+1)\,\widehat{\tau}_k + \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(Z_{i,k} - \nu_i\,\widehat{\zeta}_k)^2}{\nu_i} \right) \\
&= \frac{1}{2\,\widehat{\tau}_k^2} \left(-(n-k+1)\,\widehat{\tau}_k + \sum_{i=0}^{n-k} \nu_i \left(\frac{Z_{i,k}}{\nu_i} - \widehat{\zeta}_k \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

und durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen erhält man die Maximum–Likelihood Schätzer

$$\begin{aligned}
\widehat{\zeta}_k^{\mathrm{ML}} &= \frac{\sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,k}}{\sum_{i=0}^{n-k} \nu_i} \\
\widehat{\tau}_k^{\mathrm{ML}} &= \frac{1}{n-k+1} \sum_{i=0}^{n-k} \nu_i \left(\frac{Z_{i,k}}{\nu_i} - \widehat{\zeta}_k^{\mathrm{ML}} \right)^2
\end{aligned}$$

(c) Die Maximum–Likelihood Schätzer der Parameter $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ sind die additiven Schadenquotenzuwächse, die im additiven Verfahren verwendet werden.

(d) Wegen

$$\begin{aligned}
E\big[\widehat{\zeta}_k^{\mathrm{ML}}\big] &= E\left[\frac{\sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,k}}{\sum_{i=0}^{n-k} \nu_i} \right] \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{n-k} E[Z_{i,k}]}{\sum_{i=0}^{n-k} \nu_i} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{n-k} \nu_i \, \zeta_k}{\sum_{i=0}^{n-k} \nu_i} \\
&= \zeta_k
\end{aligned}$$

sind die Maximum–Likelihood Schätzer der Parameter $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ erwartungstreu.

(e) Eine längere Rechnung ergibt

$$E\left[\nu_i \left(\frac{Z_{i,k}}{\nu_i} - \widehat{\zeta}_k^{\mathrm{ML}} \right)^2 \right] = \left(1 - \frac{\nu_i}{\sum_{h=0}^{n-k} \nu_h} \right) \tau_k$$

und damit

$$\begin{aligned}
E\big[\widehat{\tau}_k^{\mathrm{ML}}\big] &= E\left[\frac{1}{n-k+1} \sum_{i=0}^{n-k} \nu_i \left(\frac{Z_{i,k}}{\nu_i} - \widehat{\zeta}_k^{\mathrm{ML}} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{n-k+1} \sum_{i=0}^{n-k} E\left[\nu_i \left(\frac{Z_{i,k}}{\nu_i} - \widehat{\zeta}_k^{\mathrm{ML}} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{n-k+1} \sum_{i=0}^{n-k} \left(1 - \frac{\nu_i}{\sum_{h=0}^{n-k} \nu_h} \right) \tau_k \\
&= \frac{n-k}{n-k+1} \, \tau_k
\end{aligned}$$

Daher sind die Maximum–Likelihood Schätzer der Parameter $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ nicht erwartungstreu. Dies ist plausibel, weil die Maximum–Likelihood Schätzer anstelle der Erwartungswerte ζ_k von $Z_{i,k}/\nu_i$ Schätzer dieser Erwartungswerte verwenden, wodurch ein Freiheitsgrad verloren geht.