Klausur zum
Grundwissen Schadenversicherungsmathematik

Ch. Hipp, M. Morlock, H. Schmidli und K.D. Schmidt

Mai 2012 in Köln

Die Klausur besteht aus 8 Aufgaben und zwei Zusatzaufgaben. Eine oder zwei Zusatzaufgaben werden nur gewertet, wenn eine bzw. zwei der anderen Aufgaben nicht bearbeitet oder als nicht bearbeitet gekennzeichnet wurden. Bei jeder Aufgabe sind maximal 15 Punkte zu erreichen. Insgesamt sind damit maximal 120 Punkte möglich. Zum Bestehen der Klausur reichen 48 Punkte.
Zugelassen sind die klassische Formelsammlung, die verteilt wird, sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner. Antworten sind zu begründen. Bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

1 Aufgabe (Risikomodelle)

Eine Aktuarin soll ein Versicherungsportfolio modellieren. Sie erhält dazu die folgenden Angaben. Aus früheren Jahren sind $n = 64$ (inflationsbereinigte) Schäden $(X_1, \dots, X_{64})$ bekannt. Die Aktuarin erhält weiter die folgenden statischen Werte: $\sum_{k=1}^{n} X_k = 1256$, $\sum_{k=1}^{n} X_k^2 = 179160$. Aus ähnlichen Erfahrungen entscheidet sich die Aktuarin, eine Paretoverteilung $F(x) = 1-(a/x)^b$, $a, b > 0$, $x \geq a$ zu verwenden, und anzunehmen, dass die Schäden unabhängig sind.

(a) Berechnen Sie das empirische Mittel und die empirische Varianz.

(b) Schätzen Sie die Parameter der Verteilung (z.B. mit der Momentenmethode).

Die Aktuarin erfährt, dass die 10 Schäden über 20 an eine Rückversicherung gemeldet wurden. Von der Ordnungsstatistik erhält sie die Kennzahlen: $\sum_{k=1}^{10} X_{(k)} = 874.17$, $\sum_{k=1}^{10} X_{(k)}^2 = 175982$.

(c) Welche Verteilung haben die Schäden über 20?

(d) Schätzen Sie den Parameter b aus den Rückversicherungsdaten.

(e) Woher kommt der Unterschied der Schätzungen?

Lösung:

(a) Der empirische Mittelwert ist $\bar{\mu} = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k \approx 19,625$, die empirische Varianz ist

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{\mu})^2 = \frac{1}{n-1} \Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \Big) - n\bar{\mu}^2 \Big] \approx 2452,6 \; .$$

(b) Der Mittelwert der Paretoverteilung ist $\frac{ab}{b-1}$, die Varianz $\frac{ba^2}{(b-1)^2(b-2)}$. Somit erhalten wir für den Momentenschätzer

$$\frac{\bar{\mu}^2}{\bar{\sigma}^2} \approx 0,1570 = \hat{b}(\hat{b} - 2) \; .$$

Somit wird $\hat{b} = 1 + \sqrt{1,1570} = 2,0756$. Damit wird $\hat{a} = \bar{\mu}\frac{b-1}{b} \approx 10,1701$.

(c) Wir brauchen die bedingte Wahrscheinlichkeit (für $x > 20$)

$$\mathbb{P}[X > x \mid X > 20] = \frac{\mathbb{P}[X > x]}{\mathbb{P}[X > 20]} = \frac{(a/x)^b}{(a/20)^b} = \left(\frac{20}{x}\right)^b .$$

Somit sind die Schäden, die an die Rückversicherung gemeldet werde Pareto-verteilt mit Parameter 20 und b.

(d) Der Erwartungswert, der an die Rückversicherung gemeldeten Schäden ist $\frac{20b}{b-1}$, der empirische Mittelwert ist $m = 87,417$. Damit erhalten wir die Gleichung $1 - 1/\hat{\beta} = 20/m \approx 0.2288$. Daraus schätzen wir $\hat{\beta} = 1,2967$.

(e) Wegen der schweren Flanken der Paretoverteilung sind der empirische Mittelwert und die empirische Varianz keine gute Schätzer für Erwartungswert und Varianz. Die seltenen sehr grossen Werte treten in relativ kleinen Datenmengen nicht auf. Da die vielen kleinen Werte, die nahe bei Null liegen, bei den Rückversicherungsdaten nicht verwendet werden, wird dieser Schätzwert schon wesentlich besser. Dies kann auch daran erkannt werden, dass $\mathbb{E}[X - 20 \mid X > 20]$ mit $77,417$ wesentlich grösser geschätzt wird als $\bar{\mu}$. Man bemerke weiter, dass für $b = 1,2967$ die Varianz gar nicht existiert. (Die Daten waren mit $a = 4$ und $b = 1,2$ erzeugt worden, das heisst $\sigma^2 = \infty$).

2 Aufgabe (Risikomodelle)

Ein kollektiver Versicherungsvertrag erzeugt in einem Jahr N Schäden mit Schadenshöhen $\{X_k\}$, wobei alle Variablen stochastisch unabhängig sind. Die Verteilung von N ist gegeben durch

n	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}[N = n]$	0,5	0,3	0,1	0,05	0,04	0,01

Die Schäden haben die Verteilung

x	10	100	1000	10000
$\mathbb{P}[X = x]$	0,5	0,2	0,2	0,1

(a) Berechnen Sie die Nettoprämie und die Varianz für das Risiko $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$.

(b) Wie ändert sich die Nettoprämie, wenn ein jährlicher Selbstbehalt von 1000 für den Gesamtschaden vereinbart wird?
Hinweis: In welchen Fällen liegt der Gesamtschaden unter dem Selbstbehalt? Wie hoch ist ein Schaden im Mittel, bedingt darauf, dass er 10 oder 100 ist?

Lösung:

(a) Der Erwartungswert der Schadenanzahl ist

$$0.3 \cdot 1 + 0.1 \cdot 2 + 0.05 \cdot 3 + 0.04 \cdot 4 + 0.01 \cdot 5 = 0.86\,;$$

das zweite Moment wird

$$0.3 \cdot 1 + 0.1 \cdot 4 + 0.05 \cdot 9 + 0.04 \cdot 16 + 0.01 \cdot 25 = 2.04\,.$$

Dies ergibt die Varianz $2.04 - 0.86^2 = 1.3004$. Der Erwartungswert der Schadenhöhen ist

$$0.5 \cdot 10 + 0.2 \cdot 100 + 0.2 \cdot 1000 + 0.1 \cdot 10000 = 1225\,;$$

und das zweite Moment

$$0.5 \cdot 10^2 + 0.2 \cdot 100^2 + 0.2 \cdot 1000^2 + 0.1 \cdot 10000^2 = 10\,202\,050 \ .$$

Die Varianz wird also $10\,202\,050 - (1225)^2 = 8\,701\,425$.

Mit Hilfe der Gleichungen von Wald finden wir

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X] = 0.86 \cdot 1225 = 1053.5$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[S] &= \mathbb{E}[N] \operatorname{Var}[X] + \operatorname{Var}[N](\mathbb{E}[X])^2 = 0.86 \cdot 8\,701\,425 + 1.3004 \cdot (1225)^2 \\ &\approx 9\,434\,638.25 \ .\end{aligned}$$

(b) Berechnen wir, wie hoch die erwarteten Kosten für die Kunden werden. Die Kosten sind genau dann kleiner als 1000, wenn kein Schaden 1000 oder 10000 wird. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist 0.7. Wir erhalten damit

$$\mathbb{E}[X \mid X \leq 100] = \frac{0.5 \cdot 10 + 0.2 \cdot 100}{0.7} = \frac{250}{7} \ .$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Gesamtschadens von 1000 oder höher wird

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S \geq 1000] &= \mathbb{P}[S > 0] - \sum_{k=1}^{5} \mathbb{P}[N = k, S < 1000] \\ &= \mathbb{P}[N > 0] - \sum_{k=1}^{5} \mathbb{P}[N = k, X_1 \leq 100, \ldots, X_k \leq 100] \\ &= 0.5 - (0.3 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.7^2 + 0.05 \cdot 0.7^3 + 0.04 \cdot 0.7^4 + 0.01 \cdot 0.7^5) \\ &= 0.2125653 \ .\end{aligned}$$

Also sind die mittleren Kosten für die Kunden

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{5} \mathbb{P}[N = k, S < 1000] \sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{E}[X_\ell \mid X_\ell \leq 100] + 1000 \cdot \mathbb{P}[S \geq 1000] \\ &\qquad = 0.3 \cdot 0.7 \cdot \frac{250}{7} + 0.1 \cdot 0.7^2 \cdot 2 \cdot \frac{250}{7} + 0.05 \cdot 0.7^3 \cdot 3 \cdot \frac{250}{7} \\ &\qquad\quad + 0.04 \cdot 0.7^4 \cdot 4 \cdot \frac{250}{7} + 0.01 \cdot 0.7^5 \cdot 5 \cdot \frac{250}{7} + 0.2125653 \cdot 1000 \\ &\qquad \approx 227.075 \, .\end{aligned}$$

Damit wird die Nettoprämie mit Selbstbehalt $1053.5 - 227.075 = 826.425$.

Aufgabe 3 (Tarifierung)

Die Zahl N der Schäden sei poissonverteilt mit dem Erwartungswert 2. Die Höhe X eines Einzelschadens habe eine um 100 nach rechts verschobene Gammaverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{(x-100)}{200^2} \cdot e^{-\frac{(x-100)}{200}} \quad (x \geq 100).$$

Die Zahl der Schäden und die einzelnen Schäden sind jeweils stochastisch unabhängig. Der Versicherungsnehmer erhält eine Beitragsrückerstattung, falls kein Schaden auftritt.

a) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie, d.h. den Erwartungswert aus Schadenzahlung und Beitragsrückerstattung, bei einer Beitragsrückerstattung in Höhe von 50.

b) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie, d.h. den Erwartungswert aus Schadenzahlung und Beitragsrückerstattung, bei einer Beitragsrückerstattung in Höhe von 30% der Nettorisikoprämie.

c) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie, d.h. den Erwartungswert aus Schadenzahlung und Beitragsrückerstattung, bei einer Beitragsrückerstattung in Höhe von 30% der Prämie nach dem Standardabweichungsprinzip mit dem Parameter $\beta = 0{,}1$.

d) Diskutieren Sie <u>ohne Rechnung</u>: Wie wirkt es sich im Fall c) auf die Nettorisikoprämie aus, wenn der Versicherungsnehmer die Möglichkeit hat, den ersten Schaden selbst zu regulieren und nicht als ersten Schaden anrechnen zu lassen?
Welchen Sinn hätte eine derartige Alternative?

Lösung:

Aufgabenbereich: Kollektives Modell, Beitragsrückerstattung als Leistung des Versicherungsunternehmens, verschobene Schadenhöhenverteilung

Die Zufallsvariable X - 100 besitzt die Gammaverteilung $\Gamma(\frac{1}{200}, 2)$.

Daher gilt E[X-100] = $2 \cdot 200 = 400$ und damit $E[X] = 500$.

Da die Anzahl der Schäden die Poisson-Verteilung mit Erwartungswert 2 besitzt, ergibt sich für den Gesamtschaden S aus der Formel von Wald der Erwartungswert E[S] = E[N] E[X] = $2 \cdot 500 = 1000$.

a) Bei der Berechnung des Erwartungswerts der Schadenhöhe X+100 als Teil der ersten Gleichung von Wald ist es empfehlenswert, zum Erwartungswert $E[X] = 2 \cdot 200$ der (nicht verschobenen) Gammaverteilung $\Gamma(\frac{1}{200}, 2)$ die Höhe der Verschiebung zu addieren.

   Bezeichnet *S* den Gesamtschaden und NRP_a die Nettorisikoprämie so gilt:

$$NRP_a = E[S] + P[N = 0] \cdot 50$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 200 + 100) + e^{-2} \cdot 50$$

$$= 1006{,}77$$

b) Die Höhe der Beitragsrückerstattung und die Nettorisikoprämie sind hier gekoppelt. Die entsprechende Gleichung muss daher nach der Nettorisikoprämie aufgelöst werden. Bei der Aufgabenstellung ist vereinfachend angenommen, dass die Beitragsrückerstattung nur dann geleistet wird, wenn kein Schaden eintritt. Der realistischere Fall eines rational handelnden Versicherungsnehmers, der kleinere Schäden selbst begleicht, wird hier ausgeschlossen, da er rechentechnisch schwieriger zu lösen ist. Dieser Fall wird im Aufgabenteil d) diskutiert.

   Bezeichnet *S* den Gesamtschaden und NRP_b die Nettorisikoprämie so gilt:

$$NRP_b = E[S] + P[N = 0] \cdot 0{,}3 \cdot NRP_b$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 200 + 100) + e^{-2} \cdot 0{,}3 \cdot NRP_b\text{d}$$

   und damit

$$NRP_b = \frac{1000}{1 - e^{-2} \cdot 0{,}3} = 1042{,}32$$

c) Bei der Berechnung der Prämie nach dem Standardabweichungsprinzip kann der Erwartungswert der Schadenhöhe von Aufgabenteil a) übernommen werden. Bei der Berechnung der Standardabweichung ist zu beachten, dass eine Verschiebung der Verteilungsfunktion ohne Auswirkung auf die Standardabweichung bleibt.

   Bezeichnet *S* den Gesamtschaden und NRP_c die Nettorisikoprämie so gilt:

$$NRP_c = E[S] + P[N = 0] \cdot 0{,}3 \cdot \{E[S] + \beta \cdot Sta[S]\}$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 200 + 100) + e^{-2} \cdot 0{,}3 \cdot \{2 \cdot (2 \cdot 200 + 100) + 0{,}1 \cdot (2 \cdot 200^2 \cdot 2 + 2 \cdot 500^2)^{0{,}5}\}$$

$$= 1000 + e^{-0{,}2} \cdot 0{,}3 \cdot \{1000 + 0{,}1 \cdot 812{,}4\} = 1043{,}90$$

d) Wie bereits beim Aufgabenteil b) angesprochen, wird ein rational agierender Versicherungsnehmer kleinere Schäden selbst regulieren. Allerdings kann der Fall eintreten, dass ein oder mehrere weitere größere Schäden auftreten, deren Selbstregulierung sich nicht lohnt. Dann entfällt aber die Beitragsrückerstattung, obwohl zuvor Schäden selbst reguliert wurden.
Die Bestimmung der maximalen Höhe, bis zu der ein Schaden vom Versicherungsnehmer selbst getragen wird, hängt beispielsweise davon ab, ob der Versicherungsnehmer zunächst selbst regulierte Schäden gegebenenfalls später noch nachmelden kann.

Der hier zu behandelnden Fall, bei dem die Möglichkeit der Selbstregulierung nur für den ersten Schaden besteht, ist nicht wesentlich einfacher. Vor allem ein Aspekt ist für eine exakte Lösung zu berücksichtigen:
In Abhängigkeit von der Höhe des Selbstbehalts ändert sich die Wahrscheinlichkeit für eine Beitragsrückerstattung. Bei der Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit ist die Verteilung der Schadenhöhe zu berücksichtigen. Abgesehen von Spezialfällen ist die Berechnung nur iterativ möglich.
Fragestellung dieses Aufgabenteils betrifft jedoch nicht die Rechentechnik sondern nur die prinzipielle Wirkung dieser Tarifierungsvariante.

Die Möglichkeit für den Versicherungsnehmer, den ersten (kleinen) Schaden selbst zu regulieren, bringt dem Versicherungsnehmer Vorteile - zu Lasten des Versicherungsunternehmens. Die Nettorisikoprämie steigt daher.

Ein gewisser Vorteil für das Versicherungsunternehmen besteht darin, dass der Erwartungswert der Zahl der zu regulierenden Schäden sinkt und dadurch Kosten reduziert werden können.

Anmerkung:
Bei der Berechnung der Nettorisikoprämie wäre zusätzlich zum Fall „kein Schaden“, der Fall „erster Schaden kleiner als 30% von NRP_c“ mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit zu berücksichtigen. Diese kann in der Regel nicht geschlossen sondern nur iterativ berechnet werden.

Aufgabe 4 (Tarifierung)

Ein Versicherungsunternehmen hat ein inhomogenes Kollektiv bestehend aus 50% Risiken des Typs A, 30 % Risiken des Typs B und 20% Risiken des Typs C. Diese Risikotypen unterscheiden sich in der Wahrscheinlichkeit während eines Jahres schadenfrei zu sein. Schäden treten stochastisch unabhängig ein. Falls ein Risiko nicht schadenfrei ist, beträgt der Erwartungswert der Schäden eines Jahres 900.

Risikotyp	A	B	C
Wahrscheinlichkeit der Schadenfreiheit	0,9	0,7	0,6

Zur Selektion der Risiken verwendet das Unternehmen ein Bonus-Malus-System mit der Einstiegsklasse 1, der Rabattklasse 2 und der Malusklasse 0. Bei Schadenfreiheit wird der Versicherungsnehmer im Folgejahr eine Klasse hochgestuft oder verbleibt in der höchsten Klasse 2. Bei nicht schadenfreien Verlauf wird der Versicherungsnehmer im Folgejahr in die Klasse 0 eingestuft. Nach zwei Jahren ändert sich die Verteilung der Risikotypen in den Klassen nicht mehr.

Die drei Risikotypen befinden sich dann mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten in den drei Klassen des Bonus-Malus-Systems:

Risikotyp \ Klasse	0	1	2
A	0,1	0,09	0,81
B	0,3	0,21	0,49
C	0,4	0,24	0,36

a) Berechnen Sie denn Erwartungswert des Schadens pro Versicherungsnehmer im Kollektiv.

b) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie, d.h. den Erwartungswert des Schadens pro Versicherungsnehmer, in der Klasse 0 nach zwei Jahren.

c) A priori ist ein zufällig ausgewählter Versicherungsnehmer mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 ein Risikotyp B. Bestimmen Sie nach Bayes die Wahrscheinlichkeit, dass er zum Risikotyp B gehört, falls er in genau einem der ersten zwei Jahre schadenfrei war.

d) Welche Nettorisikoprämie hat ein zufällig ausgewählter Versicherungsnehmer nach Bayes im dritten Jahr zu bezahlen, falls er in genau einem der ersten zwei Jahre schadenfrei war.

e) Vergleichen Sie die Ergebnisse von b) und d).

Lösung:

a) Erwartungswert des Schadens im Kollektiv:

$$(0,5\cdot 0,1+0,3\cdot 0,3+0,2\cdot 0,4)\cdot 900 = 198$$

b) Erwartungswert des Schadens in der Klasse 0:

$$((0,5\cdot 0,1)\cdot 0,1+(0,3\cdot 0,3)\cdot 0,3+(0,2\cdot 0,4)\cdot 0,4)/(0,5\cdot 0,1+0,3\cdot 0,3+0,2\cdot 0,4)\cdot 900$$
$$= 261,82$$

c) Notationen: SF: Schadenfrei während eines Jahres
S: Schaden während eines Jahres
A, B, C: Risikotyp A, B, C

Ob das erste oder das zweite Jahr schadenfrei war, ist auf Grund der Unabhängigkeit der Schadenereignisse beim Bayesmodell irrelevant.

$$P[B \mid SF,S]$$
$$= P[SF,S \mid B]\cdot P(B)/\{P[SF,S \mid A]\cdot P[A]+P[SF,S \mid B]\cdot P[B] + P[SF,S \mid C]\cdot P[C]\}$$
$$= ((0,7\cdot 0,3)\cdot 0,3)/(0,9\cdot 0,1)\cdot 0,5+(0,7\cdot 0,3)\cdot 0,3+(0,6\cdot 0,4)\cdot 0,2)$$
$$= 0,404$$

d)
$$P[A \mid SF,S]$$
$$= P[SF,S \mid A]\cdot P[A]/\{P[SF,S \mid A]\cdot P[A] + P[SF,S \mid B]\cdot P[B] + P[SF,S \mid C]\cdot P[C]\}$$
$$= ((0,9\cdot 0,1)\cdot 0,5)/((0,9\cdot 0,1)\cdot 0,5+(0,7\cdot 0,3)\cdot 0,3+(0,6\cdot 0,4)\cdot 0,2)$$
$$= 0,288$$
$$P[C \mid SF, SF]$$
$$= 1 - 0,404 - 0,288$$
$$= 0,308$$

Ein Versicherungsnehmer, der in den ersten 2 Jahren genau ein Jahr schadenfrei war, hätte nach Bayes die Nettorisikoprämie

$$0,1\cdot 900\cdot 0,288 + 0,3\cdot 900\cdot 0,404 + 0,4\cdot 900\cdot 0,308 = 245,88$$

zu bezahlen. (Dies ist gerade der Schadenerwartungswert pro Versicherungsnehmer in der Klasse 1. In der Klasse 1 befinden sich nach 2 Jahren nur solche Versicherungsnehmer, die in diesem Zeitraum genau in einem Jahr schadenfrei waren.)

e) Ein Versicherungsnehmer, der nur in einem von zwei Jahren schadenfrei war, ist im dritten Jahr in der Klasse 1, falls er im zweiten Jahr schadenfrei war. Er ist aber im dritten Jahr in der Klasse 0, falls die Rückstufung im zweiten Jahr erfolgte. In Klasse 0 ist eine höhere Nettorisikoprämie zu bezahlen (diese beträgt 261,82 gemäß a)) als in der Klasse 1 mit eine Nettorisikoprämie von ebenfalls 245,88. Der Grund hierfür ist, dass nach zwei Jahren in der Klasse 1 nur solche Risiken sind, die nicht im ersten aber im zweiten Jahr schadenfrei waren. Bei der Nettorisikoprämie nach Bayes spielt also die Schadenhistorie keine Rolle. Sie bildet die vorausgesetzte Unabhängigkeit der Schadenereignisse besser ab.

Aufgabe 5 (Schadenreservierung)

Die folgende Tabelle enthält das Abwicklungsdreieck für Schadenstände der Anfalljahre 2008 bis 2011 sowie die Prämien der Anfalljahre 2008 bis 2011 und externe Schätzer für das Abwicklungsmuster für Quoten:

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2008	660	980	1200	1500	1600
2009	680	1036	1320		1680
2010	700	1248			1900
2011	782				2100
$\widehat{\gamma}_k^{\text{extern}}$	0,425	0,650	0,825	1,000	

(a) Berechnen Sie die Chain–Ladder Quoten und vergleichen Sie die Chain–Ladder Quoten mit den externen Schätzern für das Abwicklungsmuster für Quoten.

(b) Schätzen Sie die Endschadenstände der Anfalljahre 2009 bis 2011 mit dem Loss–Development Verfahren

(1) unter Verwendung der Chain–Ladder Quoten und

(2) unter Verwendung der externen Schätzer für das Abwicklungsmuster für Quoten

und vergleichen Sie die Ergebnisse.

(c) Schätzen Sie die Endschadenstände der Anfalljahre 2009 bis 2011 mit dem Cape–Cod Verfahren unter Verwendung der Chain–Ladder Quoten.

(d) Verwendet man im Cape–Cod Verfahren anstelle der Chain–Ladder Quoten die externen Schätzer für das Abwicklungsmuster für Quoten, so erhält man im vorliegenden Fall für die Endschadenstände der Anfalljahre 2009 bis 2011 geringere Schätzwerte als bei Verwendung der Chain–Ladder Quoten. Worauf ist dieser Effekt zurückzuführen?

Hinweis: Die Schätzwerte für die Endschadenstände sind ganzzahlig zu runden.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} &= \frac{1500}{1200} = 1,250 \\
\widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}} &= \frac{1200+1320}{980+1036} = 1,250 \\
\widehat{\varphi}_1^{\mathrm{CL}} &= \frac{980+1036+1248}{660+680+700} = 1,600
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_3^{\mathrm{CL}} &= 1,000 \\
\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{CL}} &= \frac{1}{1,250} = 0,800 \\
\widehat{\gamma}_1^{\mathrm{CL}} &= \frac{0,800}{1,250} = 0,640 \\
\widehat{\gamma}_0^{\mathrm{CL}} &= \frac{0,640}{1,600} = 0,400
\end{aligned}$$

Daher sind die Chain–Ladder Quoten (mit Ausnahme des Abwicklungsjahres 3) niedriger als die externen Schätzer des Abwicklungsmusters für Quoten.

(b) Für die Loss–Development Schätzer der Endschadenstände ergibt sich

(1) bei Verwendung der Chain–Ladder Quoten

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_{2009}^{\mathrm{LD}} &= \frac{S_{2009,2}}{\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{CL}}} = \frac{1320}{0,800} = 1650 \\
\widehat{S}_{2010}^{\mathrm{LD}} &= \frac{S_{2010,1}}{\widehat{\gamma}_1^{\mathrm{CL}}} = \frac{1248}{0,640} = 1950 \\
\widehat{S}_{2011}^{\mathrm{LD}} &= \frac{S_{2011,0}}{\widehat{\gamma}_0^{\mathrm{CL}}} = \frac{782}{0,400} = 1955
\end{aligned}$$

und

(2) bei Verwendung der externen Schätzer des Abwicklungsmusters für Quoten

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_{2009}^{\mathrm{LD}} &= \frac{S_{2009,2}}{\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{extern}}} = \frac{1320}{0,825} = 1600 \\
\widehat{S}_{2010}^{\mathrm{LD}} &= \frac{S_{2010,1}}{\widehat{\gamma}_1^{\mathrm{extern}}} = \frac{1248}{0,650} = 1920 \\
\widehat{S}_{2011}^{\mathrm{LD}} &= \frac{S_{2011,0}}{\widehat{\gamma}_0^{\mathrm{extern}}} = \frac{782}{0,425} = 1840
\end{aligned}$$

Bei Verwendung der externen Schätzer des Abwicklungsmusters für Quoten ergeben sich durchweg niedrigere Schätzwerte als bei Verwendung der Chain–Ladder Quoten. Dies ist darauf zurückzuführen, das die externen Schätzer eine schnellere Abwicklung vermuten lassen als die Chain–Ladder Quoten.

(c) Für das Cape–Cod Verfahren wird die Cape–Cod Endschadenquote $\widehat{\kappa}^{\text{CC}}$ benötigt. Dazu bestimmt man zunächst die verbrauchten Prämien $\widehat{\gamma}_k^{\text{CL}} \pi_{2011-k}$:

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2008				1600	1600
2009			1344		1680
2010		1216			1900
2011	840				2100
$\widehat{\gamma}_k^{\text{CL}}$	0,400	0,640	0,800	1,000	

Daraus ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\widehat{\kappa}^{\text{CC}} &= \frac{\sum_{k=0}^{3} S_{2011-k,k}}{\sum_{k=0}^{3} \widehat{\gamma}_k^{\text{CL}} \pi_{2011-k}} \\
&= \frac{782 + 1248 + 1320 + 1500}{840 + 1216 + 1344 + 1600} \;=\; \frac{4850}{5000} \;=\; 0,97
\end{aligned}
$$

und für die Cape–Cod Schätzer der erwarteten Endschadenstände erhält man

$$
\begin{aligned}
\widehat{S}_{2009}^{\text{CC}} &= S_{2009,2} + (1 - \widehat{\gamma}_2^{\text{CL}})\, \pi_{2009}\, \widehat{\kappa}^{\text{CC}} \\
&= 1320 + (1 - 0,800) \times 1680 \times 0,97 \;=\; 1646 \\
\widehat{S}_{2010}^{\text{CC}} &= S_{2010,1} + (1 - \widehat{\gamma}_1^{\text{CL}})\, \pi_{2010}\, \widehat{\kappa}^{\text{CC}} \\
&= 1248 + (1 - 0,640) \times 1900 \times 0,97 \;=\; 1911 \\
\widehat{S}_{2011}^{\text{CC}} &= S_{2011,0} + (1 - \widehat{\gamma}_0^{\text{CL}})\, \pi_{2011}\, \widehat{\kappa}^{\text{CC}} \\
&= 782 + (1 - 0,400) \times 2100 \times 0,97 \;=\; 2004
\end{aligned}
$$

(d) Da die externen Schätzer des Abwicklungsmusters für Quoten größer sind als die Chain–Ladder Quoten, gilt einerseits

$$1 - \widehat{\gamma}_k^{\text{extern}} \;<\; 1 - \widehat{\gamma}_k^{\text{CL}}$$

und andererseits

$$\sum_{k=0}^{3} \widehat{\gamma}_k^{\text{extern}} \pi_{2011-k} \;>\; \sum_{k=0}^{3} \widehat{\gamma}_k^{\text{CL}} \pi_{2011-k}$$

Aus der letzten Ungleichung folgt, dass die Cape–Cod Endschadenquote bei Verwendung der externen Schätzer kleiner ist als bei Verwendung der Chain–Ladder Quoten. Daher sind die Cape–Cod Prädiktoren der Endschadenstände bei Verwendung der externen Schätzer kleiner als bei Verwendung der Chain–Ladder Quoten.

Aufgabe 6 (Schadenreservierung)

Für einen Bestand von Risiken sind für jedes der Anfalljahre $i = 2008, \ldots, 2011$ die Zuwächse $Z_{i,k}$ mit $k = 0, \ldots, 3$ sowie die Prämie π_i und ein Volumenmaß ν_i bekannt:

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämien** π_i	**Volumen** ν_i
2008	176	82	50	32	320	400
2009	196	92	52		360	450
2010	190	96			400	500
2011	198				440	550

(a) Bestimmen Sie mit dem additiven Verfahren unter Verwendung der Volumenmaße (und Vernachlässigung der Prämien)

(1) die additiven Schadenquotenzuwächse,

(2) die additive Endschadenquote,

(3) die additiven Schätzer des Abwicklungsmusters für Anteile und

(4) den additiven Schätzer der Reserve für das Kalenderjahr 2014.

(b) Es gibt zwei Arten von Schäden (zum Beispiel Schäden mit oder ohne Personenschäden in der Kraftfahrthaftpflichtversicherung) und das Versicherungsunternehmen möchte neben der gemeinsamen Abwicklung aller Schäden die Abwicklung der beiden Schadenarten auch getrennt untersuchen. Dazu werden die Zuwächse und die Volumenmaße auf die beiden Schadenarten aufgeteilt und man erhält die Tabellen

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämien** π_i	**Volumen** ν_i
2008	22	8	6	4	320	32
2009	25	9	11		360	36
2010	24	10			400	32
2011	24				440	32

und

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämien** π_i	**Volumen** ν_i
2008	154	74	44	28	320	368
2009	171	83	41		360	414
2010	166	86			400	468
2011	174				440	518

Die Prämien werden nicht aufgeteilt.

(1) Bestimmen Sie mit dem additiven Verfahren wie vorher für jede der beiden Schadenarten die Reserve für das Kalenderjahr 2014 und vergleichen Sie die Summe dieser Reserven mit der vorher bestimmten Reserve für die Gesamtheit aller Schäden (Berechnungen mit drei Nachkommastellen).

(2) Was ändert sich, wenn man anstelle der Volumenmaße in allen drei Fällen die Prämien verwendet? Begründen Sie Ihr Ergebnis ohne Rechnung.

Lösung:

(a) (1) Für die additiven Schadenquotenzuwächse erhält man

$$\begin{aligned}
\widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}} &= \frac{32}{400} = 0,08 \\
\widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}} &= \frac{50+52}{400+450} = 0,12 \\
\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}} &= \frac{82+92+96}{400+450+500} = 0,20 \\
\widehat{\zeta}_0^{\mathrm{AD}} &= \frac{176+196+190+198}{400+450+500+550} = 0,40
\end{aligned}$$

(2) Daraus ergibt sich zunächst die additive Endschadenquote

$$\widehat{\kappa}^{\mathrm{AD}} = \sum_{k=0}^{3} \widehat{\zeta}_k^{\mathrm{AD}} = 0,40 + 0,20 + 0,12 + 0,08 = 0,80$$

(3) Damit erhält man für die additiven (Abwicklungs–)Anteile $\widehat{\vartheta}_k^{\mathrm{AD}} = \widehat{\zeta}_k^{\mathrm{AD}} / \widehat{\kappa}^{\mathrm{AD}}$ die Werte

$$\begin{aligned}
\widehat{\vartheta}_3^{\mathrm{AD}} &= \frac{0,08}{0,80} = 0,10 \\
\widehat{\vartheta}_2^{\mathrm{AD}} &= \frac{0,12}{0,80} = 0,15 \\
\widehat{\vartheta}_1^{\mathrm{AD}} &= \frac{0,20}{0,80} = 0,25 \\
\widehat{\vartheta}_0^{\mathrm{AD}} &= \frac{0,40}{0,80} = 0,50
\end{aligned}$$

(4) Für die Reserve für Kalenderjahr 2014 ergibt sich

$$\widehat{R}_{(2014)}^{\mathrm{AD}} = \widehat{Z}_{2011,3}^{\mathrm{AD}} = \nu_{2011}\, \widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}} = 550 \times 0,08 = 44$$

(b) (1) Für die beiden Schadenarten erhält man wie vorher

– $\widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}} = 0,125$ und damit $\widehat{R}_{(2014)}^{\mathrm{AD}} = 32 \times 0,125 = 4$ bzw.

– $\widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}} = 0,076$ und damit $\widehat{R}_{(2014)}^{\mathrm{AD}} = 518 \times 0,076 = 39,368$.

Die Summe dieser Reserven ist $4 + 39,368 = 43,368 \neq 44$ und damit von der Reserve für die Gesamtheit aller Schäden verschieden.

(2) Verwendet man anstelle der Volumenmaße die für alle drei Datenarten identischen Prämien, so ist für jedes Abwicklungsjahr die Summe der additiven Schadenquotenzuwächse der beiden Schadenarten gerade der additive Schadenquotenzuwachs der Gesamtheit aller Schäden. Daraus folgt, dass für jeden zukünftigen Zuwachs, und damit für jede Reserve, die Summe der additiven Schätzer der beiden Schadenarten gerade der additive Schätzer der Gesamtheit aller Schäden ist.

7. Aufgabe (Rückversicherung und Risikoteilung)

Sei $S = X_1 + ... + X_N$ der Gesamtschaden eines Versicherungsbestandes, der mit dem kollektiven Modell – also mit einer Schadenzahlverteilung für N und einer Schadenhöhenverteilung für X_i – beschrieben wird. Für diesen Bestand wird ein Schadenexzedenten-Rückversicherungsvertrag mit Priorität M vereinbart, bei dem der Rückversicherer bei einem Schaden der Größe $X > M$ den Geldbetrag $X - M$ bezahlt.

1. Geben Sie eine Formel an für die Nettorisikoprämie des Rückversicherers.
2. Berechnen Sie diese Nettorisikoprämie als Funktion von M für den Fall, dass $E[N] = 1$ und X_i eine US-Pareto-Verteilung mit Dichte $f(x) = 3(1+x)^{-4}, x > 0$, besitzt.
3. Betrachten Sie den Fall $E[N] = 1$ und $M = 1$. Wie verändert sich die Nettorisikoprämie, wenn jeder Schaden der Höhe X durch Inflation auf $1,03 \times X$ anwächst? Warum ist das Ergebnis um mehr als 3 % größer als das Ergebnis ohne Inflation?

Lösung:

1. Die Leistung des Rückversicherers Y bei einem Schaden der Höhe X ist

   $$Y = \max(X - M, 0) = (X - M)^+,$$

   und die Nettorisikoprämie NP ist als Erwartungswert der Leistung des Rückversicherers für den Bestand gegeben durch

   $$NP = E\left[\sum_{n=1}^{N}(X_i - M)^+\right].$$

   Die Formel von Wald ergibt

   $$NP = E[N]E[(X-M)^+] = E[N]\left(\int_M^\infty (x - M)f(x)dx\right),$$

   oder einfacher mit der Formel

   $$E[Y] = \int_0^\infty \mathbb{P}\{Y > t\}dt$$

   $$NP = E[N]\int_0^\infty \mathbb{P}\{X > t + M\}dt = E[N]\int_M^\infty \mathbb{P}\{X > t\}dt.$$

2. Wegen $E[N] = 1$ ist $NP = E[Y]$. Für die angegebene Verteilung ist $\mathbb{P}\{X > t\} = (1+t)^{-3}$ und damit

   $$\begin{aligned} E[Y] &= \int_M^\infty (1+t)^{-3}dt \\ &= \int_{1+M}^\infty t^{-3}dt = \frac{1}{2}(1+M)^{-2}. \end{aligned}$$

3. Für $M = 1$ erhält man ohne Inflation

$$NP = \frac{1}{2}(1+M)^{-2} = 1/8 = 0,125.$$

Mit Inflation ist

$$\begin{aligned} NP &= E[(1,03 \cdot X - M)^+] = 1,03E[(X - M/1,03)^+] \\ &= 1,03 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{M}{1,03} + 1\right)^{-2} = \frac{1,03^3}{2 \cdot 2,03^2} = 0,1325835. \end{aligned}$$

Dies ist größer als $0,125 \cdot 1,03 = 0,12875$, weil durch die Inflation die Priorität mit größerer Wahrscheinlichkeit überschritten wird.

8. Aufgabe (Rückversicherung und Risikoteilung)

Wir betrachten ein Risiko mit Schadenzahl N und Schadenhöhen X_i, wobei die Verteilung von N gegeben ist durch

k	0	1	2
$\mathbb{P}\{N = k\}$	0,5	0,25	0,25

Die Schadenhöhen haben Verteilung

x	100	150	1.000
$\mathbb{P}\{X = x\}$	0,5	0,4	0,1

Der Versicherer verlangt eine Bruttoprämie von 200, die sich zusammensetzt aus der Nettorisikoprämie von 157,50, dem Sicherheitszuschlag und der Abschlussprovision. Um das Produkt attraktiver zu machen, führt er eine Selbstbeteiligung von 100 ein (d.h. von einem Schaden der Höhe X übernimmt der Versicherer $X - 100$, den Rest zahlt der Versicherungsnerhmer), und gewährt eine Beitragserstattung von 100, wenn kein Schaden gemeldet wird.

1. Wie wird sich ein rationaler Versicherungsnehmer verhalten, wenn er am Ende der Versicherungsperiode entscheiden kann, welche Schäden gemeldet werden?

2. Ist dieses Produkt für den Versicherer eine Verbesserung gegenüber dem ursprünglichen Produkt? Nehmen Sie hierfür zur Vereinfachung an, dass der Sicherheitszuschlag und die Abschlussprovision unverändert bleiben.

Lösung:

Wegen $E[N] = 0,75$ und $E[X] = 210$ ist die Nettorisikoprämie

$$E[S] = E[N]E[X] = 157,50.$$

Mit Selbstbeteiligung verändert sich die Leistung für einen Schaden der Höhe X in

$$\overline{X} = X - 100$$

mit $E[\overline{X}] = 110$. Für Versicherungsnehmer, welche jeden Schaden über 100 melden, entsteht somit eine Nettorisikoprämie von

$$100\mathbb{P}\{N^* = 0\} + E[N]E[\overline{X}],$$

wobei N^* die Zahl der Schäden X_i mit $\overline{X}_i > 0$ ist. Wir sehen

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{N^* = 0\} &= \mathbb{P}\{N = 0\} + \mathbb{P}\{N = 1 \& X_1 = 100\} + \mathbb{P}\{N = 2 \& X_1 = X_2 = 100\} \\
&= 0,5 + 0,25 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,5^2 = 0,6875.
\end{aligned}$$

Also ist die Nettorisikoprämie für diesen Fall $68,75 + 82,50 = 151,25$.

1. Ein rationaler Versicherungsnehmer wird sich so verhalten, dass die Entschädigung immer mindestens so groß ist wie die Beitragserstattung. Also wird er, wenn genau ein Schaden auftritt, diesen nur melden, wenn er größer als 200 ist. Bei zwei Schäden wird er beide Schäden melden, wenn nicht eines der folgenden vier Paare von Schadenhöhen auftritt:

   $$(100, 100), (100, 150), (150, 100), (150, 150);$$

   dies sind die Fälle, in denen $X_1 + X_2 \leq 300$. Dabei wird seine Entscheidung nur in den beiden Fällen $(100, 150)$ und $(150, 100)$ eine andere Auszahlung ergeben als beim Versicherungsnehmer, der alle Schäden > 100 meldet.

2. Hierfür rechnen wir die Nettorisikoprämie des Versicherers mit rationalem Versicherungsnehmer aus. Der Mehrbetrag beim rationalen Versicherungsnehmer beträgt für das Versicherungsunternehmen in den Fällen $N = 1, X_1 = 150$ oder $N = 2, (X_1, X_2) = (100, 150)$ oder $N = 2, (X_1, X_2) = (150, 100)$ jeweils 50. Der mittlere Mehrbetrag ist damit $50 \cdot (0,25 \cdot 0,4 + 0,25 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 0,4) = 10$. Somit ist die gesuchte Nettorisikoprämie bei rationalem Verhalten des Versicherungsnehmers

   $$151,25 + 10 = 161,25.$$

   Das Produkt ist keine Verbesserung, weil die Nettorisikoprämie größer geworden ist.

9. Zusatzaufgabe I (Rückversicherung und Risikoteilung)

Ein Versicherungsbestand enthält 50.000 Risiken, bei denen die Schäden jeweils unabhängig voneinander auftreten. Bei 10.000 Risiken (des Typs A) sind die Schadenhöhen folgendermaßen verteilt:

x	0	1.000	3.000
$\mathbb{P}\{X = x\}$	0,7	0,2	0,1

Die restlichen 40.000 Risken (des Typs B) haben die Schadenhöhenverteilung

x	0	500	1.500
$\mathbb{P}\{X = x\}$	0,4	0,4	0,2

1. Berechnen Sie den Variationskoeffizienten des Gesamtschadens im Versicherungsbestand.
2. Wie wirkt sich eine proportionale Selbstbeteiligung der Versicherungsnehmer in Höhe von 25% der Schadenhöhe auf den Variationskoeffizienten aus?
3. Wie wirkt sich eine Selbstbeteiligung der Versicherungsnehmer in der Form einer Abzugsfranchise in Höhe von 1.000 auf den Variationskoeffizienten aus?

Lösung:

1. Für ein Risiko des Typs A ist der Erwartungswert

   $$0,2 \cdot 1.000 + 0,1 \cdot 3.000 = 500,$$

   und die Varianz ist

   $$0,2 \cdot 1.000^2 + 0,1 \cdot 3.000^2 - 500^2 = 850.000.$$

   Für Typ B erhält man den Erwartungswert 500 und die Varianz 300.000. Als Variationskoeffizient ergibt sich

   $$\sqrt{10.000 \cdot 850.000 + 40.000 \cdot 300.000}/(50.000 \cdot 500) = 0,00573.$$

2. Alle Erwartungswerte werden mit dem Faktor 0,75 multipliziert, und alle Varianzen werden mit dem Faktor $0,75^2$ multipliziert. Der Variationskoeffizient ändert sich also nicht.

3. Mit der Abzugsfranchise ergibt sich für den Erwartungswert der Entschädigung bei Typ A

   $$0,1 \cdot 2.000 = 200,$$

   die Varianz wird

   $$0,1 \cdot 2.000^2 - 200^2 = 360.000,$$

   und bei Typ B erhalten wir

   $$0,2 \cdot 500 = 100$$

   und

   $$0,2 \cdot 500^2 - 100^2 = 40.000.$$

   Damit erhalten wir den Variationskoeffizienten

   $$\sqrt{10.000 \cdot 360.000 + 40.000 \cdot 40.000}/(10.000 \cdot 200 + 40.000 \cdot 100) = 0,01202.$$

Aufgabe 10 (Zusatzaufgabe II)

Die Höhe eines Schadens X sei exponentialverteilt mit dem Erwartungswert 20.

a) Berechnen Sie die Prämie nach dem Nullnutzenprinzip mit der Nutzenfunktion

$$u(x) = 100 \cdot (1 - e^{-\frac{x}{100}}).$$

b) Bestimmen Sie den Parameter β für den das Varianzprinzip die gleiche Bruttorisikoprämie ergibt wie das Nullnutzenprinzip gemäß a).

c) Zeigen Sie, dass das Ergebnis von b) den Zusammenhang zwischen dem Parameter a der Nutzenfunktion $u(x) = a \cdot (1 - e^{-\frac{x}{a}})$ und dem Parameter β des Varianzprinzips bestätigt.

d) Lösen Sie a) für den Fall einer Integralfranchise a = 10.

Lösung:

a) Die Prämie π ergibt sich in diesem Fall nach dem Exponentialprinzip

$$\pi = 100 \cdot ln\left(E\left[e^{X/100}\right]\right)$$

$$= 100 \cdot ln\left\{\int_0^\infty e^{x/100}\frac{1}{20}e^{-x/20}dx\right\}$$

$$= 100 \cdot ln\left\{\int_0^\infty \frac{1}{20}e^{-\frac{4}{100}x}dx\right\}$$

$$= 100 \cdot ln\left\{\frac{1}{20}\frac{100}{4}\right\}$$

$$= 22{,}31$$

b) $E[X] = 20$; $Var[X] = 400$

Prämie $\pi_V = 20 + \beta \cdot Var[X] = 20 + \beta \cdot 400 = 22{,}31$

Damit hat der Parameter β den Wert 2,31/400 = 0,005775

c) Das Ergebnis dokumentiert die enge Beziehung zwischen dem Exponential- und dem Varianzprinzip, wonach für den Faktor β des Varianzprinzips

$$\beta \approx -\frac{1}{2}\frac{u''(0)}{u'(0)} = -\frac{1}{2}\frac{0{,}01}{1} = 0{,}005$$

gilt.

d) $$\hat{X} = \begin{cases} 0; X < 10 \\ X; X \geq 10 \end{cases}$$

$$\pi_i = 100 \cdot ln\left(E\left[e^{X/100}\right]\right)$$

$$= 100 \cdot ln\left\{\int_0^{10} 1 \cdot \frac{1}{20}e^{-x/20}dx + \int_{10}^\infty e^{x/100}\frac{1}{20}e^{-x/20}dx\right\}$$

$$= 100 \cdot ln\left\{1 - e^{-10/20} + \int_{10}^\infty \frac{1}{20}e^{-\frac{4}{100}x}dx\right\}$$

$$= 100 \cdot ln\left\{1 - e^{-\frac{10}{20}} + \frac{1}{20}\frac{100}{4}e^{-\frac{4}{100}10}\right\}$$

$$= 20{,}81$$