1 Aufgabe (Risikomodelle)

Ein kollektiver Versicherungsvertrag erzeugt in einem Jahr N Schäden mit Schadenhöhen $\{X_k\}$, wobei alle Zufallsvariablen unabhängig sind. Die Verteilung von N ist gegeben durch

n	0	1	2	3
$\mathbb{P}[N=n]$	0.5	0.2	0.2	0.1

Die Schäden haben die Verteilung (in Einheiten von 1000 €)

x	5	10	20	100
$\mathbb{P}[X=x]$	0.4	0.3	0.2	0.1

(a) Berechnen Sie die Nettoprämie und die Varianz für das Risiko $S = \sum_{k=1}^N X_k$.

(b) Berechnen Sie die Nettoprämie für einen Vertrag, bei dem das Versicherungsunternehmen nur einen Schaden erstattet, unter der Annahme, dass der Versicherungsnehmer am Ende des Jahres den grössten eingetretenen Schaden meldet.
Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $N = 1, 2, 3$ jeweils getrennt.

Lösung:

(a) Nettoprämie und Varianz berechnen sich mit der Waldschen Formel. Wir haben

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N] &= 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.1 = 0.9 \;, \\ \operatorname{Var}[N] &= (-0.9)^2 \cdot 0.5 + (0.1)^2 \cdot 0.2 + (1.1)^2 \cdot 0.2 + (2.1)^2 \cdot 0.1 = 1.09 \;, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 5 \cdot 0.4 + 10 \cdot 0.3 + 20 \cdot 0.2 + 100 \cdot 0.1 = 19 \\ \operatorname{Var}[X] &= (-14)^2 \cdot 0.4 + (-9)^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.2 + 81^2 \cdot 0.1 = 759 \;. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich aus den Waldschen Formeln

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X] = 0.9 \cdot 19 = 17.1 \\ \operatorname{Var}[S] &= \mathbb{E}[N] \operatorname{Var}[X] + \operatorname{Var}[N]\mathbb{E}[X]^2 = 0.9 \cdot 759 + 1.09 \cdot 19^2 = 1076.59 \;. \end{aligned}$$

(b) Sei M der maximale Schaden. Treten drei Schäden auf, so kann der grösste Schaden ein, zwei oder dreimal auftreten, also

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[M = 100 \mid N = 3] &= 3 \cdot 0.1 \cdot 0.9^2 + 3 \cdot 0.1^2 \cdot 0.9 + 0.1^3 = 0.271 \; , \\
\mathbb{P}[M = 20 \mid N = 3] &= 3 \cdot 0.2 \cdot 0.7^2 + 3 \cdot 0.2^2 \cdot 0.7 + 0.2^3 = 0.386 \; , \\
\mathbb{P}[M = 10 \mid N = 3] &= 3 \cdot 0.3 \cdot 0.4^2 + 3 \cdot 0.3^2 \cdot 0.4 + 0.3^3 = 0.279 \; , \\
\mathbb{P}[M = 5 \mid N = 3] &= 0.4^3 = 0.064 \; .
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\mathbb{E}[M \mid N = 3] = 0.271 \cdot 100 + 0.386 \cdot 20 + 0.279 \cdot 10 + 0.064 \cdot 5 = 37.93 \; .$$

Treten 2 Schäden auf, erhalten wir analog

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[M = 100 \mid N = 2] &= 2 \cdot 0.1 \cdot 0.9 + 0.1^2 = 0.19 \; , \\
\mathbb{P}[M = 20 \mid N = 2] &= 2 \cdot 0.2 \cdot 0.7 + 0.2^2 = 0.32 \; , \\
\mathbb{P}[M = 10 \mid N = 2] &= 2 \cdot 0.3 \cdot 0.4 + 0.3^2 = 0.33 \; , \\
\mathbb{P}[M = 5 \mid N = 2] &= 0.4^2 = 0.16 \; .
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[M \mid N = 2] = 0.19 \cdot 100 + 0.32 \cdot 20 + 0.33 \cdot 10 + 0.16 \cdot 5 = 29.5 \; .$$

Es ist klar, dass $\mathbb{E}[M \mid N = 1] = \mathbb{E}[X] = 19$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M] &= \mathbb{E}[M \mid N = 1]\mathbb{P}[N = 1] + \mathbb{E}[M \mid N = 2]\mathbb{P}[N = 2] \\
&\quad + \mathbb{E}[M \mid N = 3]\mathbb{P}[N = 3] \\
&= 0.2 \cdot 19 + 0.2 \cdot 29.5 + 0.1 \cdot 37.93 = 13.493 \; .
\end{aligned}$$

2 Aufgabe (Risikomodelle)

Eine Beratungsfirma modelliert eine Versicherungssparte als kollektives Modell $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ mit N Schäden und Schadenhöhen X_k, wobei alle Zufallsvariablen unabhängig sind. Die Schadenzahl N hat die Poisson-Verteilung mit Erwartungswert $\lambda = 3$, und die Schadenhöhen sind lognormal LN(0.5,9) verteilt mit Dichte

$$f(x) = \frac{1}{3x\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{-\frac{(\ln x - 0.5)^2}{18}\Big\} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \ .$$

Um das Risikokapital für diese Versicherungssparte zu bestimmen, braucht man den VaR zum Niveau 99.5%, das heisst, den Wert K für den $\mathbb{P}[S \leq K] = 0.995$. Als Vereinfachung approximiert die Beratungsfirma die Verteilung des Gesamtschadens S als Lognormalverteilung mit dem gleichen Erwartungswert und der gleichen Varianz wie S. Berechnen Sie das Risikokapital auf Basis der Lognormalapproximation.

Lösung:

Aus der Formelsammlung finden wir den Erwartungswert der Lognormalverteilung $\mathbb{E}[X] = \exp\{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\} = 148.41$ und die Varianz $\exp\{2\mu + \sigma^2\}(\exp\{\sigma^2\} - 1) = 178\,460\,274$. Dies gibt das zweite Moment $\mathbb{E}[X^2] = \exp\{2\mu + 2\sigma^2\} = 178\,482\,300$. Für die zusammengesetzte Poissonverteilung S erhalten wir somit Mittelwert $\mathbb{E}[S] = \lambda\mathbb{E}[X] = \lambda \exp\{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\} = 445.239$ und die Varianz $\mathrm{Var}[S] = \lambda\mathbb{E}[X^2] = \lambda \exp\{2\mu + 2\sigma^2\} = 535\,446\,903$. Bezeichnen wir die Parameter der Approximation mit m und s^2. Dann erhalten wir

$$\exp\{s^2\} - 1 = \frac{\mathrm{Var}[S]}{\mathbb{E}[S]^2} = \frac{\lambda \exp\{2\mu + 2\sigma^2\}}{\lambda^2 \exp\{2\mu + \sigma^2\}} = \frac{\exp\{\sigma^2\}}{\lambda} = 2701 \ .$$

Das ist $s^2 = \ln(1 + \lambda^{-1} \exp\{\sigma^2\}) = 7.902$. Der zweite Parameter erhalten wir aus $\exp\{m + \frac{1}{2}s^2\} = \lambda \exp\{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\}$, also

$$\mathrm{e}^m = \lambda \exp\{\mu + \tfrac{1}{2}\sigma^2\}/\sqrt{1 + \lambda^{-1} \exp\{\sigma^2\}} = \sqrt{\frac{\lambda^3 \exp\{2\mu\}}{1 + \lambda \exp\{-\sigma^2\}}} = 8.565 \ ,$$

das heisst, $m = \frac{1}{2}[3 \ln \lambda + 2\mu - \ln(1 + \lambda \exp\{-\sigma^2\})] = 2.148$. Für den VaR benötigen wir das 99.5%-Quantil der Normalverteilung. In der Formelsammlung finden wir 2.58. Der gesuchte Wert wird also $\ln K = m + 2.58s$, also

$$K = \sqrt{\frac{\lambda^3 \exp\{2\mu\}}{1 + \lambda \exp\{-\sigma^2\}}} \exp\{2.58\sqrt{1 + \lambda^{-1} \exp\{\sigma^2\}} = 12\,090 \ .$$

3 Aufgabe (Tarifierung)

Ein Versicherungsunternehmen will ein Risiko X mit dem Erwartungswert 500 und der Standardabweichung 288,68 tarifieren.

a) Berechnen Sie für den Fall, dass die Verteilung von X nicht bekannt ist, die Deckungssumme v_a mit Hilfe der Ungleichung von Cantelli so, dass Schäden mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,96 voll gedeckt sind, d.h., mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens in 0,04 wird nur die Deckungssumme geleistet.

b) Berechnen Sie für den Fall, dass X (0, 1.000)-gleichverteilt ist, die Deckungssumme v_b so, dass Schäden mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,96 voll gedeckt sind.

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse von a) und b).

d) Berechnen Sie im Fall b) die Nettorisikoprämie.

e) Berechnen Sie im Fall b) die Bruttorisikoprämie, nach dem Standardabweichungsprinzip mit dem Parameter $\alpha = 0{,}1$.

Lösung

a) Mit dem Erwartungswert $\mu = 500$ und der Standardabweichung $\sigma = 288{,}68$ von X gilt nach der Ungleichung von Cantelli für $k^2 + 1 = 25$ und damit für $k = 4{,}899$

$$\mathrm{P}\left[X \geq 500 + 4{,}899 \cdot 288{,}68\right] \leq \frac{1}{5^2 + 1} = 0{,}04$$

und folglich die Deckungssumme $v_a = 500 + 4{,}889 \cdot 288{,}68 = 1.914{,}24$.

b) Falls bekannt ist, dass X (0, 1.000)-gleichverteilt ist (Erwartungswert 500), ergibt sich die Deckungssumme v_b aus der Gleichung

$$P\left[X \geq v_b\right] = 0{,}04 = \int_{v_b}^{1.000} 0{,}001\, dx = 0{,}001 \cdot (1.000 - v_b)\,,$$

und damit $v_b = 1.000 - 40 = 960$.

c) Die Standardabweichung bei b) ist $\sigma = (1.000^2/12)^{0{,}5} = 288{,}68$ und damit gleich groß wie bei a). Die Abschätzung nach Cantelli liefert im Vergleich zum Fall b) mit einer bekannten Verteilung ein schlechteres – hier sogar irrelevantes – Ergebnis.

d) Für die Entschädigung X_b gilt:

$$\mathrm{E}\left[X_b\right] = \mathrm{E}\left[X\right] - \int_{v_b}^{1.000} 0{,}001 \cdot (x - v_b)\, dx = 500 - \int_{0}^{1.000 - v_b} 0{,}001 \cdot x\, dx = 500 - \tfrac{1}{2} 0{,}001 \cdot \left(1.000 - 960\right)^2$$

$$= 499{,}2$$

e) Die Varianz beträgt bei der Begrenzung der Entschädigung auf die Deckungssumme v_b :

$$\mathrm{Var}\left(X_b\right) = \int_0^{v_b} 0{,}001 x^2 dx + v_b^2 \int_{v_b}^{1.000} 0{,}001 dx - E(X_b)^2 = 0{,}001 \cdot \tfrac{1}{3} 960^3 + 0{,}001 \cdot 960^2 \cdot 40 - 499{,}2^2$$

$$= 82.575{,}36$$

($\mathrm{Var}(X_b)$ ist damit etwas kleiner als $\mathrm{Var}(X) = 1.000^2/12 = 83.333{,}33$)

Die Bruttorisikoprämie $H(X_b)$ nach dem Standardabweichungsprinzip mit dem Parameter α =0,1 beträgt folglich

$H(X_b) = 499{,}2 + 0{,}1 \cdot 82.575{,}34^{0,5} = 527{,}94$.

4 Aufgabe (Tarifierung)

Das Bonus-Malus-System eines Versicherungsunternehmens hat die 3 Klassen 0, 1 und 2. Einstiegsklasse ist die Klasse 0 mit der Basisprämie *BP* (nach dem Nettorisikoprinzip). Bei einem schadenfreien Verlauf wird ein Versicherungsnehmer im Folgejahr eine Klasse höher eingestuft oder er bleibt in der höchsten Klasse 2. Im Schadenfall wird er im Folgejahr in die Klasse 0 eingestuft. In den (Schadenfreiheits-)Klassen 1 und 2 erhalten die Versicherungsnehmer einen Rabatt von 10% bzw. 20% auf die Basisprämie *BP*.

Dem Versicherungsunternehmen ist bekannt, dass sein Kollektiv zu 40% aus Versicherungsnehmern des Typs A und zu 60% aus Versicherungsnehmern des Typs B besteht. Ein Versicherungsnehmer des Typs A bleibt im Lauf eines Jahres mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 schadenfrei; ein Versicherungsnehmer des Typs B mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5. Die Schadenereignisse treten unabhängig voneinander auf. Im Schadenfall beträgt der Erwartungswert des Jahresgesamtschadens 1.000.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert des Schadenbedarfs.
b) Berechnen Sie die Verteilung der Versicherungsnehmer des Typs A und B auf die Klassen 0, 1 und 2 drei Jahre nach ihrem Einstieg in die Klasse 0.
c) Zeigen Sie, dass sich diese Verteilung nach drei Jahren nicht mehr ändert.
d) Berechnen Sie die Basisprämie *BP* für den stationären Fall.
Hinweis: *BP* ist so zu bestimmen, dass der Erwartungswert der Prämieneinnahme ab dem 4. Jahr gleich dem Erwartungswert der Schadenzahlungen ist.

Lösung

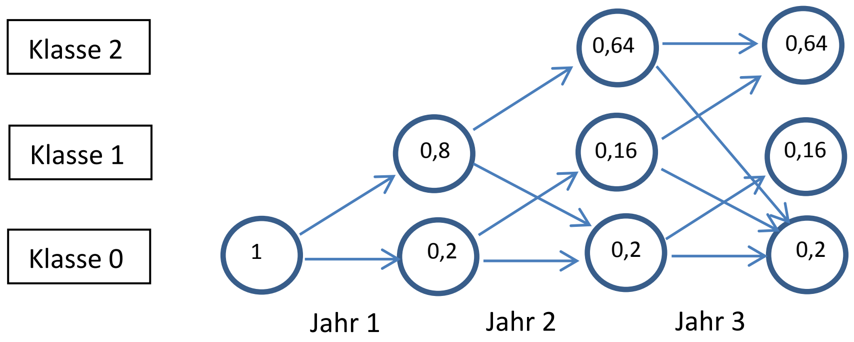
a) Der Erwartungswert des Schadenbedarfs ist der gemäß der Zusammensetzung des Kollektivs gewichtete Erwartungswert des Jahresgesamtschadens eines beliebig herausgegriffenen Versicherungsnehmers, von dem nicht bekannt ist, ob er zum Typ A oder B gehört:

$$0{,}4 \cdot (0{,}2 \cdot 1.000) + 0{,}6 \cdot (0{,}5 \cdot 1.000) = 380$$

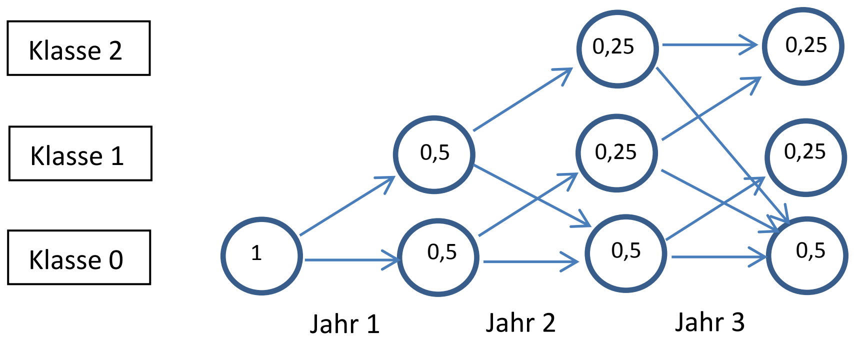
Dies ist die gewichtete Summe der Gesamtschadenerwartungswerte der Versicherungsnehmer des Typs A und B.

b) Mit Hilfe des Markovgraphen der Zugehörigkeit der Versicherungsnehmer in den ersten vier Jahren, d.h. nach Ablauf der ersten 3 Jahre, erhält man für die verschiedenen Typen:

Typ A



Typ B



Anmerkung: Einfacher und eleganter kann die Aufgabe mit Hilfe von Übergangsmatrizen und Zustandsvektoren gelöst werden

c) Nach dem 2. Jahr ändert sich die Verteilung nicht mehr. Bereits nach 2 Jahren ist also die stationäre Verteilung erreicht.

d) Bei der Berechnung der *BP* ist zu beachten, wie sich die Versicherungsnehmer der Typen A und B auf die drei Klassen verteilen, in denen unterschiedliche Rabatte gewährt werden.

Es gilt die Äquivalenz des Erwartungswerts von Beitrags- und Schadenzahlungen, summiert über die drei Klassen:

$$\begin{aligned} 380 = {} & 0{,}4 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}8 \cdot BP + 0{,}6 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}8 \cdot BP \\ & + 0{,}4 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}9 \cdot BP + 0{,}6 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}9 \cdot BP \\ & + 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot BP + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot BP \\ = {} & 0{,}8974 \cdot BP \end{aligned}$$

Damit ist *BP* = 423,45 die gesuchte Basisprämie.

Aufgabe 5 (Schadenreservierung)

Das folgende Abwicklungsdreieck für Zuwächse enthält für die Anfalljahre 2007 bis 2010 die Prämien und die Schadenzahlungen in den Abwicklungsjahren 0 bis 3:

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2007	170	108	56	18	400
2008	190	112	52		400
2009	200	104			400
2010	178				440

Es wird angenommen, dass ein Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse vorliegt und dass alle Schäden bis zum Ende des Abwicklungsjahres 3 vollständig abgewickelt werden.

Hinweis: Nehmen Sie keine Rundungen vor.

(a) Berechnen Sie die additiven Schadenquotenzuwächse und schätzen Sie die (für alle Anfalljahre identische) erwartete Endschadenquote.

(b) Schätzen Sie unter Verwendung der Prämien die Abwicklungsmuster für Anteile und für (Abwicklungs–)Quoten.

(c) Schätzen Sie mit dem additiven Verfahren die Reserve für 2010.

(d) Schätzen Sie mit dem additiven Verfahren den Endschadenstand $S_{2010,3}$ für 2010.

(e) Man könnte daran denken, zur Schätzung der erwarteten Endschadenquote den Schätzer

$$\widehat{\kappa} := \frac{\sum_{i=2007}^{2010} \widehat{S}_{i,3}^{\text{AD}}}{\sum_{i=2007}^{2010} \pi_i}$$

(mit $\widehat{S}_{2007,3}^{\text{AD}} := S_{2007,3}$) zu verwenden. Beurteilen Sie diesen Schätzer im Hinblick auf (a).

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}} &= \frac{18}{400} &&= 0,045 \\
\widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}} &= \frac{56+52}{400+400} &&= 0,135 \\
\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}} &= \frac{108+112+104}{400+400+400} &&= 0,270 \\
\widehat{\zeta}_0^{\mathrm{AD}} &= \frac{170+190+200+178}{400+400+400+440} &&= 0,450
\end{aligned}$$

und damit

$$\widehat{\kappa}^{\mathrm{AD}} = \sum_{k=0}^{3} \widehat{\zeta}_k^{\mathrm{AD}} = 0,450+0,270+0,135+0,045 = 0,900$$

(b) Es gilt $\widehat{\vartheta}_k^{\mathrm{AD}} = \widehat{\zeta}_k^{\mathrm{AD}} / \widehat{\kappa}^{\mathrm{AD}}$ und damit

$$\begin{aligned}
\widehat{\vartheta}_0^{\mathrm{AD}} &= 0,450/0,900 &&= 0,50 \\
\widehat{\vartheta}_1^{\mathrm{AD}} &= 0,270/0,900 &&= 0,30 \\
\widehat{\vartheta}_2^{\mathrm{AD}} &= 0,135/0,900 &&= 0,15 \\
\widehat{\vartheta}_3^{\mathrm{AD}} &= 0,045/0,900 &&= 0,05
\end{aligned}$$

Mit $\widehat{\gamma}_k^{\mathrm{AD}} = \sum_{l=0}^{k} \widehat{\vartheta}_l^{\mathrm{AD}}$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_0^{\mathrm{AD}} &= 0,50 \\
\widehat{\gamma}_1^{\mathrm{AD}} &= 0,50+0,30 = 0,80 \\
\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{AD}} &= 0,50+0,30+0,15 = 0,95 \\
\widehat{\gamma}_3^{\mathrm{AD}} &= 1
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_{2010}^{\mathrm{AD}} &= \sum_{k=1}^{3} \widehat{Z}_{2010,k}^{\mathrm{AD}} = \sum_{k=1}^{3} \widehat{\zeta}_k^{\mathrm{AD}} \pi_{2010} \\
&= \Big(0,270+0,135+0,045\Big) \times 440 = 198
\end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$\widehat{S}_{2010,3}^{\mathrm{AD}} = S_{2010,0} + \widehat{R}_{2010}^{\mathrm{AD}} = 178+198 = 376$$

(e) Es gilt (in allgemeiner Notation mit $n := 3$ und $j := i - 2007$)

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \widehat{S}_{j,n}^{\mathrm{AD}} &= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-j} Z_{j,k} + \sum_{k=n-j+1}^{n} \widehat{Z}_{j,k}^{\mathrm{AD}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,k} + \sum_{j=n-k+1}^{n} \widehat{Z}_{j,k}^{\mathrm{AD}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\widehat{\zeta}_{k}^{\mathrm{AD}} \sum_{j=0}^{n-k} \pi_j + \sum_{j=n-k+1}^{n} \widehat{\zeta}_{k}^{\mathrm{AD}} \pi_j \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \widehat{\zeta}_{k}^{\mathrm{AD}} \sum_{j=0}^{n} \pi_j
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\widehat{\kappa} &= \frac{\sum_{j=0}^{n} \widehat{S}_{j,n}^{\mathrm{AD}}}{\sum_{j=0}^{n} \pi_j} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \widehat{\zeta}_{k}^{\mathrm{AD}} \\
&= \widehat{\kappa}^{\mathrm{AD}}
\end{aligned}
$$

Der Schätzer $\widehat{\kappa}$ stimmt daher mit dem unter (a) verwendeten Schätzer $\widehat{\kappa}^{\mathrm{AD}}$ überein.

Aufgabe 6 (Schadenreservierung)

Das folgende Abwicklungsdreieck für Zuwächse enthält die Prämien für die Anfalljahre 2007 bis 2010, die Schadenzahlungen für die Anfalljahre 2007 bis 2010 in den Abwicklungsjahren 0 bis 3 sowie externe Schätzer für das Abwicklungsmuster für Anteile:

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2007	133	67	30	14	270
2008	142	68	75		270
2009	160	61			310
2010	150				350
$\widehat{\vartheta}_k^{\text{extern}}$	0,60	0,25	0,10	0,05	

(a) Schätzen Sie die Reserve für 2012 mit dem Loss–Development Verfahren.

(b) Schätzen Sie die Reserve für 2012 mit dem Cape–Cod Verfahren.

(c) Schätzen Sie die Reserve für 2012 mit dem Bornhuetter–Ferguson Verfahren unter der Annahme, dass die erwartete Endschadenquote κ für alle Anfalljahre gleich ist, und unter Verwendung des externen Schätzwertes $\widehat{\kappa}^{\text{extern}} = 0,81$.

(d) Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Lösung:

(a) Für das Loss–Development Verfahren werden die aktuellen Schadenstände sowie die externen Schätzer des Abwicklungsmusters für Quoten benötigt:

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2007				244	270
2008			285		270
2009		221			310
2010	150				350
$\widehat{\gamma}_k^{\text{extern}}$	0,60	0,85	0,95	1,00	

Für die Schätzung der Reserve für 2012 werden die Loss–Development Schätzer der Endschadenstände für 2009 und 2010 benötigt. Man erhält

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_{2009}^{\text{LD}} &= \widehat{S}_{2009,3}^{\text{LD}} = S_{2009,1}/\widehat{\gamma}_1^{\text{extern}} = 221/0,85 = 260 \\ \widehat{\alpha}_{2010}^{\text{LD}} &= \widehat{S}_{2010,3}^{\text{LD}} = S_{2010,0}/\widehat{\gamma}_0^{\text{extern}} = 150/0,60 = 250 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{2012}^{\text{LD}} &= \widehat{Z}_{2010,2}^{\text{LD}} + \widehat{Z}_{2009,3}^{\text{LD}} = \widehat{\vartheta}_2^{\text{extern}}\widehat{\alpha}_{2010}^{\text{LD}} + \widehat{\vartheta}_3^{\text{extern}}\widehat{\alpha}_{2009}^{\text{LD}} \\ &= 0,10 \times 250 + 0,05 \times 260 = 38 \end{aligned}$$

(b) Für das Cape–Cod Verfahren wird die Cape–Cod Schadenquote $\widehat{\kappa}^{\text{CC}}$ benötigt. Dazu bestimmt man zunächst die verbrauchten Prämien $\widehat{\gamma}_k^{\text{extern}}\pi_{2010-k}$:

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2007				270	270
2008			256,5		270
2009		263,5			310
2010	210				350
$\widehat{\gamma}_k^{\text{extern}}$	0,60	0,85	0,95	1,00	

Daraus ergibt sich

$$\widehat{\kappa}^{\text{CC}} = \frac{\sum_{k=0}^{3} S_{2010-k,k}}{\sum_{k=0}^{3} \widehat{\gamma}_k^{\text{extern}}\pi_{2010-k}} = \frac{150+221+285+244}{210+263,5+256,5+270} = 0,9$$

und für die a–priori Schätzer $\widehat{\alpha}_i^{\text{CC}} = \widehat{\kappa}^{\text{CC}}\pi_i$ der erwarteten Endschadenstände erhält man

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_{2009}^{\text{CC}} &= \widehat{S}_{2009,3}^{\text{CC}} = \widehat{\kappa}^{\text{CC}}\pi_{2009} = 0,9 \times 310 = 279 \\ \widehat{\alpha}_{2010}^{\text{CC}} &= \widehat{S}_{2010,3}^{\text{CC}} = \widehat{\kappa}^{\text{CC}}\pi_{2010} = 0,9 \times 350 = 315 \end{aligned}$$

Für die Reserve für 2012 ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\widehat{R}^{\mathrm{CC}}_{2012} &= \widehat{Z}^{\mathrm{CC}}_{2010,2} + \widehat{Z}^{\mathrm{CC}}_{2009,3} = \widehat{\vartheta}^{\mathrm{extern}}_{2}\widehat{\alpha}^{\mathrm{CC}}_{2010} + \widehat{\vartheta}^{\mathrm{extern}}_{3}\widehat{\alpha}^{\mathrm{CC}}_{2009} \\ &= 0,10 \times 315 + 0,05 \times 279 = 45,45\end{aligned}$$

(c) Beim Bornhuetter–Ferguson Verfahren sind als a–priori Schätzer der erwarteten Endschadenstände die Schätzer $\widehat{\alpha}^{\mathrm{extern}}_{i} = \widehat{\kappa}^{\mathrm{extern}}\pi_i$ zu verwenden. Wegen

$$\frac{\widehat{\kappa}^{\mathrm{extern}}}{\widehat{\kappa}^{\mathrm{CC}}} = \frac{0,81}{0,9} = 0,9$$

ergibt sich sofort

$$\widehat{R}^{\mathrm{BF}}_{2012} = 0,9\,\widehat{R}^{\mathrm{CC}}_{2012} = 0,9 \times 45,45 = 40,905$$

(d) Die Reserve für 2012 ist beim Loss–Development Verfahren am niedrigsten und beim Cape–Cod Verfahren am höchsten. Der Ausreißer $S_{2008,2}$ wirkt sich beim Loss–Development Verfahren auf die Reserve für 2012 nicht aus, da das Anfalljahr 2008 bereits Ende 2011 abgewickelt ist und externe Schätzer für das Abwicklungsmuster verwendet werden. Der Ausreißer $S_{2008,2}$ wirkt sich dagegen beim Cape–Cod Verfahren über die Cape–Cod Schadenquote aus. Außerdem gehen die niedrigen Prämien für 2007 und 2008 mit einem hohen Gewicht in die Cape–Cod Schadenquote ein.

7 Aufgabe (Rückversicherung und Risikoteilung)

Ein Rückversicherer bietet seinem Zedenten in der Hagelversicherung eine Stop-Loss Rückversicherung mit Priorität a und Haftung h an. Für die Hagel-Jahresschadenquote X wird angenommen, dass X eine um $x_0 < a$ nach rechts verschobene Exponentialverteilung besitzt.

(a) Geben Sie eine allgemeine Formel für die Schadenerwartung des Stop-Loss Rückversicherers in Prozent der Jahresprämieneinnahme des gedeckten Portfolios an.

(b) Bestimmen Sie die Stop-Loss-Schadenerwartung gemäß (a) für den speziellen Fall

$$a = 95\%, h = 45\%, E(X) = 90\% \text{ und } Var(X) = (40\%)^2.$$

Alle diese Werte sind Prozentangaben der Jahresprämieneinnahme des gedeckten Portfolios.

Lösung

(a) X besitzt die Verteilungsfunktion $F(x) = \left(1 - e^{-\lambda(x-x_0)}\right)1_{[x_0,\infty)}(x) \qquad (x \epsilon \mathbb{R})$

Damit gilt für die Schadenerwartung des Stop-Loss-Vertrags

$$E\Big(\min\big(\max(X-a,0),h\big)\Big) = \int_a^{a+h}\big(1-F(x)\big)dx = \int_a^{a+h} e^{-\lambda(x-x_o)}\,dx = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(a-x_o)}\left(1-e^{-\lambda h}\right)$$

(b) Aus $E(X) = \frac{1}{\lambda} + x_0 = 0.9$ und $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = (0.4)^2$ folgt $\frac{1}{\lambda} = 0.4$ und $x_0 = 0.5$.

Damit gilt für die Schadenerwartung des Stop-Loss-Vertrags

$$E\Big(\min\big(\max(X-0.95,0),0.45\big)\Big) = 0.4e^{-2.5\cdot 0.45}\left(1-e^{-2.5\cdot 0.45}\right) = 8.77\%$$

8 Aufgabe (Rückversicherung und Risikoteilung)

Für die Exzess-Schadenlast $S = \sum_{i=1}^{N} max\ (X_i - a,\ 0)$ einer unlimitierten Schadenexzedentenrückversicherung erwartet ein Rückversicherer einen Betrag von 4 (burning cost). Hierfür möchte er mit dem Zedenten ein variables Entgelt, eine sogenannte Gleitprämie P

$$P = m + min(S, M) - min(S, m)$$

mit einem Mindestentgelt von $m = 3$ und einem Höchstentgelt M $(M > m)$ vereinbaren. Sicherheitszuschläge sollen unberücksichtigt bleiben. Ferner soll der Zedent im Mittel natürlich nicht mehr bezahlen, als wenn ein Festpreis vereinbart wäre.

(a) Beschreiben Sie die Wirkung der Gleitprämie.

(b) Berechnen Sie die Höhe des Höchstentgelts unter der Annahme, dass gilt:

$S \sim 0{,}2\delta_0 + 0{,}8Par_0(5,b)$ mit einem geeigneten $b > 1$,

d.h. $P(S=0) = 0{,}2$ und $P(S > x) = 0{,}8\left(\frac{5}{5+x}\right)^b \quad (x \geq 0)$.

Lösung

(a) $$P = \begin{cases} m & \text{falls } S < m \\ S & \text{falls } m \le S \le M \\ M & \text{falls } S > M \end{cases}$$

Anstelle einer Festprämie von $E(S)$ zahlt der EVer dem RVer einen von der Schadenquote des Ereignisjahres abhängigen Betrag. Hierzu wird eine Vorausprämie festgelegt, die sich aus der Minimalprämie von *m* ergibt und im Laufe der Abwicklung adjustiert wird, maximal bis zum Betrag von *M*.

(b) Es gilt $E(S) = 0{,}8\int_0^{\infty}\left(\frac{5}{5+x}\right)^{b} dx = 0{,}8\frac{5}{b-1}$ Wegen $E(S) = 4$ folgt $b = 2$.

Folglich gilt

$$E\left(\min\left(S, m\right)\right) = \int_0^{m} P(S > x)\, dx = 20\int_0^{m}\left(x+5\right)^{-2} dx = 4\left(1 - \frac{5}{5+m}\right) = 1{,}5$$

Aus $E(P) = E(S) = 4$ folgt

$$m + E\left(\min\left(S, M\right)\right) - E\left(\min\left(S, m\right)\right) = 3 + 4\left(1 - \frac{5}{5+M}\right) - \frac{3}{2} = 4$$

also $M = \frac{40}{3} - 5 \approx 8{,}3$.

9 Aufgabe (Zusatzaufgabe I)

Der Gesamtschaden *S* eines Portfolios eines Erstversicherers wird im kollektiven Modell durch $S = X_1 + ... + X_N$ beschrieben, wobei $N, X_1, X_2, ...$ stochastisch unabhängig sind mit
$P(N = 0) = 0{,}5$; $P(N = 1) = 0{,}2$;
$P(N = 2) = P(N = 3) = P(N = 4) = P(N = 5) = P(N = 6) = P(N = 16) = 0{,}05$;
$P(X_i = 100) = P(X_i = 200) = 0{,}4$; $P(X_i = 400) = P(X_i = 600) = 0{,}1$.

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von *S*.
b) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für den Einzelschadenexzedenten-Rückversicherungsvertrag mit Priorität 200.

Lösung

Wir schreiben *X* für X_i.

a) $E[N] = 0{,}2 + (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 16)\cdot 0{,}05 = 2$,
$Var(N) = E[N^2] - E[N]^2 = 0{,}2 + (4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 256)\cdot 0{,}05 – 4 = 17{,}5 – 4 = 13{,}5$.

$E[X] = 0{,}4\cdot(100 + 200) + 0.1\cdot(400 + 600) = 220$,
$Var(X) = 23.600$.

$E[S] = E[X]\cdot E[N] = 440$,
$Var(S) = E[N] \cdot Var(X) + E[X]^2\cdot Var(N) = 700.600$.

b) $Z = max(X - 200;\ 0)$: $E[Z] = (200 + 400)\cdot 0{,}1 = 60$,
Nettorisikoprämie $= E[N]\cdot E[Z] = 120$.

10 Aufgabe (Zusatzaufgabe II)

Ein Rückversicherer modelliert die Schäden (in Mio Euro) von Sturmkatastrophen durch die Paretoverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{b}{a}\left(\frac{a}{x}\right)^{b+1} \mathbb{1}_{(a,\infty)}(x) \ .$$

Es wird angenommen, dass die Schäden unabhängig sind. Für die Logarithmen der Schäden gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln X_k = 7.71 \quad \text{und} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\ln X_k)^2 = 60.06 \ .$$

Der maximale Schaden ist $X_{\mathrm{M}} = 54\,740$. Der Rückversicherer möchte die erwartete Höhe eines neuen Rekordes schätzen, das heisst, den Erwartungswert eines Schadens, der höher als X_{M} ist.

(a) Schätzen Sie die Parameter a und b (mit der Momentenmethode für $\ln X_k$). **Hinweis:** Substituieren Sie $z = \ln x$ in der Berechnung der Momente.

(b) Nehmen Sie an, dass die Sturmschäden Paretoverteilt mit den geschätzten Parameters $\hat{a}$ und $\hat{b}$ sind. Wie hoch wird ein neuer Rekord im Mittel?

Lösung:

(a) Der Erwartungswert von $\ln X$ wird

$$\int_a^\infty \frac{a^b b \ln x}{x^{b+1}}\, \mathrm{d}x = a^b \int_{\ln a}^\infty z b \mathrm{e}^{-(b+1)z} \mathrm{e}^z \, \mathrm{d}z = \ln a + \frac{1}{b} \ .$$

Für das zweite Moment von $\ln x$ finden wir

$$\begin{aligned}\int_a^\infty \frac{a^b b (\ln x)^2}{x^{b+1}}\, \mathrm{d}x = a^b \int_{\ln a}^\infty z^2 b \mathrm{e}^{-(b+1)z} \mathrm{e}^z \, \mathrm{d}z &= (\ln a)^2 + \frac{2}{b}\big(\ln a + \frac{1}{b}\big) \\ &= \frac{1}{b^2} + \big(\ln a + \frac{1}{b}\big)^2 \ .\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir den Schätzer

$$\hat{b} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(\ln X_k)^2 - \big(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\ln X_k\big)^2}} = 1.274$$

und

$$\hat{a} = \exp\Bigl\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \ln X_k - \frac{1}{\hat{b}}\Bigr\} = 1017.47\ .$$

(b) Wir haben $\mathbb{P}[X > x] = a^b x^{-b}$ für $x > a$. Also ist für $x > m = X_M > a$

$$\mathbb{P}[X > x \mid X > m] = \frac{a^b x^{-b}}{a^b m^{-b}} = m^b x^{-b}\ .$$

Das heisst, bedingt auf $X > m$ ist X Paretoverteilt mit Parameter m und b. Damit ergibt sich für den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[X \mid X > m] = mb/(b-1)$. Setzen wir $b = \hat{b}$, ergibt sich der Erwartungswert für einen neuen Rekord

$$\frac{54\,740 \cdot 1.274}{0.274} \approx 254\,521\ .$$