Blätter DGVFM (2010) 31: 395–410
DOI 10.1007/s11857-010-0117-z

ACTUARIAL EXAMS

Klausur zum Grundwissen Schadenversicherungsmathematik

Christian Hipp · Martin Morlock · Hanspeter Schmidli · Klaus D. Schmidt

Eingegangen: 1. September 2010 / Angenommen: 1. September 2010 / Online publiziert: 5. Oktober 2010

Die Prüfung zum Grundwissen Schadenversicherungsmathematik wurde im Mai 2010 in Köln durchgeführt. Dabei waren 273 Teilnehmer zu verzeichnen.

Die Klausur besteht aus 8 Aufgaben und zwei Zusatzaufgaben. Eine oder zwei Zusatzaufgaben werden nur gewertet, wenn eine bzw. zwei der anderen Aufgaben nicht bearbeitet oder als nicht bearbeitet gekennzeichnet werden. Bei jeder Aufgabe sind maximal 15 Punkte zu erreichen. Insgesamt sind damit maximal 120 Punkte möglich. Zum Bestehen der Klausur reichen 48 Punkte.

Zugelassen sind die klassische Formelsammlung, die beigefügt ist, sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner. Antworten sind zu begründen. Bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

1 Aufgabe (Risikomodelle)

Ein kollektiver Versicherungsvertrag erzeugt in einem Jahr N Schäden mit Schadenshöhen $\{X_k\}$, wobei alle Variablen stochastisch unabhängig sind. Die Verteilung von N ist gegeben durch

$$\mathrm{P}[N = n] = \frac{q^{n+1}}{-(n+1)\ln(1-q)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

wobei $q = 0{,}1931$. Es gilt $\mathrm{var}[N] = 0{,}13823$. Die Schäden sind identisch $\Gamma(0{,}5, 0{,}5)$ verteilt.

(a) Berechnen Sie die Nettoprämie und die Varianz für das Risiko $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$.

Martin Morlock, Giessen, Deutschland, e-mail: martin.e.morlock@wirtschaft.uni-giessen.de

(b) Die Aufsicht verlangt ein Sicherheitskapital, das ausreicht, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% den jährlichen Schaden decken zu können. Berechnen Sie mit Hilfe einer Normalapproximation das benötigte Kapital.
(c) Würden Sie als Mitglied der Aufsicht das in (b) bestimmte Kapital akzeptieren? Begründen Sie Ihre Meinung.

Hinweis: Es gilt $\mathrm{P}[N=0]=0{,}9$. Berechnen Sie $\mathrm{E}[N+1]$.

1.1 Lösung

(a) Der Erwartungswert von N ist

$$\mathrm{E}[N]=\mathrm{E}[N+1]-1=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{q^{n+1}}{-(n+1)\ln(1-q)}-1$$
$$=\frac{q}{-(1-q)\ln(1-q)}-1=\frac{0{,}9}{1-0{,}1931}-1=0{,}11538.$$

Für die Schäden erhalten wir aus der Formelsammlung den Mittelwert 1 und die Varianz 2. Aus den Wald'schen Formeln ergibt dies für die Nettoprämie

$$\mathrm{E}[S]=\mathrm{E}[N]\mathrm{E}[X_i]=0{,}11538\cdot 1=0{,}11538,$$

und für die Varianz

$$\mathrm{var}[S]=\mathrm{E}[N]\mathrm{var}[X_i]+\mathrm{var}[N]\mathrm{E}[X_i]^2=0{,}11538\cdot 2+0{,}13823\cdot 1^2=0{,}36899.$$

(b) Die Standardabweichung ist $\sqrt{0{,}36899}=0{,}607445$. Also approximieren wir $(S-0{,}11538)/0{,}607445$ mit einer Normalverteilung. Das 99%-Quantil ist 2,33. Also ist das gesuchte Sicherheitskapital $0{,}11538+2{,}33\cdot 0{,}607445=1{,}53073$.
(c) Die Standardabweichung ist über 5 Mal so großwie der Mittelwert. Daher wird die Normalapproximation relativ viel Masse für negative Werte verwenden $\Phi(-0{,}11538/0{,}607445)\approx\Phi(-0{,}190)=0{,}424655$. Dies deutet darauf hin, dass wahrscheinlich die Schiefe relativ groß wird (genauer Wert $1{,}94617/0{,}607445^3=8{,}6828$). In diesem Fall liefert die Normalverteilung keine gute Approximation. Zum Beispiel liefert eine verschobene Gamma-Approximation den Wert 2,95, also fast das doppelte Risikokapital.

2 Aufgabe (Risikomodelle)

Eine Aktuarin soll ein Versicherungsportfolio modellieren. Sie erhält dazu die folgenden Angaben. Aus früheren Jahren sind $n=47$ Schäden $(X_1,\dots,X_{47})$ in Einheiten von 1000 Euro bekannt. Die Aktuarin erhält weiter die folgenden statischen Werte: $\sum_{k=1}^{n}X_k=553{,}23$, $\sum_{k=1}^{n}X_k^2=66459{,}30$, $\sum_{k=1}^{n}\ln X_k=78{,}68$, und $\sum_{k=1}^{n}(\ln X_k)^2=169{,}87$. Aus ähnlichen Erfahrungen entscheidet sich die Aktuarin, eine Paretoverteilung $F(x)=1-(a/x)^b$, $a,b>0$, $x\ge a$ zu verwenden, und anzunehmen, dass die Schäden unabhängig sind.

(a) Berechnen Sie das empirische Mittel und die empirische Varianz.
(b) Bestimmen Sie die Verteilung von $\ln X_k$.

(c) Schätzen Sie mit dem Momentenverfahren die Parameter a und b aus den Beobachtungen $\{\ln X_k\}$.
(d) Bestimmen Sie den Mittelwert der Verteilung für die geschätzten Parameter der Paretoverteilung. Welche Konsequenz hat der Schätzwert $\hat{b} < 2$?

2.1 Lösung

(a) Der empirische Mittelwert ist $\bar{\mu} = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k \approx 11{,}77$, die empirische Varianz ist

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{\mu})^2 = \frac{1}{n-1} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \right) - n\bar{\mu}^2 \right] \approx 1303{,}2.$$

(b) Für die Verteilung von $\ln X_k$ erhalten wir für $z \geq \ln a$

$$\mathrm{P}[\ln X_k > z] = \mathrm{P}[X_k > e^z] = (ae^{-z})^b = a^b e^{-bz} = e^{-b(z - \ln a)}.$$

Dies ist eine um $\ln a$ verschobene Exponentialverteilung.
(c) Der empirische Mittelwert für $\ln X$ ist $m = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \ln X_k \approx 1{,}67$, die empirische Varianz von $\ln X$ wird $s^2 = (n-1)^{-1}[(\sum_{k=1}^{n} (\ln X_k)^2) - nm^2] \approx 0{,}83$. Der Mittelwert der Verteilung von $\ln X$ ist $b^{-1} + \ln a$, die Varianz ist b^{-2}. Somit erhalten wir den Schätzer $\hat{b} = (s^2)^{-1/2} \approx 1{,}10$ und $\hat{a} = \exp\{m - \hat{b}^{-1}\} = 2{,}14$.
(d) Aus der Formelsammlung erhalten wir den Mittelwert $\hat{a}\hat{b}/(\hat{b} - 1)$. Dies ist für den Momentenschätzer 23,54. Die Varianz wird unendlich, da $\hat{b} < 2$. Wir sehen, dass mit dem empirischen Mittelwert der Erwartungswert massiv unterschätzt wird. Obwohl die Varianz nicht existiert, erhält man einen empirischen Schätzer. (Die Schäden wurden mit $a = 2$ und $b = 10/9$ simuliert, Mittelwert 20.)

3 Aufgabe (Tarifierung)

Der Bestand eines Versicherungsunternehmens setzt sich folgendermaßen zusammen:

Risikotyp	Anzahl der Risiken	Versicherungssumme	Schadenhöhe
I	1	50	$(0, 50)$-gleichverteilt
II	2	400	$(0, 400)$-gleichverteilt

Die Wahrscheinlichkeit eines Schadeneintritts beträgt 0,1 bei jedem der drei Risiken.

Die Höhe und Anzahl der Schäden der Versicherungsnehmer sind unabhängige Zufallsvariablen.

(a) Berechnen Sie den Variationskoeffizienten des Gesamtschadens des Bestands.
(b) Berechnen Sie den Variationskoeffizienten des *beim Versicherungsunternehmen verbleibenden Gesamtschadens* des Bestands nach Abschluss einer Summenexzedentenrückversicherung mit einem Maximum von 100 des (Erst-)Versicherungsunternehmens und unbeschränkter Haftung des Rückversicherers.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert des *beim Versicherungsunternehmen verbleibenden Gesamtschadens* des Bestands für den Fall, dass die Haftung des Rückversicherers auf 200, d.h. auf 2 Maxima, beschränkt ist.
(d) Berechnen Sie den Erwartungswert des *beim Versicherungsunternehmen verbleibenden Gesamtschadens* des Bestands für den Fall, dass eine Abzugsfranchise der Höhe 100 mit den Versicherungsnehmern vereinbart wird.

3.1 Lösung

Bezeichnungen:

X_{I} (0, 50)-gleichverteilte Zufallsvariable Schadenhöhe
X_{II} (0, 400)-gleichverteilte Zufallsvariable Schadenhöhe
N Schadenzahl eines Risikos
S_{I} Gesamtschaden eines Risikos vom Typ I
S_{II} Gesamtschaden eines Risikos vom Typ II
S_{ges} Gesamtschaden des Bestands

(a)

$$E(N) = 0{,}1; \qquad \mathrm{Var}(N) = 0{,}09$$
$$E(X_{\mathrm{I}}) = 25; \qquad \mathrm{Var}(X_{\mathrm{I}}) = 50^2/12 = 208{,}33$$
$$E(X_{\mathrm{II}}) = 200; \qquad \mathrm{Var}(X_{\mathrm{II}}) = 400^2/12 = 13.333{,}12$$
$$E(S_{\mathrm{I}}) = 2{,}5$$
$$E(S_{\mathrm{II}}) = 20$$
$$\mathrm{Var}(S_{\mathrm{I}}) = 0{,}1 \cdot 208{,}33 + 0{,}09 \cdot 25^2 = 77{,}08$$
$$\mathrm{Var}(S_{\mathrm{II}}) = 0{,}1 \cdot 8^2 \cdot 208{,}33 + 0{,}09 \cdot 8^2 \cdot 25^2 = 64 \cdot 77{,}08 = 4.933{,}33$$
$$\mathrm{VarKo}(S_{ges}) = \frac{\sqrt{77{,}08 + 2 \cdot 4.933{,}12}}{2{,}5 + 2 \cdot 20} = 2{,}35$$

(b)

$$E(\tilde{S}_{\mathrm{I}}) = E(S_{\mathrm{I}}) = 2{,}5$$
$$\mathrm{Var}(\tilde{S}_{\mathrm{I}}) = \mathrm{Var}(S_{\mathrm{I}}) = 77{,}08$$
$$E(\tilde{X}_{\mathrm{II}}) = E(X_{\mathrm{II}})/4 = 50; \qquad \mathrm{Var}(\tilde{X}_{\mathrm{II}}) = \mathrm{Var}(X_{\mathrm{II}})/16 = 833{,}33$$
$$\mathrm{Var}(\tilde{S}_{\mathrm{II}}) = \mathrm{Var}(S_{\mathrm{II}})/16 = 308{,}32$$
$$\mathrm{VarKo}(\tilde{S}_{ges}) = \frac{\sqrt{77{,}08 + 2 \cdot 308{,}32}}{2{,}5 + 2 \cdot 5} = 2{,}11$$

(c)

$$E(\tilde{S}_{\mathrm{I}}) = 0{,}1 \cdot 25 = 2{,}5$$
$$E(\tilde{S}_{\mathrm{II}}) = 0{,}1 \cdot 100 = 10; \qquad E(\tilde{S}_{ges}) = 2{,}5 + 2 \cdot 10 = 22{,}5$$

(d)

$$E(\hat{X}_{\mathrm{I}}) = 0; \qquad E(\hat{S}_{\mathrm{I}}) = 0$$
$$E(\hat{X}_{\mathrm{II}}) = \int_{100}^{400} \frac{1}{400}(x-100)dx = \frac{1}{400}\frac{1}{2}300^2 = \frac{3}{4} \cdot 150 = 112{,}5$$
$$E(\hat{S}_{\mathrm{II}}) = 0{,}1 \cdot 112{,}5 = 11{,}125$$
$$E(\hat{S}_{ges}) = 2 \cdot 11{,}25 = 22{,}5$$

4 Aufgabe (Tarifierung)

Ein Versicherungsunternehmen (VU) mit einem inhomogenen Bestand gewährt seinen Versicherungsnehmern (VN) folgende Prämienreduktionen in Abhängigkeit der Anzahl der Jahre ununterbrochener Schadenfreiheit.

Anzahl der Jahre ununterbrochener Schadenfreiheit	Klasse 1 1 Jahr	Klasse 2 2 Jahre	Klasse 3 3 und mehr Jahre
Rabatt	10 %	20 %	30 %

In jedem Jahr hat ein VN höchstens einen Schaden. Der Erwartungswert der Schadenhöhe X beträgt $E(X) = 100$. Die Schäden treten unabhängig voneinander ein.

Der Bestand des VU besteht zu 70 % aus VN des Typs I und zu 30 % aus VN des Typs II. Sie unterscheiden sich durch ihre Schadeneintrittswahrscheinlichkeiten:

VN	Typ I	Typ II
Schadeneintrittswahrscheinlichkeit	0,2	0,5

(a) Zeigen Sie, dass sich die folgende stationäre Verteilung der VN auf die (Beitrags-)Klassen ergibt:

	Klasse 0 Basisprämie B	Klasse 1 0,9 B	Klasse 2 0,8 B	Klasse 3 0,7 B
Typ I	25/125	20/125	16/125	64/125
Typ II	4/8	2/8	1/8	1/8

(b) Berechnen Sie die Risikoprämie (Basisprämie B) für einen VN in der Klasse 0 nach dem Erwartungswertprinzip mit einem Sicherheitszuschlag von 10 %.

(c) Vergleichen Sie die Nettoprämie, d. h. den Schadenerwartungswert, für einen VN in der Klasse 0 mit der Nettoprämie eines VN in der Klasse 3. Entspricht die Prämienreduktion in Höhe von 30 % in der Klasse 3 einer risikogerechten Tarifierung? (Begründung).

4.1 Lösung

(a) Übergangsmatrix P_{I} eines VN vom Typ I

0,2	0,8	0	0
0,2	0	0,8	0
0,2	0	0	0,8
0,2	0	0	0,8

bzw. P_{II} vom Typ II

0,5	0,5	0	0
0,5	0	0,5	0
0,5	0	0	0,5
0,5	0	0	0,5

Nachweis einer stationären Verteilung:

$$(25, 20, 16, 64) \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

$$= (25, 20, 16, 64)$$

$$(4, 2, 1, 1) \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$= (4, 2, 1, 1)$$

(b) Nettoprämie eines VN vom Typ I: $0{,}2 \cdot 100 = 20$
Nettoprämie eines VN vom Typ II: $0{,}5 \cdot 100 = 50$
Nettoprämie NP_0 in Klasse 0:

$$\mathrm{NP}_0 = \frac{25/125 \cdot 0{,}7}{25/125 \cdot 07 + 4/8 \cdot 0{,}3} \cdot 20 + \frac{4/8 \cdot 0{,}3}{25/125 \cdot 07 + 4/8 \cdot 0{,}3} \cdot 50 = 35{,}52$$

Risikoprämie = Basisprämie $B = 35{,}52 \cdot 1{,}1 = 39{,}07$

(c) Nettoprämie NP_3 in Klasse 3:

$$\mathrm{NP}_3 = \frac{64/125 \cdot 0{,}7}{64/125 \cdot 07 + 1/8 \cdot 0{,}3} \cdot 20 + \frac{1/8 \cdot 0{,}3}{64/125 \cdot 07 + 1/8 \cdot 0{,}3} \cdot 50 = 22{,}84$$

Unter dem Aspekt der Prämiengerechtigkeit auf der Basis der Nettoprämie wäre ein Nettoprämienniveau von $22{,}84/35{,}52 \cdot 100\,\% = 64{,}31\,\%$ (anstelle des angegebenen Niveaus von 70 %) richtig.

5 Aufgabe (Schadenreservierung)

Das folgende Abwicklungsdreieck für Schadenstände enthält die kumulierten Schadenzahlungen $S_{i,k}$ und die Prämien π_i für die Anfalljahre 2006 bis 2009 in den Abwicklungsjahren 0 bis 3:

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k				Prämie π_i
	0	1	2	3	
2006	230	480	600	750	750
2007	210	420	525		750
2008	100	180			750
2009	90				750

Es wird angenommen, dass alle Schäden bis zum Ende des Abwicklungsjahres 3 vollständig abgewickelt werden.

Hinweis: Berechnen Sie die Schätzer für die Abwicklungsmuster ohne Rundungen vorzunehmen.

(a) Berechnen Sie die Chain-Ladder Faktoren und schätzen Sie die Reserve für 2009 mit dem Chain-Ladder Verfahren.
(b) Berechnen Sie die Chain-Ladder Quoten und schätzen Sie die Reserve für 2009 mit dem Cape-Cod Verfahren.
(c) Berechnen Sie die Schadenquotenzuwächse und schätzen Sie die Reserve für 2009 mit dem additiven Verfahren.
(d) Berechnen Sie die additiven Quoten und schätzen Sie die Reserve für 2009 mit dem Cape-Cod Verfahren.
(e) Vergleichen Sie die geschätzten Abwicklungsmuster und Reserven.

5.1 Lösung

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} &= \frac{750}{600} = 1{,}25\\ \widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}} &= \frac{600+525}{480+420} = 1{,}25\\ \widehat{\varphi}_1^{\mathrm{CL}} &= \frac{480+420+180}{230+210+100} = 2{,}00\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{2009,3}^{\mathrm{CL}} &= S_{2009,0} \cdot \widehat{\varphi}_1^{\mathrm{CL}} \cdot \widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}} \cdot \widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}}\\ &= 90 \times 2{,}00 \times 1{,}25 \times 1{,}25 = 281{,}25\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\widehat{R}_{2009}^{\mathrm{CL}} &= \widehat{S}_{2009,3}^{\mathrm{CL}} - S_{2009,0}\\ &= 281{,}25 - 90 = 191{,}25\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_3^{\mathrm{CL}} &= 1\\
\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{CL}} &= \widehat{\gamma}_3^{\mathrm{CL}}/\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} = 1{,}00/1{,}25 = 0{,}80\\
\widehat{\gamma}_1^{\mathrm{CL}} &= \widehat{\gamma}_2^{\mathrm{CL}}/\widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}} = 0{,}80/1{,}25 = 0{,}64\\
\widehat{\gamma}_0^{\mathrm{CL}} &= \widehat{\gamma}_1^{\mathrm{CL}}/\widehat{\varphi}_1^{\mathrm{CL}} = 0{,}64/2{,}00 = 0{,}32
\end{aligned}$$

Mit

$$\widehat{\kappa}^{\mathrm{CC}} = \frac{90+180+525+750}{0{,}32\times 750 + 0{,}64\times 750 + 0{,}80\times 750 + 1{,}00\times 750} \approx 0{,}75$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_{2009}^{\mathrm{CC}} &= \widehat{S}_{2009,3}^{\mathrm{CC}} - S_{2009,0}\\
&= \left(S_{2009,0} + (1-\widehat{\gamma}_0^{\mathrm{CL}})\,\pi_{2009}\,\widehat{\kappa}^{\mathrm{CC}}\right) - S_{2009,0}\\
&= (1-\widehat{\gamma}_0^{\mathrm{CL}})\,\pi_{2009}\,\widehat{\kappa}^{\mathrm{CC}}\\
&\approx (1-0{,}32)\times 750\times 0{,}75 = 382{,}5
\end{aligned}$$

(c) Wir bestimmen zunächst das Abwicklungsdreieck für Zuwächse:

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k				Prämie π_i
	0	1	2	3	
2006	230	250	120	150	750
2007	210	210	105		750
2008	100	80			750
2009	90				750

Es gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}} &= \frac{150}{750} = 0{,}20\\
\widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}} &= \frac{120+105}{750+750} = 0{,}15\\
\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}} &= \frac{250+210+80}{750+750+750} = 0{,}24\\
\widehat{\zeta}_0^{\mathrm{AD}} &= \frac{230+210+100+90}{750+750+750+750} = 0{,}21
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_{2009}^{\mathrm{AD}} &= \widehat{S}_{2009,3}^{\mathrm{AD}} - S_{2009,0}\\
&= \left(S_{2009,0} + \pi_{2009}\left(\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}} + \widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}} + \widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}}\right)\right) - S_{2009,0}\\
&= \pi_{2009}\left(\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}} + \widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}} + \widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}}\right)\\
&= 750\times(0{,}24+0{,}15+0{,}20) = 442{,}5
\end{aligned}$$

(d) Es gilt $\widehat{\zeta}_0^{\mathrm{AD}} + \widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}} + \widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}} + \widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}} = 0{,}80$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\widehat{\vartheta}_0^{\mathrm{AD}} &= 0{,}21/0{,}80 = 0{,}2625 \\
\widehat{\vartheta}_1^{\mathrm{AD}} &= 0{,}24/0{,}80 = 0{,}3000 \\
\widehat{\vartheta}_2^{\mathrm{AD}} &= 0{,}15/0{,}80 = 0{,}1875 \\
\widehat{\vartheta}_3^{\mathrm{AD}} &= 0{,}20/0{,}80 = 0{,}2500
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_0^{\mathrm{AD}} &= \widehat{\vartheta}_0^{\mathrm{AD}} = 0{,}2625 \\
\widehat{\gamma}_1^{\mathrm{AD}} &= \widehat{\gamma}_0^{\mathrm{AD}} + \widehat{\vartheta}_1^{\mathrm{AD}} = 0{,}2625 + 0{,}3000 = 0{,}5625 \\
\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{AD}} &= \widehat{\gamma}_1^{\mathrm{AD}} + \widehat{\vartheta}_2^{\mathrm{AD}} = 0{,}5625 + 0{,}1875 = 0{,}7500 \\
\widehat{\gamma}_3^{\mathrm{AD}} &= 1
\end{aligned}$$

Mit

$$\widehat{\kappa}^{\mathrm{CC}} = \frac{90 + 180 + 525 + 750}{(0{,}2625 + 0{,}5625 + 0{,}7500 + 1{,}0000) \times 750} = 0{,}8$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_{2009}^{\mathrm{CC}} &= (1 - \widehat{\gamma}_0^{\mathrm{AD}})\, \pi_{2009}\, \widehat{\kappa}^{\mathrm{CC}} \\
&= (1 - 0{,}2625) \times 750 \times 0{,}8 = 442{,}5
\end{aligned}$$

Wenn man weiß, dass das Cape-Cod Verfahren mit additiven Quoten dem additiven Verfahren entspricht, kann man auf die Berechnung der Cape-Cod Schadenquote und der Reserve für 2009 verzichten.

(e) Die Abwicklung nach den additiven Quoten ist langsamer als die Abwicklung nach den Chain-Ladder Quoten; dies lässt sich dadurch erklären, dass der extrem niedrige Schadenstand $S_{2009,0}$ in die Berechnung der additiven Quoten eingeht, nicht aber in die der Chain-Ladder Quoten. Dementsprechend ergibt sich bei Verwendung der additiven Quoten eine höhere Cape-Cod Schadenquote als bei Verwendung der Chain-Ladder Quoten. Die Reserve für 2009 liegt beim Cape-Cod Verfahren mit Chain-Ladder Quoten zwischen der extrem niedrigen Chain-Ladder Reserve und der additiven Reserve. Das Cape-Cod Verfahren mit additiven Quoten entspricht dem additiven Verfahren.

6 Aufgabe (Schadenreservierung)

Für einen Bestand von Risiken sind für die Anfalljahre 2006 bis 2009 die Zuwächse bekannt. Des weiteren liegen auf der Grundlage eines Marktportfolios a priori Schätzer $\widehat{\alpha}_i^{\mathrm{extern}}$ für die erwarteten Endschadenstände und a priori Schätzer $\widehat{\vartheta}_k^{\mathrm{extern}}$ für das Abwicklungsmuster für Anteile vor:

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k				a priori
	0	1	2	3	Endschadenstand $\widehat{\alpha}_i^{\text{extern}}$
2006	214	121	33	2	375
2007	226	123	41		400
2008	246	164			430
2009	280				450
$\widehat{\vartheta}_k^{\text{extern}}$	0,60	0,30	0,09	0,01	

Es wird angenommen, dass alle Schäden bis zum Ende des Abwicklungsjahres 3 vollständig abgewickelt werden.

(a) Berechnen Sie das externe Abwicklungsmuster für Quoten.
(b) Schätzen Sie die Reserve für das Kalenderjahr 2010 mit dem Bornhuetter-Ferguson Verfahren.
(c) Schätzen Sie alle Endschadenstände mit dem Bornhuetter-Ferguson Verfahren.
(d) Ersetzen Sie die a priori Endschadenstände $\widehat{\alpha}_i^{\text{extern}}$ durch die Bornhuetter-Ferguson Schätzer $\widehat{S}_i^{\text{BF}}$ aus (c) und schätzen Sie wieder die Reserve für das Kalenderjahr 2010 mit dem Bornhuetter-Ferguson Verfahren (1. Iteration).
(e) Schätzen Sie die Reserve für das Kalenderjahr 2010 mit dem Loss-Development Verfahren.
(f) Vergleichen Sie die Ergebnisse.

6.1 Lösung

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_0^{\text{extern}} &= \widehat{\vartheta}_0^{\text{extern}} = 0{,}60 \\
\widehat{\gamma}_1^{\text{extern}} &= \widehat{\gamma}_0^{\text{extern}} + \widehat{\vartheta}_1^{\text{extern}} = 0{,}60 + 0{,}30 = 0{,}90 \\
\widehat{\gamma}_2^{\text{extern}} &= \widehat{\gamma}_1^{\text{extern}} + \widehat{\vartheta}_2^{\text{extern}} = 0{,}90 + 0{,}09 = 0{,}99 \\
\widehat{\gamma}_3^{\text{extern}} &= 1
\end{aligned}$$

Für das weitere sind die aktuellen Schadenstände sowie die a priori Schätzer $\widehat{\alpha}_i^{\text{extern}}$ für die erwarteten Endschadenstände und die a priori Schätzer $\widehat{\vartheta}_k^{\text{extern}}$ und $\widehat{\gamma}_k^{\text{extern}}$ für die Abwicklungsmuster für Anteile und Quoten von Interesse:

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k				a priori
	0	1	2	3	Endschadenstand $\widehat{\alpha}_i^{\text{extern}}$
2006				370	375
2007			390		400
2008		410			430
2009	280				450
$\widehat{\vartheta}_k^{\text{extern}}$	0,60	0,30	0,09	0,01	
$\widehat{\gamma}_k^{\text{extern}}$	0,60	0,90	0,99	1,00	

(b) Für den Bornhuetter-Ferguson Prädiktor der Reserve für 2010 erhält man

$$\begin{aligned}\widehat{R}^{\mathrm{BF}}_{(2010)} &= \widehat{Z}^{\mathrm{BF}}_{2009,1} + \widehat{Z}^{\mathrm{BF}}_{2008,2} + \widehat{Z}^{\mathrm{BF}}_{2007,3}\\ &= \widehat{\vartheta}^{\mathrm{extern}}_1 \widehat{\alpha}^{\mathrm{extern}}_{2009} + \widehat{\vartheta}^{\mathrm{extern}}_2 \widehat{\alpha}^{\mathrm{extern}}_{2008} + \widehat{\vartheta}^{\mathrm{extern}}_3 \widehat{\alpha}^{\mathrm{extern}}_{2007}\\ &= 0{,}30 \times 450 + 0{,}09 \times 430 + 0{,}01 \times 400 = 177{,}7\end{aligned}$$

(c) Für die Bornhuetter-Ferguson Prädiktoren der Endschadenstände erhält man

$$\begin{aligned}\widehat{S}^{\mathrm{BF}}_{2006,3} &= S_{2006,3} + \left(\widehat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_3 - \widehat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_3\right) \widehat{\alpha}^{\mathrm{extern}}_{2006}\\ &= 370 + 0 = 370\\ \widehat{S}^{\mathrm{BF}}_{2007,3} &= S_{2007,2} + \left(\widehat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_3 - \widehat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_2\right) \widehat{\alpha}^{\mathrm{extern}}_{2007}\\ &= 390 + (1{,}00 - 0{,}99) \times 400 = 394\\ \widehat{S}^{\mathrm{BF}}_{2008,3} &= S_{2008,1} + \left(\widehat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_3 - \widehat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_1\right) \widehat{\alpha}^{\mathrm{extern}}_{2008}\\ &= 410 + (1{,}00 - 0{,}90) \times 430 = 453\\ \widehat{S}^{\mathrm{BF}}_{2009,3} &= S_{2009,0} + \left(\widehat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_3 - \widehat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_0\right) \widehat{\alpha}^{\mathrm{extern}}_{2009}\\ &= 280 + (1{,}00 - 0{,}60) \times 450 = 460\end{aligned}$$

(d) Ersetzt man die a priori Schätzer der erwarteten Endschadenstände durch die Bornhuetter-Ferguson Prädiktoren der Endschadenstände, so ergibt sich

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k				a priori
	0	1	2	3	Endschadenstand $\widehat{\alpha}^{\mathrm{extern}}_i$
2006				370	370
2007			390		394
2008		410			453
2009	280				460
$\widehat{\vartheta}^{\mathrm{extern}}_k$	0,60	0,30	0,09	0,01	

und für den (iterierten) Bornhuetter-Ferguson Prädiktor der Reserve für 2010 erhält man

$$\begin{aligned}\widehat{R}^{\mathrm{BF}}_{(2010)} &= \widehat{Z}^{\mathrm{BF}}_{2009,1} + \widehat{Z}^{\mathrm{BF}}_{2008,2} + \widehat{Z}^{\mathrm{BF}}_{2007,3}\\ &= \widehat{\vartheta}^{\mathrm{extern}}_1 \widehat{\alpha}^{\mathrm{extern}}_{2009} + \widehat{\vartheta}^{\mathrm{extern}}_2 \widehat{\alpha}^{\mathrm{extern}}_{2008} + \widehat{\vartheta}^{\mathrm{extern}}_3 \widehat{\alpha}^{\mathrm{extern}}_{2007}\\ &= 0{,}30 \times 460 + 0{,}09 \times 453 + 0{,}01 \times 394 = 182{,}71\end{aligned}$$

(e) Für die Loss-Development Prädiktoren der Schadenstände des Kalenderjahres 2010 gilt

$$\begin{aligned}\widehat{S}^{\mathrm{LD}}_{2009,1} &= \widehat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_1 \frac{S_{2009,0}}{\widehat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_0} = 0{,}90 \times \frac{280}{0{,}60} = 420\\ \widehat{S}^{\mathrm{LD}}_{2008,2} &= \widehat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_2 \frac{S_{2008,1}}{\widehat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_1} = 0{,}99 \times \frac{410}{0{,}90} = 451\end{aligned}$$

$$\widehat{S}^{\mathrm{LD}}_{2007,3} = \widehat{\gamma}_3^{\mathrm{extern}} \frac{S_{2007,2}}{\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{extern}}} = 1{,}00 \times \frac{390}{0{,}99} \approx 394$$

und für den Loss Development Prädiktor der Reserve für 2010 ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\widehat{R}^{\mathrm{LD}}_{(2010)} &= \left(\widehat{S}^{\mathrm{LD}}_{2009,1} - S_{2009,0}\right) + \left(\widehat{S}^{\mathrm{LD}}_{2008,2} - S_{2008,1}\right) + \left(\widehat{S}^{\mathrm{LD}}_{2007,3} - S_{2007,2}\right) \\ &\approx (420 - 280) + (451 - 410) + (394 - 390) = 185\end{aligned}$$

(f) Aufgrund der schnellen Abwicklung haben die a priori Schätzer der erwarteten Endschadenstände nur geringen Einfluss auf die Bornhuetter-Ferguson Prädiktoren. Dieser Einfluss wird durch die Iteration weiter abgeschwächt, sodass bereits nach einem Iterationsschritt die Reserve näher an der Loss-Development Reserve als an der Bornhuetter-Ferguson Reserve liegt.

7 Aufgabe (Rückversicherung und Risikoteilung)

Sei $S = X_1 + \cdots + X_N$ der Jahres-Gesamtschaden eines Versicherungsbestandes, der mit dem kollektiven Modell, also mit einer Schadenzahlverteilung für N und einer Schadenhöhenverteilung für X_i beschrieben wird. Für diesen Bestand wird ein limitierter Stop-Loss-Rückversicherungsvertrag mit Priorität 1.000 und Limit 1.000 vereinbart, bei dem der Rückversicherer bei einem Gesamtschaden der Größe $S > 1.000$ das Minimum von $S - 1.000$ und 1.000 bezahlt. Für N hat man die Verteilung

$$\mathbb{P}\{N = 0\} = 0{,}8; \qquad \mathbb{P}\{N = 1\} = 0{,}1; \qquad \mathbb{P}\{N = 2\} = \mathbb{P}\{N = 3\} = 0{,}05;$$

und die Verteilung der Schadenhöhen X_i ist

$$\mathbb{P}\{X_i = 500\} = 0{,}5; \qquad \mathbb{P}\{X_i = 1.000\} = \mathbb{P}\{X_i = 2.000\} = 0{,}25$$

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für $S = 0$, $S = 500$, $S = 1.000$ und $S = 1.500$.
2. Berechnen Sie die Netto-Risikoprämie

   $$E[\min\{(S - 1.000)^+, 1.000\}]$$

   für die Zahlungen des Rückversicherers.
3. Berechnen Sie die Netto-Risikoprämie für die Zahlungen des Rückversicherers für den Fall, dass statt des Stop-Loss-Vertrages ein Exzess-of-Loss-Rückversicherungsvertrag (XL-Vertrag) besteht, bei dem der Rückversicherer bei jedem Schaden der Höhe $X_i = 2.000$ den Anteil 1.000 übernimmt.

7.1 Lösung

1. Mit den Annahmen des kollektiven Modells erhält man

$$\begin{aligned} a_0 &= \mathbb{P}\{S = 0\} = \mathbb{P}\{N = 0\} = 0{,}8, \\ a_1 &= \mathbb{P}\{S = 500\} = \mathbb{P}\{N = 1 \& X_1 = 500\} = 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}05, \\ a_2 &= \mathbb{P}\{S = 1.000\} \\ &= \mathbb{P}\{N = 1 \& X_1 = 1.000\} + \mathbb{P}\{N = 2 \& X_1 = X_2 = 500\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0{,}1 \cdot 0{,}25 + 0{,}05 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}0375. \\
a_3 &= \mathbb{P}\{S = 1.500\} \\
&= 2\mathbb{P}\{N = 2 \& X_1 = 500 \& X_2 = 1.000\} \\
&\quad + \mathbb{P}\{N = 3 \& X_1 = X_2 = X_3 = 500\} \\
&= 2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}25 + 0{,}05 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}01875
\end{aligned}
$$

2. Der Erwartungswert der Zahlungen $\underline{S}$ des Rückversicherers ist

$$
\begin{aligned}
E[\underline{S}] &= 1.000\mathbb{P}\{S \geq 2.000\} + 500\mathbb{P}\{S = 1.500\} \\
&= 1.000 \cdot (1 - a_0 - a_1 - a_2 - a_3) + 500 \cdot a_3 \\
&= 103{,}125
\end{aligned}
$$

3. Der Erwartungswert der Zahlungen $\underline{S}$ des Rückversicherers ist in diesem Fall

$$E[\underline{S}] = E[N] \cdot 1.000 \cdot \mathbb{P}\{X_1 = 2.000\} = 0{,}35 \cdot 1.000 \cdot 0{,}25 = 87{,}5$$

8 Aufgabe (Rückversicherung und Risikoteilung)

Sei $S = X_1 + \cdots + X_N$ der Jahres-Gesamtschaden eines Versicherungsbestandes, der mit dem kollektiven Modell, also mit einer Schadenzahlverteilung für N und einer Schadenhöhenverteilung für X_i beschrieben wird. Für diesen Bestand wird ein nicht limitierter Einzelschadenexzedenten-Rückversicherungsvertrag (XL-Vertrag) mit Priorität 5 vereinbart, bei dem der Rückversicherer bei jedem Schaden der Größe $X_i > 5$ den Anteil $X_i - 5$ bezahlt. Für N hat man die Poissonverteilung mit Erwartungswert 2.

1. Berechnen Sie die Varianz der Zahlungen des Rückversicherers pro Jahr, wenn die Verteilung der Schadenhöhen X_i die Pareto-Verteilung mit Parametern 3 und 1 ist, welche folgende Dichte besitzt:

$$f(x) = 3x^{-4}, \quad x > 1.$$

2. Welcher Wert ergibt sich für obige Varianz, wenn die Verteilung der Schadenhöhen X_i die US-Paretoverteilung mit der Dichte

$$f_1(x) = 3(1+x)^{-4}, \quad x > 0,$$

besitzt?

8.1 Lösung

Ist $Y_i = (X_i - 5)^+$ der Anteil, den der Rückversicherer bei der Schadenhöhe X_i bezahlt, dann hat der Gesamtjahresschaden $\underline{S}$ des Rückversicherers die Varianz

$$\mathrm{Var}(\underline{S}) = 2E[Y_1^2]$$

1. (a) elementar:

$$E[Y_1^2] = \int_5^\infty (x-5)^2 3x^{-4}dx = 3\int_5^\infty (x^{-2} - 10x^{-3} + 25x^{-4})dx$$
$$= 3\left(-x^{-1} + \frac{10}{2}x^{-2} - \frac{25}{3}x^{-3}\right)\Big|_5^\infty = \frac{1}{5}$$

   (b) Aus der Formelsammlung kennt man die verschobene Pareto(a, b)-Verteilung mit der Dichte

$$g(x, a, b) = ab^{-a}(1+x)^{-a-1}, \quad x > 0$$

   von der man weiß, dass diese Verteilung den Mittelwert $b/(a-1)$ und das zweite Moment $2b^2/((a-1)(a-2))$ besitzt und dass Y_i, gegeben $Y_i > 0$, Dichte $g(y, 3, 5)$ hat. Die Schadenanzahl N^* der positiven Zahlungen des Rückversicherers hat eine Poisson-Verteilung mit Parameter

$$2 \cdot \mathbb{P}\{Y_i > 0\} = 2 \cdot 5^{-3}$$

   Damit erhält man für die gesuchte Varianz

$$E[N^*] \cdot 5^2 \cdot 2/((3-2)(3-1)) = 2 \cdot 5^{-3} \cdot 5^2 = 2/5$$

   Dieser elegantere Lösungsansatz wurde in der Klausur fast ausschließlich benutzt.

   Das Ergebnis ist jeweils $\mathrm{Var}(\underline{S}) = 2/5$.

2. Mit der elementaren Methode des ersten Teils erhält man

$$E[Y_1^2] = \int_5^\infty (x-5)^2 3(1+x)^{-4}dx = 3\int_6^\infty (x-6)^2 x^{-4}dx$$
$$= 3\int_6^\infty (x^{-2} - 12x^{-3} + 36x^{-4})dx$$
$$= 3\left(-x^{-1} + \frac{12}{2}x^{-2} - \frac{36}{3}x^{-3}\right)\Big|_6^\infty = \frac{1}{6}$$

   Für die US-Pareto-Verteilung erhalten wir demnach die Varianz $\mathrm{Var}(\underline{S}) = 2/6$.

9 Aufgabe (Zusatzaufgabe I)

Ein Versicherungsnehmer verursacht mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}3$ einen Schaden. Die Schadenhöhe X hat die Dichte $f(x) = 0{,}25$ für $x \in [0, 4]$.

(a) Berechnen Sie die Entlastungseffektfunktion $r(a)$ in Abhängigkeit der Höhe a der Abzugsfranchise.
(b) Bei welcher Höhe der Abzugsfranchise beträgt die Entlastung des Versicherungsunternehmens 10 %?
(c) Lösen Sie (a) für den Fall, dass die maximale Entschädigung durch $L = 3$ limitiert ist. (Erstrisikoversicherung mit Abzugsfranchise)
(d) Berechnen Sie die Risikoprämie RP nach dem Varianzprinzip mit dem Parameter $\beta = 0{,}2$ für einen vom Versicherungsunternehmen gedeckten Schaden der Höhe $Y = \max\{X - 3, 0\}$.

9.1 Lösung

(a)

$$E(\tilde{X}) = \int_0^a \frac{1}{4} x\,dx + a(1 - F(a)) = a - \frac{1}{8}a^2$$
$$E(X) = 2$$
$$r(a) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{16}a^2$$

(b)

$$0{,}1 = r(a) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{16}a^2 \quad \text{oder}$$
$$a^2 - 8a + 1{,}6 = 0$$
$$a_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 1{,}6} = 4 \pm 3{,}795$$

Damit ist $a = 4 - 3{,}795 = 0{,}205$ die Lösung.
(Das Ergebnis $4 + 3{,}795$ ist keine Lösung des Problems.)

(c) $r(3) = 0{,}9375$ ist der Anteil am Gesamtschaden bei einer Übernahme der Einzelschäden bis zur Höhe $a = 3$. Für die Entlastung $r_3(a)$ des Versicherungsunternehmens auf dieser Basis gilt damit

$$r_3(a) = \frac{r(a)}{r(3)} = 1{,}06667 r(a) \quad \text{für } 0 \le a \le 3$$

(d) S: Entschädigung; $E(Y) = \int_0^4 \frac{1}{4} \max\{x - 3; 0\}dx = \int_3^4 \frac{1}{4}\{x - 3\}dx = \int_0^1 \frac{1}{4} x\,dx = \frac{1}{8}$

$$E(Y^2) = \int_0^4 \frac{1}{4}[\max\{x - 3; 0\}]^2 dx = \cdots = \int_0^1 \frac{1}{4}x^2 dx = \frac{1}{12}$$
$$\mathrm{RP} = E(S) + 0{,}2 \cdot \mathrm{Var}(S) = p \cdot 0{,}125 + 0{,}2 \cdot \left[p \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{64} \right) + p \cdot (1 - p) \cdot \frac{1}{64} \right] = 0{,}0422$$

10 Aufgabe (Zusatzaufgabe II)

Ein Aktuar soll die Zahlungen aus einem Versicherungsvertrag modellieren. Aus den Erfahrungen aus den vergangenen Jahren weiß man, dass ein Schaden Zahlungen in drei aufeinanderfolgenden Jahren 0, 1, 2 auslöst. Der Aktuar entscheidet sich für das folgende einfache Modell. Der Gesamtschaden S_2 hat eine $\Gamma(\alpha, 3)$ Verteilung, also die Dichte

$$f_{S_2}(x) = \frac{1}{2}\alpha^3 x^2 e^{-\alpha x}, \quad x > 0$$

Die Schadenstände am Ende der Jahre 0 und 1 sind $S_0 = S_2 U_0 U_1$ und $S_1 = S_2 U_1$, wobei $\mathrm{P}[U_1 \le u] = u^2$ und $\mathrm{P}[U_1 \le u] = u$ $(0 < u < 1)$. Die Variablen S_2, U_0 und U_1 sind unabhängig.

(a) Berechnen Sie die Verteilung der Zahlung $Z_2 = S_2 - S_1$ im Jahr 2 und die Verteilung von S_1.
   Hinweis: Betrachten Sie $\mathrm{P}[Z_2 > x]$ und $\mathrm{P}[S_1 > x]$.
(b) Berechnen Sie die Verteilung der Zahlung $Z_0 = S_0$ und die Verteilung von $Z_1 = S_1 - S_0$.
(c) Zeigen Sie, dass die Zahlungen Z_0 und Z_1 unabhängig sind.

Hinweis: Berechnen Sie $\mathrm{P}[Z_0 > x, Z_1 > y]$. Welche Bedingung muss dann für S_1 erfüllt sein?

10.1 Lösung

(a) Es gilt $Z_2 = S_2(1 - U_1)$. Wir bemerken, dass $S_2 > \max\{Z_2, S_1\}$. Kennen wir $S_2 > x$, so gilt $Z_2 > x$, falls $U_1 < 1 - x/S_2$. Wir erhalten dann durch partielle Integration

$$\begin{aligned}\mathrm{P}[Z_2 > x] &= \int_x^\infty (1 - x/s)^2 \frac{1}{2}\alpha^3 s^2 e^{-\alpha s} ds = \frac{1}{2}\alpha^2 \int_x^\infty (s - x)^2 \alpha e^{-\alpha s} ds \\ &= \alpha \int_x^\infty (s - x)\alpha e^{-\alpha s} ds = \int_x^\infty \alpha e^{-\alpha s} ds = e^{-\alpha x}\end{aligned}$$

Somit ist Z_2 exponentialverteilt mit Parameter α.
   Für S_1 erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{P}[S_1 > x] &= \int_x^\infty [1 - (x/s)^2] \frac{1}{2}\alpha^3 s^2 e^{-\alpha s} ds = \frac{1}{2}\alpha^2 \int_x^\infty [s^2 - x^2]\alpha e^{-\alpha s} ds \\ &= \int_x^\infty \alpha^2 s e^{-\alpha s} ds\end{aligned}$$

Somit ist S_1 $\Gamma(\alpha, 2)$ verteilt.
(b) Wir erhalten unter Ausnützung der Verteilung von S_1,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}[Z_1 > x] &= \int_x^\infty (1 - x/s)\alpha^2 s e^{-\alpha s} ds = \alpha \int_x^\infty (s - x)\alpha e^{-\alpha s} ds \\ &= \int_x^\infty \alpha e^{-\alpha s} ds = e^{-\alpha x}\end{aligned}$$

Dies ist die Exponentialverteilung. Den gleichen Ausdruck erhalten wir für Z_0. Die Aufgabe hätte auch direkt über (c) gelöst werden können.
(c) Es muss offensichtlich $S_1 > x + y$ gelten. Gegeben S_1, brauchen wir $x/S_1 < U_0 < 1 - y/S_1$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathrm{P}[Z_0 > x, Z_1 > y] &= \int_{x+y}^\infty ([1 - y/s] - x/s)\alpha^2 s e^{-\alpha s} ds \\ &= \alpha \int_{x+y}^\infty (s - \{x + y\})\alpha e^{-\alpha s} ds = \int_{x+y}^\infty \alpha e^{-\alpha s} ds \\ &= e^{-\alpha(x+y)} = e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass Z_0 und Z_1 unabhängig sind.