Blätter DGVFM (2010) 31: 377–393
DOI 10.1007/s11857-010-0122-2

ACTUARIAL EXAMS

Klausur Schadenversicherungsmathematik 2009

Aufgaben und Musterlösungen

C. Hipp · M. Morlock · H. Schmidli · K.D. Schmidt

Received: 1 September 2010 / Accepted: 1 September 2010 / Published online: 22 October 2010

Am 09.05.2009 fand die Prüfung Grundwissen – Mathematik der Schadenversicherung statt. Von den 207 TeilnehmerInnen haben 164 bestanden.

Die Klausur besteht aus 8 Aufgaben und zwei Zusatzaufgaben. Eine oder zwei Zusatzaufgaben werden nur gewertet, wenn eine bzw. zwei der anderen Aufgaben nicht bearbeitet oder als nicht bearbeitet gekennzeichnet werden. Bei jeder Aufgabe sind maximal 15 Punkte zu erreichen. Insgesamt sind damit maximal 120 Punkte möglich. Zum Bestehen der Klausur reichen 48 Punkte. Die Klausur dauert 120 Minuten.

Zugelassen sind die klassische Formelsammlung, die der Klausur beigefügt wird, sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner. Antworten sind zu begründen. Bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

1 Aufgabe (Risikomodelle)

Der jährliche Gesamtschaden S eines Versicherungsportfolios wird durch eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung mit Erwartungswert $\lambda = 72$ und Pareto verteilten Schäden mit Verteilungsfunktion $F_X(x) = 1 - x^{-4}$ für $x > 1$ modelliert. Ein Aktuar soll das Risikokapital für Solvency II berechnen, also das minimale Kapital u, für das $\mathbb{P}[S > u] \leq 0.005$ gilt.

(a) Berechnen Sie das Risikokapital auf der Grundlage einer Normalapproximation.
(b) Berechnen Sie das Risikokapital auf der Grundlage einer Normal-Power-Approximation.

Hinweis: $\mathbb{E}[X^p] = 4/(4 - p)$ für $p < 4$.

M. Morlock, Gießen, Deutschland, e-mail: martin.e.morlock@wirtschaft.uni-giessen.de

1.1 Lösung

Wir brauchen Erwartungswert, Varianz und Schiefe der Verteilung von S. Die Momente der Schadenverteilung sind

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_1^\infty x^p \frac{4}{x^5} \mathrm{d}x = \frac{4}{4-p}$$

Wir finden

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S] &= \lambda \mathbb{E}[X] = 72 \frac{4}{3} = 96 \\ \mathrm{Var}[S] &= \lambda \mathbb{E}[X^2] = 72 \cdot 2 = 144 \\ \gamma[S] &= \frac{\mathbb{E}[X^3]}{\sqrt{\lambda(\mathbb{E}[X^2]^3)}} = \frac{4}{\sqrt{72 \cdot 2^3}} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Weiter brauchen wir das 99.5%-Quantil der Normalverteilung. Aus der Tabelle finden wir ungefähr 2.575 (genauer 2.5758).

(a) Mit der Normalapproximation nähern wir $(S - 96)/\sqrt{144}$ mit einer Normalverteilung an. Wir müssen also

$$\frac{u-96}{12} = 2.575 \; (2.5758)$$

lösen, d.h. $u = 126.90$ ($u = 126.91$).

(b) Wir müssen die Gleichung (siehe Formelsammlung)

$$\frac{1}{1/6}\left(\sqrt{(1/6)^2 + 6/6\,(u-96)/12 + 9} - 3\right) = 2.575 \; (2.5758)$$

lösen. Dies gibt $u = 128.78$ ($u = 128.79$).

2 Aufgabe (Risikomodelle)

Ein kollektiver Versicherungsvertrag erzeugt in einem Jahr N Schäden mit Schadenshöhen $\{X_k\}$, wobei alle Variablen stochastisch unabhängig sind. Die Verteilung von N ist gegeben durch

n	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}[N = n]$	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1

Die Schäden haben die Verteilung

x	100	200	500	1000
$\mathbb{P}[X = x]$	0.4	0.3	0.2	0.1

(a) Berechnen Sie die Nettoprämie und die Varianz für das Risiko $S = \sum_{k=1}^N X_k$.
(b) Wie ändert sich die Nettoprämie, wenn ein jährlicher Selbstbehalt von 300 für den Gesamtschaden vereinbart wird?

2.1 Lösung

(a) Der Erwartungswert der Schadenanzahl ist

$$0.2 \cdot 1 + 0.2 \cdot 2 + 0.1 \cdot 3 + 0.1 \cdot 4 = 1.3$$

das zweite Moment wird

$$0.2 \cdot 1 + 0.2 \cdot 4 + 0.1 \cdot 9 + 0.1 \cdot 16 = 3.5$$

Dies ergibt die Varianz $3.5 - (1.3)^2 = 1.81$. Der Erwartungswert der Schadenhöhen ist

$$0.4 \cdot 100 + 0.3 \cdot 200 + 0.2 \cdot 500 + 0.1 \cdot 1000 = 300$$

und das zweite Moment

$$0.4 \cdot 10.000 + 0.3 \cdot 40.000 + 0.2 \cdot 250.000 + 0.1 \cdot 1.000.000 = 166.000$$

Die Varianz wird also $166.000 - (300)^2 = 76.000$.

Mit Hilfe der Gleichungen von Wald finden wir

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X] = 1.3 \cdot 300 = 390$$

und

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[S] &= \mathbb{E}[N]\mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[N](\mathbb{E}[X])^2 = 1.3 \cdot 76.000 + 1.81 \cdot (300)^2 \\ &= 261.700\end{aligned}$$

(b) Wir müssen die erwarteten Zahlungen des Kunden berechnen. Wenn kein Schaden auftritt, muss auch der Kunde nichts bezahlen. Tritt ein Schaden auf, so zahlt der Kunde im Mittel

$$\mathbb{E}[\min\{S, 300\} \mid N = 1] = 0.4 \cdot 100 + 0.3 \cdot 200 + 0.3 \cdot 300 = 190$$

Treten 2 Schäden auf, so zahlt der Kunde nur dann weniger als 300, wenn beide Schäden 100 sind. Als erwartete Zahlungen des Kunden erhalten wir

$$\mathbb{E}[\min\{S, 300\} \mid N = 2] = 0.4^2 \cdot 200 + (1 - 0.4^2) \cdot 300 = 284$$

Treten 3 oder mehr Schäden auf, ist der Schaden mindestens 300, d.h. der Kunde zahlt 300. Dies gibt die erwarteten Zahlungen des Kunden

$$0.2 \cdot 190 + 0.2 \cdot 284 + 0.2 \cdot 300 = 154.8$$

Die Nettoprämie wird also im Fall mit Selbstbehalt $390 - 154.8 = 235.2$

3 Aufgabe (Tarifierung)

Ein Versicherungsunternehmen hat einen Bestand von 10.000 Risiken. Jedes dieser Risiken kann 0, 1, 2 oder 3 Schäden mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten haben:

Zahl der Schäden	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	0,6	0,2	0,1	0,1

Die Versicherungssumme beträgt 3.000. Im Schadenfall treten folgende Schadenhöhen auf (Teil- bzw. Totalschäden):

Schadenhöhe	1.000	2.000	3.000
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,3	0,3

Die Höhe und Anzahl der Schäden der Versicherungsnehmer sind unabhängige Zufallsvariablen.

(a) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz des Gesamtschadens eines Versicherungsnehmers.
(b) Bestimmen Sie den Variationskoeffizienten des Gesamtschadens des Bestands.
(c) Bestimmen Sie die Nettorisikoprämie eines *Versicherungsnehmers* für den Fall, dass eine Abzugsfranchise der Höhe 1.000 vereinbart wird. Bestimmen Sie den Variationskoeffizienten des beim *Versicherungsunternehmen* verbleibenden Gesamtschadens des Bestands.

    Hinweis: Die Varianz des vom Versicherungsunternehmen übernommenen Schadens *eines* Versicherungsnehmers beträgt 1.301.100.

    Wie groß ist der Entlastungseffekt für das Versicherungsunternehmen durch diese Abzugsfranchise?

3.1 Lösung

(a) N: Zahl der Schäden
X: Schadenhöhe
S: Gesamtschaden eines Versicherungsnehmers (VN)
$E(N) = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}7$
$E(X) = 400 + 600 + 900 = 1.900$
$E(S) = E(N)E(X) = 0{,}7 \cdot 1.900 = 1.330$
$\mathrm{Var}(N) = 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}1 - 0{,}7^2 = 1{,}01$
$\mathrm{Var}(X) = 1.000.000 \cdot 0{,}4 + 4.000.000 \cdot 0{,}3 + 9.000.000 \cdot 0{,}3 - 1.900^2 = 690.000$
$\mathrm{Var}(S) = E(N)\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(N)E(X)^2 = 0{,}7 \cdot 690.000 + 1{,}01 \cdot 1.900^2 = 4.129.100$
(b) $\mathrm{VK}(\text{Gesamtbestand}) = 1/100 \cdot \mathrm{VK}(S) = 1/100 \cdot 4.129.100^{0{,}5}/1.330 = 0{,}01528$
(c) Nettorisikoprämie NRP bei einer Abzugsfranchise von 1.000:

Schadenhöhe $\hat{X}$	0	1.000	2.000
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,3	0,3

$E(\hat{N}) = E(N)$
$E(\hat{X}) = E(X) - 1.000 = 1.900 - 1.000 = 900$
NRP: $E(\hat{S}) = 0{,}7 \cdot 900 = 630$
$\mathrm{Var}(\hat{X}) = 0^2 \cdot 0{,}4 + 1.000^2 \cdot 0{,}3 + 2.000^2 \cdot 0{,}3 - 900^2 = 690.000$

$\mathrm{Var}(\hat{S}) = 0{,}7 \cdot 690.000 + 1{,}01 \cdot 900^2 = 1.301.100$
$\mathrm{VK}(\text{Gesamtbestand}) = 1/100 \cdot \mathrm{VK}(\hat{S})$
$= 1/100 \cdot 1.301.100^{0{,}5}/630 = 0{,}01810568$
$\tilde{X}$: Verbleibender, versicherter Gesamtschaden eines VN
$E(\tilde{X}) = 1.000$
Entlastungseffekt: $E(\tilde{X})/E(X) = 1.000/1.900 = 0{,}526$

4 Aufgabe (Tarifierung)

Ein Versicherungsunternehmen (VU) versichert Risiken, bei denen jeweils höchstens ein Schaden pro Periode eintritt. Die Schadeneintrittswahrscheinlichkeit beträgt 0,2, und der Erwartungswert der Schadenhöhe beträgt 10.000. Die Schadenereignisse sind stochastisch unabhängig.

Das VU plant, bei einem schadenfreien Verlauf eine Beitragsrückgewähr in Höhe von 400 einzuführen, da bekannt ist, dass die Hälfte der Versicherungsnehmer (VN) hierdurch zu einem vorsichtigeren Verhalten veranlasst wird, was sich bei dieser Hälfte der VN in einer Reduktion der Schadeneintrittswahrscheinlichkeit auf 0,15 auswirkt.

(a) Ist die Höhe dieser Beitragsrückerstattung gerechtfertigt? (Begründung)
(b) Beantworten Sie (a) für den Fall, dass alle VN durch diese Beitragsrückgewähr zu einem vorsichtigeren Verhalten veranlasst werden.
(c) Nehmen Sie alternativ an, dass das VU die Hälfte seiner VN nicht durch eine Beitragsrückgewähr, sondern das folgende Bonus-System mit den drei Klassen 1, 2 und 3 zu einem vorsichtigeren Verhalten veranlasst:

- Im ersten Jahr sind alle Versicherungsnehmer in der Klasse 1.
- Bei schadenfreiem Verlauf wird der VN eine Klasse höher gestuft oder bleibt in der höchsten Klasse 3.
- Hat der VN einen Schaden, dann wird er in die Klasse 1 zurückgestuft.
- Ein Rabatt wird nur in der Klasse 3 gewährt.

(ca) Wie ist die Verteilung der „vorsichtigen“ Versicherungsnehmer (VVN) und der „unvorsichtigen“ Versicherungsnehmer (UVN) *im dritten Jahr* auf die drei Bonusklassen?
(cb) Welcher Rabatt ist in der Bonusklasse 3 für das dritte Jahr gerechtfertigt?

4.1 Lösung

X_{U}: Schaden eines Versicherungsnehmers, der nicht zu vorsichtigerem Verhalten veranlasst wird.
X_{V}: Schaden eines Versicherungsnehmers, der durch die Regelung „Beitragsrückgewähr bei schadenfreiem Verlauf“ oder „Aussicht auf einen Rabatt“ zu einem vorsichtigeren Verhalten veranlasst wird.

(a) $E(X_{\mathrm{U}}) = 0{,}2 \cdot 10.000 = 2.000$
$E(X_{\mathrm{V}}) = 0{,}15 \cdot 10.000 = 1.500$

Erwartungswert der Ersparnis bei den Schadenzahlungen:

$$2.000 - (0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 10.000 + 0{,}5 \cdot 0{,}15 \cdot 10.000) = 250$$

Aufwand für Beitragsrückerstattung:

$$(0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}85) \cdot 400 = 330$$

Damit übersteigt der Erwartungswert des Aufwands denjenigen der Ersparnis. Die Einführung einer Beitragsrückgewähr bei schadenfreiem Verlauf des Vertrags ist also nicht gerechtfertigt.

(b) Schadenerwartungswert: $0{,}15 \cdot 10.000 = 1.500$ bei Einführung einer Beitragsrückerstattung bei schadenfreiem Verlauf gegenüber 2.000 ohne diese Beitragsrückgewähr; die Reduktion beträgt also 500.
Aufwand für Beitragsrückgewähr: $0{,}85 \cdot 400 = 340$.
Der Saldo ist positiv, d.h., die Einführung ist gerechtfertigt.

(ca) Die Klasse 3 wird im dritten Jahr nur erreicht, wenn im ersten und im zweiten Jahr kein Schaden eintritt.
Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist beim VVN (dem Versicherungsnehmer, der zu einem vorsichtigerer Verhalten veranlasst wird): $0{,}85^2 = 0{,}7225$ und beim UVN (dem Versicherungsnehmer, der unvorsichtig bleibt): $0{,}8^2 = 0{,}64$.
Die Klasse 2 wird im dritten Jahr nur erreicht, wenn im ersten Jahr ein Schaden und im zweiten Jahr kein Schaden auftritt.
Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist beim VVN: $0{,}15 \cdot 0{,}85 = 0{,}1275$ und beim UVN: $0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$.
Die Klasse 1 wird im dritten Jahr nur erreicht, wenn im ersten Jahr kein Schaden und im zweiten Jahr ein Schaden auftritt, *oder* wenn im ersten und zweiten Jahr ein Schaden auftritt.
Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist beim VVN $0{,}85 \cdot 0{,}15 + 0{,}15^2 = 0{,}15$ und beim UVN $0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2 = 0{,}2$.

(cb) Gemäß (ca) beträgt die Prämie in Klasse 3

$$\frac{0{,}7225 \cdot 1.500 + 0{,}64 \cdot 2.000}{0{,}7225 + 0{,}64} = 1.734{,}86$$

Dies ergibt einen Rabatt von 265,14 auf die Kollektivprämie von 2.000.

5 Aufgabe (Schadenreservierung)

Das folgende Abwicklungsdreieck für Schadenstände enthält die kumulierten Schadenzahlungen $S_{i,k}$ und die Prämien π_i für die Anfalljahre 2005 bis 2008 in den Abwicklungsjahren 0 bis 3:

Anfall-	Abwicklungsjahr k				Prämie
jahr i	0	1	2	3	π_i
2005	180	300	420	462	500
2006	200	340	412		500
2007	220	380			500
2008	208				500

Es wird angenommen, dass alle Schäden bis zum Ende des Abwicklungsjahres 3 vollständig abgewickelt werden.

(a) Schätzen Sie die Chain–Ladder Faktoren und die Chain–Ladder Quoten.
(b) Schätzen Sie mit dem Chain–Ladder Verfahren die Reserve für das Kalenderjahr 2010.
(c) Schätzen Sie die additiven Schadenquotenzuwächse und die additiven Quoten.
(d) Schätzen Sie mit dem additiven Verfahren die Reserve für das Kalenderjahr 2010.
(e) Vergleichen Sie die Schätzer der Abwicklungsmuster für Quoten und die Schätzer der Reserven.

5.1 Lösung

(a) Für die Chain–Ladder Faktoren erhält man

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_3^{\text{CL}} &= \frac{462}{420} = 1{,}100 \\
\hat{\varphi}_2^{\text{CL}} &= \frac{420+412}{300+340} = 1{,}300 \\
\hat{\varphi}_1^{\text{CL}} &= \frac{300+340+380}{180+200+220} = 1{,}700
\end{aligned}$$

Für die Chain–Ladder Quoten gilt daher

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_3^{\text{CL}} &= 1 \\
\hat{\gamma}_2^{\text{CL}} &= \hat{\gamma}_3^{\text{CL}}/\hat{\varphi}_3^{\text{CL}} = 1{,}000/1{,}100 \approx 0{,}909 \\
\hat{\gamma}_1^{\text{CL}} &= \hat{\gamma}_2^{\text{CL}}/\hat{\varphi}_2^{\text{CL}} \approx 0{,}909/1{,}300 \approx 0{,}699 \\
\hat{\gamma}_0^{\text{CL}} &= \hat{\gamma}_1^{\text{CL}}/\hat{\varphi}_1^{\text{CL}} \approx 0{,}699/1{,}700 \approx 0{,}411
\end{aligned}$$

(3 Punkte)

(b) Für die Chain–Ladder Prädiktoren der Anfalljahre 2007 und 2008 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{2007,3}^{\text{CL}} &= S_{2007,1} \cdot \hat{\varphi}_2^{\text{CL}} \cdot \hat{\varphi}_3^{\text{CL}} = 380 \times 1{,}300 \times 1{,}100 \approx 543 \\
\hat{S}_{2007,2}^{\text{CL}} &= S_{2007,1} \cdot \hat{\varphi}_2^{\text{CL}} = 380 \times 1{,}300 = 494 \\
\hat{S}_{2008,2}^{\text{CL}} &= S_{2008,0} \cdot \hat{\varphi}_1^{\text{CL}} \cdot \hat{\varphi}_2^{\text{CL}} = 208 \times 1{,}700 \times 1{,}300 \approx 460 \\
\hat{S}_{2008,1}^{\text{CL}} &= S_{2008,0} \cdot \hat{\varphi}_1^{\text{CL}} = 208 \times 1{,}700 \approx 354
\end{aligned}$$

Für die Reserve für das Kalenderjahr 2010 ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
R_{(2010)} &= \left(\hat{S}_{2007,3}^{\text{CL}} - \hat{S}_{2007,2}^{\text{CL}}\right) + \left(\hat{S}_{2008,2}^{\text{CL}} - \hat{S}_{2008,1}^{\text{CL}}\right) \\
&\approx (543-494) + (460-354) = 155
\end{aligned}$$

(3 Punkte)

(c) Aus dem Abwicklungsdreieck für Schadenstände erhält man das Abwicklungsdreieck für Zuwächse:

Anfall-	Abwicklungsjahr k				Prämie
jahr i	0	1	2	3	π_i
2005	180	120	120	42	500
2006	200	140	72		500
2007	220	160			500
2008	208				500

Für die additiven Schadenquotenzuwächse erhält man

$$\hat{\zeta}_0^{\mathrm{AD}} = \frac{180+200+220+208}{500+500+500+500} = 0{,}404$$
$$\hat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}} = \frac{120+140+160}{500+500+500} = 0{,}280$$
$$\hat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}} = \frac{120+72}{500+500} = 0{,}192$$
$$\hat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}} = \frac{42}{500} = 0{,}084$$

Für die additiven Quoten gilt daher

$$\hat{\gamma}_0^{\mathrm{AD}} = \frac{0{,}404}{0{,}404+0{,}280+0{,}192+0{,}084} \approx 0{,}421$$
$$\hat{\gamma}_1^{\mathrm{AD}} = \frac{0{,}404+0{,}280}{0{,}404+0{,}280+0{,}192+0{,}084} \approx 0{,}713$$
$$\hat{\gamma}_2^{\mathrm{AD}} = \frac{0{,}404+0{,}280+0{,}192}{0{,}404+0{,}280+0{,}192+0{,}084} \approx 0{,}913$$
$$\hat{\gamma}_3^{\mathrm{AD}} = 1$$

(**4 Punkte**)

(d) Für die additiven Prädiktoren der Anfalljahre 2007 und 2008 ergibt sich

$$\hat{S}_{2007,3}^{\mathrm{AD}} = S_{2007,1} + \pi_{2007}\big(\hat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}} + \hat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}}\big) = 380 + 500 \times (0{,}192 + 0{,}084) = 518$$
$$\hat{S}_{2007,2}^{\mathrm{AD}} = S_{2007,1} + \pi_{2007}\hat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}} = 380 + 500 \times 0{,}192 = 476$$
$$\hat{S}_{2008,2}^{\mathrm{AD}} = S_{2008,0} + \pi_{2008}\big(\hat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}} + \hat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}}\big) = 208 + 500 \times (0{,}280 + 0{,}192) = 444$$
$$\hat{S}_{2008,1}^{\mathrm{AD}} = S_{2008,0} + \pi_{2008}\hat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}} = 208 + 500 \times 0{,}280 = 348$$

Für die Reserve für das Kalenderjahr 2010 ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} R_{(2010)} &= \big(\hat{S}_{2007,3}^{\mathrm{AD}} - \hat{S}_{2007,2}^{\mathrm{AD}}\big) + \big(\hat{S}_{2008,2}^{\mathrm{AD}} - \hat{S}_{2008,1}^{\mathrm{AD}}\big) \\ &= (518 - 476) + (444 - 348) = 138 \end{aligned}$$

Alternativ (und eleganter) kann man die additiven Prädiktoren

$$\hat{Z}_{2007,3}^{\mathrm{AD}} = \pi_{2007}\hat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}} = 500 \times 0{,}084 = 42$$
$$\hat{Z}_{2008,2}^{\mathrm{AD}} = \pi_{2008}\hat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}} = 500 \times 0{,}192 = 96$$

berechnen und erhält

$$R_{(2010)} = \hat{Z}^{\text{AD}}_{2007,3} + \hat{Z}^{\text{AD}}_{2008,2} = 42 + 96 = 138$$

(3 Punkte)

(e) Die Chain–Ladder Quoten und die additiven Quoten sind nahezu identisch. Der additive Schätzer der Reserve für das Kalenderjahr 2010 ist etwas niedriger als der Chain–Ladder Schätzer. Dieser Effekt lässt sich dadurch erklären, dass die für alle Anfalljahre identischen Prämien in den jungen Anfalljahren im Vergleich zu den alten Anfalljahren relativ niedrig sind.

(2 Punkte)

6 Aufgabe (Schadenreservierung)

Für einen Bestand von Risiken sind für die Anfalljahre 2005 bis 2008 die Prämien π_i und die aktuellen Schadenstände bekannt. Des weiteren liegen auf der Grundlage eines Marktportfolios a priori Schätzer $\hat{\alpha}_i^{\text{extern}}$ für die erwarteten Endschadenstände und a priori Schätzer $\hat{\gamma}_k^{\text{extern}}$ für das Abwicklungsmuster für Quoten vor.

Anfall-	Abwicklungsjahr k				Prämie	A priori
jahr i	0	1	2	3	π_i	Endschadenstand $\hat{\alpha}_i^{\text{extern}}$
2005				1318	1500	1320
2006			1400		1750	1540
2007		1240			2000	1760
2008	860				2500	2200
$\hat{\gamma}_k^{\text{extern}}$	0,400	0,700	0,900	1,000		

Es wird angenommen, dass alle Schäden bis zum Ende des Abwicklungsjahres 3 vollständig abgewickelt werden.

(a) Schätzen Sie die Reserve für das Anfalljahr 2008 und die Reserve für das Kalenderjahr 2011 mit dem Bornhuetter–Ferguson Verfahren.
(b) Schätzen Sie die Reserve für das Anfalljahr 2008 und die Reserve für das Kalenderjahr 2011 mit dem Loss–Development Verfahren.
(c) Schätzen Sie die Reserve für das Anfalljahr 2008 und die Reserve für das Kalenderjahr 2011 mit dem Cape–Cod Verfahren.
(d) Vergleichen Sie die Ergebnisse.
(e) Bestimmen Sie die zugehörigen Schätzer $\hat{\vartheta}_k^{\text{extern}}$ für das Abwicklungsmuster für Anteile und geben Sie unter den Annahmen des Cape–Cod Verfahrens eine Interpretation der Größen

$$\hat{\vartheta}_k^{\text{extern}} \hat{\kappa}^{\text{CC}}$$

wobei $\hat{\kappa}^{\text{CC}}$ die Cape–Cod Endschadenquote bezeichnet.

6.1 Lösung

Der Schätzer der Reserve für das Anfalljahr 2008 ist in allen Fällen durch

$$\hat{R}_{2008} = \hat{S}_{2008,3} - S_{2008,0}$$

gegeben und der Schätzer der Reserve für das Kalenderjahr 2011 ist in allen Fällen durch

$$\hat{R}_{(2011)} = \hat{S}_{2008,3} - \hat{S}_{2008,2}$$

gegeben.

(a) Für die Bornhuetter–Ferguson Schätzer der Schadenstände gilt

$$\hat{S}^{\text{BF}}_{2008,k} = S_{2008,0} + \left(\hat{\gamma}^{\text{extern}}_k - \hat{\gamma}^{\text{extern}}_0\right)\hat{\alpha}^{\text{extern}}_{2008}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\hat{R}^{\text{BF}}_{2008} &= \hat{S}^{\text{BF}}_{2008,3} - S_{2008,0} = \left(\hat{\gamma}^{\text{extern}}_3 - \hat{\gamma}^{\text{extern}}_0\right)\alpha^{\text{extern}}_{2008} \\ &= (1 - 0,400) \times 2200 = 1320\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\hat{R}^{\text{BF}}_{(2011)} &= \hat{S}^{\text{BF}}_{2008,3} - \hat{S}^{\text{BF}}_{2008,2} = \left(\hat{\gamma}^{\text{extern}}_3 - \hat{\gamma}^{\text{extern}}_2\right)\alpha^{\text{extern}}_{2008} \\ &= (1 - 0{,}900) \times 2200 = 220\end{aligned}$$

(**3 Punkte**)

(b) Für die Loss–Development Schätzer der Schadenstände gilt

$$\hat{S}^{\text{LD}}_{2008,k} = \hat{\gamma}^{\text{extern}}_k \frac{S_{2008,0}}{\hat{\gamma}^{\text{extern}}_0}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\hat{R}^{\text{LD}}_{2008} &= \hat{S}^{\text{LD}}_{2008,3} - S_{2008,0} = \left(\hat{\gamma}^{\text{extern}}_3 - \hat{\gamma}^{\text{extern}}_0\right)\frac{S_{2008,0}}{\hat{\gamma}^{\text{extern}}_0} \\ &= (1 - 0{,}400) \times \frac{860}{0{,}400} = 1290\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\hat{R}^{\text{LD}}_{(2011)} &= \hat{S}^{\text{LD}}_{2008,3} - \hat{S}^{\text{LD}}_{2008,2} = \left(\hat{\gamma}^{\text{extern}}_3 - \hat{\gamma}^{\text{extern}}_2\right)\frac{S_{2008,0}}{\hat{\gamma}^{\text{extern}}_0} \\ &= (1 - 0{,}900) \times \frac{860}{0{,}400} = 215\end{aligned}$$

(**3 Punkte**)

(c) Für die Cape–Cod Schätzer der Schadenstände gilt

$$\hat{S}^{\text{CC}}_{2008,k} = \hat{\gamma}^{\text{extern}}_k \pi_{2008}\, \hat{\kappa}^{\text{CC}}$$

und für die Cape–Cod Schadenquote erhält man

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}^{\text{CC}} &= \frac{S_{2008,0} + S_{2007,1} + S_{2006,2} + S_{2005,3}}{\pi_{2008} \cdot \hat{\gamma}^{\text{extern}}_0 + \pi_{2007} \cdot \hat{\gamma}^{\text{extern}}_1 + \pi_{2006} \cdot \hat{\gamma}^{\text{extern}}_2 + \pi_{2006} \cdot \hat{\gamma}^{\text{extern}}_3} \\ &= \frac{860 + 1240 + 1400 + 1318}{2500 \times 0{,}400 + 2000 \times 0{,}700 + 1750 \times 0{,}900 + 1500 \times 1{,}000} = 0{,}880\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\hat{R}^{\mathrm{CC}}_{2008} &= \hat{S}^{\mathrm{CC}}_{2008,3} - S_{2008,0} = \left(\hat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_3 - \hat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_0\right)\pi_{2008}\hat{\kappa}^{\mathrm{CC}} \\ &= (1-0{,}400) \times 2500 \times 0{,}880 = 1320\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\hat{R}^{\mathrm{CC}}_{(2011)} &= \hat{S}^{\mathrm{CC}}_{2008,3} - \hat{S}^{\mathrm{CC}}_{2008,2} = \left(\hat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_3 - \hat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_2\right)\pi_{2008}\hat{\kappa}^{\mathrm{CC}} \\ &= (1-0{,}900) \times 2500 \times 0{,}880 = 220\end{aligned}$$

(4 Punkte)

(d) Wegen

$$\pi_{2008}\hat{\kappa}^{\mathrm{CC}} = 2500 \times 0{,}88 = 2200 = \hat{\alpha}^{\mathrm{extern}}_{2008}$$

stimmen die Cape–Cod Reserven mit den Bornhuetter–Ferguson Reserven überein.

(2 Punkte)

(e) Es gilt

$$\begin{aligned}\hat{\vartheta}^{\mathrm{extern}}_0 &= \hat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_0 = 0{,}400 \\ \hat{\vartheta}^{\mathrm{extern}}_1 &= \hat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_1 - \hat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_0 = 0{,}700 - 0{,}400 = 0{,}300 \\ \hat{\vartheta}^{\mathrm{extern}}_2 &= \hat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_2 - \hat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_1 = 0{,}900 - 0{,}700 = 0{,}200 \\ \hat{\vartheta}^{\mathrm{extern}}_3 &= \hat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_3 - \hat{\gamma}^{\mathrm{extern}}_2 = 1{,}000 - 0{,}900 = 0{,}100\end{aligned}$$

Aus den Annahmen des Cape–Cod Verfahrens ergibt sich (mit $n = 3$) für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ und für alle Anfalljahre i

$$\begin{aligned}\vartheta_k\,\kappa &= (\gamma_k - \gamma_{k-1})\,E\left[\frac{S_{i,n}}{\pi_i}\right] = \left(\frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]} - \frac{E[S_{i,k-1}]}{E[S_{i,n}]}\right)E\left[\frac{S_{i,n}}{\pi_i}\right] \\ &= E\left[\frac{S_{i,k} - S_{i,k-1}}{\pi_i}\right]\end{aligned}$$

und analog erhält man

$$\vartheta_0\,\kappa = E\left[\frac{S_{i,0}}{\pi_i}\right]$$

Daher sind für jedes Abwicklungsjahr k die erwarteten Schadenquotenzuwächse für alle Anfalljahre i identisch und $\hat{\vartheta}_k\hat{\kappa}^{\mathrm{CC}}$ kann als Schätzer für den erwarteten Schadenquotenzuwachs $\vartheta_k\kappa$ des Abwicklungsjahres k aufgefasst werden.

(3 Punkte)

7 Aufgabe (Rückversicherung und Risikoteilung)

In einem Versicherungsbestand gibt es 1.000 Verträge mit unterschiedlichen Versicherungssummen VS, bei denen in einer Periode mit einer Wahrscheinlichkeit p ein Schaden der Höhe VS auftritt; mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ tritt dort kein Schaden auf. Die Verträge sind stochastisch unabhängig und folgendermaßen spezifiziert:

Anzahl	VS	p
500	200	0,005
400	400	0,0025
100	1.000	0,001

Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz und den Variationskoeffizienten des – beim Erstversicherer verbleibenden – Gesamtschadens S

(1) ohne Rückversicherung
(2) mit einer proportionalen Rückversicherung mit Anteil des Erstversicherers von 0,1
(3) mit einer Summenexzedenten-Rückversicherung mit Maximum 200 und unbegrenzter Kapazität
(4) mit einer XL-Rückversicherung mit Priorität 300 und Limit 1.000.

Welche Variante ergibt für den Erstversicherer das geringste Risiko gemessen am Variationskoeffizienten? Welches Argument würde für Variante 4 sprechen?

7.1 Lösung

Sind $v_i, i = 1,2,3$ die Versicherungssummen, $n_i, i = 1,2,3$ die Anzahlen und $p_i, i = 1,2,3$ die Schadeneintrittswahrscheinlichkeiten, dann gilt für den Fall ohne Rückversicherung

$$E[S] = \sum_{i=1}^{3} n_i p_i v_i$$

und

$$\mathrm{Var}(S) = \sum_{i=1}^{3} n_i v_i^2 p_i (1 - p_i).$$

Dies liefert $E[S] = 1.000$ und $\mathrm{Var}(S) = 359.000$ sowie den Variationskoeffizienten $\mathrm{VK}(S) = \sqrt{\mathrm{Var}(S)}/E[S] = 0{,}599$. Die anderen Varianten entstehen durch Abänderung des v-Vektors: für Variante 2 beispielsweise $v_1 = v_2 = v_3 = 200$. Die Ergebnisse sind:

Fall	v_1	v_2	v_3	$E[S]$	$\mathrm{Var}(S)$	$\mathrm{VK}(S)$
1	200	400	1.000	1.000	359.000	0,599
2	20	40	100	100	3.590	0,599
3	200	200	200	720	143.396	0,5259
4	200	300	300	830	198.266	0,5365

Variante 3 ergibt den kleinsten Variationskoeffizienten, sie liefert für den Erstversicherer das geringste Risiko. Variante 4 ist auch interessant, die Nettorisikoprämie für den Rückversicherungsvertrag ist 170 (im Vergleich zur Prämie 280 bei Variante 3).

8 Aufgabe (Rückversicherung und Risikoteilung)

Zwei Investoren A und B managen jeweils ein Risiko X bzw. Y. Sie kooperieren miteinander, indem sie proportionale Risikoteilung vereinbaren, um ihr Risiko – gemessen an der Varianz – zu verringern. Die Risiken X und Y sind stochastisch unabhängig.

(1) Wie können beide Investoren die Varianz ihrer Position halbieren, wenn $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$?
(2) Wie kann man vorgehen, um im Falle $\mathrm{Var}(X) < \mathrm{Var}(Y)$ die Varianz des Risikos von A zu halbieren, wobei gleichzeitig das Risiko von B reduziert wird?
(3) Kann man auch im Falle $\mathrm{Var}(X) < \mathrm{Var}(Y)$ immer eine Risikoteilung finden, bei der die Varianzen für A und B mindestens halbiert werden?

Hinweis zu (1): Beachten Sie die Symmetrie der Aufgabe bezüglich der Rolle von A und B.
Hinweis zu (2): Betrachten Sie eine Aufteilung, bei der das Risiko X zu gleichen Teilen von A und B übernommen wird.

8.1 Lösung

(1) Mit der Aufteilung $(X+Y)/2$ jeweils für A und B ergibt sich die Behauptung wegen

$$\mathrm{Var}((X+Y)/2) = \frac{1}{4}\mathrm{Var}(X) + \frac{1}{4}\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{2}\mathrm{Var}(X).$$

(2) Damit bei einer Aufteilung von

$$X + Y = \frac{1}{2}X + \alpha Y \;+\; \frac{1}{2}X + (1-\alpha)Y$$

bei A eine Halbierung der Varianz erreicht wird, muss

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X)}{4\mathrm{Var}(Y)}}$$

gewählt werden; mit diesem $0 < \alpha < 1$ entsteht als Varianz für B

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{2}X + (1-\alpha)Y\right) = \frac{1}{4}\mathrm{Var}(X) + (1-\alpha)^2\mathrm{Var}(Y).$$

Wegen $(1-\alpha)^2 < 1-\alpha^2$ gilt damit für die Varianz des Teils von B

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\frac{1}{2}X + (1-\alpha)Y\right) &< \frac{1}{4}\mathrm{Var}(X) + (1-\alpha^2)\mathrm{Var}(Y)\\ &= \frac{1}{4}\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - \frac{1}{4}\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y).\end{aligned}$$

(3) Intuitiv ist die Antwort, dass die Halbierung der Varianz für beide Teile nicht möglich ist, wenn eine der Varianzen sehr klein und die andere Varianz sehr groß ist. Präziser nehmen wir an, dass für Zahlen $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$

$$\begin{aligned} \alpha^2 \mathrm{Var}(X) + \beta^2 \mathrm{Var}(Y) &\leq \frac{1}{2} \mathrm{Var}(X), \\ (1-\alpha)^2 \mathrm{Var}(X) + (1-\beta)^2 \mathrm{Var}(Y) &\leq \frac{1}{2} \mathrm{Var}(Y). \end{aligned} \tag{1}$$

Für $\mathrm{Var}(Y) = 8\mathrm{Var}(X)$ führen diese Annahmen zu einem Widerspruch:

$$\beta^2 8 \mathrm{Var}(X) \leq \frac{1}{2} \mathrm{Var}(X)$$

impliziert $\beta \leq 1/4$, und damit wird

$$(1-\beta)^2 \mathrm{Var}(Y) \geq \frac{9}{16} \mathrm{Var}(Y) > \frac{1}{2} \mathrm{Var}(Y),$$

was im Widerspruch zu (1) steht.

9 Aufgabe

Das folgende Abwicklungsdreieck für Schadenstände enthält die kumulierten Schadenzahlungen $S_{i,k}$ und die Prämien π_i für die Anfalljahre 0 bis 3 in den Abwicklungsjahren 0 bis 3:

Anfall-	Abwicklungsjahr k				Prämie
jahr i	0	1	2	3	π_i
0	88	129	154	170	200
1	98	144	170		225
2	95	243			250
3	99				275

Bei einer Kontrolle der dem Abwicklungsdreieck zugrundeliegenden Daten stellt sich heraus, dass die ungewöhnlich hohe Realisation des Schadenstandes $S_{2,1}$ auf einem Übertragungsfehler beruht und dass in Wirklichkeit das folgende Abwicklungsdreieck vorliegt:

Anfall-	Abwicklungsjahr k				Prämie
jahr i	0	1	2	3	π_i
0	88	129	154	170	200
1	98	144	170		225
2	95	143			250
3	99				275

Nennen Sie für

(a) das Bornhuetter–Ferguson Verfahren mit externen a priori Schätzern für das Abwicklungsmuster,

(b) das Loss–Development Verfahren mit externen a priori Schätzern für das Abwicklungsmuster,
(c) das Cape–Cod Verfahren mit externen a priori Schätzern für das Abwicklungsmuster,
(d) das Chain–Ladder Verfahren und
(e) das additive Verfahren

alle Schadenstände, Zuwächse und Anfalljahrreserven, deren Schätzer aufgrund der Korrektur des Abwicklungsdreiecks einer Korrektur bedürfen, und geben Sie eine Begründung ohne Rechnung.

9.1 Lösung

Im folgenden sei $i \in \{1, 2, 3\}$ und $k \in \{4 - i, \ldots, 3\}$.

(a) Für die Bornhuetter–Ferguson Schätzer der Schadenstände, Zuwächse und Anfalljahrreserven gilt

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{BF}} &= S_{i,3-i} + (\hat{\gamma}_k^{\mathrm{extern}} - \hat{\gamma}_{3-i}^{\mathrm{extern}})\hat{\alpha}_i^{\mathrm{extern}} \\
\hat{Z}_{i,k}^{\mathrm{BF}} &= \hat{S}_{i,k}^{\mathrm{BF}} - \hat{S}_{i,k-1}^{\mathrm{BF}} = (\hat{\gamma}_k^{\mathrm{extern}} - \hat{\gamma}_{k-1}^{\mathrm{extern}})\,\hat{\alpha}_i^{\mathrm{extern}} \\
\hat{R}_i^{\mathrm{BF}} &= \hat{S}_{i,3}^{\mathrm{BF}} - S_{i,3-i} = (\hat{\gamma}_3^{\mathrm{extern}} - \hat{\gamma}_{3-i}^{\mathrm{extern}})\,\hat{\alpha}_i^{\mathrm{extern}} = (1 - \hat{\gamma}_{3-i}^{\mathrm{extern}})\,\hat{\alpha}_i^{\mathrm{extern}}
\end{aligned}$$

Daher bedürfen nur die Bornhuetter–Ferguson Schätzer der Schadenstände des Anfalljahres 2 einer Korrektur.

(3 Punkte)

(b) Für die Loss–Development Schätzer der Schadenstände, Zuwächse und Anfalljahrreserven gilt

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{LD}} &= \hat{\gamma}_k^{\mathrm{extern}} \frac{S_{i,3-i}}{\hat{\gamma}_{3-i}^{\mathrm{extern}}} \\
\hat{Z}_{i,k}^{\mathrm{LD}} &= \hat{S}_{i,k}^{\mathrm{LD}} - \hat{S}_{i,k-1}^{\mathrm{LD}} = \left(\hat{\gamma}_k^{\mathrm{extern}} - \hat{\gamma}_{k-1}^{\mathrm{extern}}\right)\frac{S_{i,3-i}}{\hat{\gamma}_{3-i}^{\mathrm{extern}}} \\
\hat{R}_i^{\mathrm{LD}} &= \hat{S}_{i,3}^{\mathrm{LD}} - S_{i,3-i} = \left(\frac{1}{\hat{\gamma}_{3-i}^{\mathrm{extern}}} - 1\right)S_{i,3-i}
\end{aligned}$$

Daher bedürfen die Loss–Development Schätzer der Schadenstände, der Zuwächse und der Anfalljahrreserve des Anfalljahres 2 einer Korrektur.

(3 Punkte)

(c) Für die Cape–Cod Schätzer der Schadenstände, Zuwächse und Anfalljahrreserven gilt

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{CC}} &= S_{i,3-i} + \left(\hat{\gamma}_k^{\mathrm{extern}} - \hat{\gamma}_{3-i}^{\mathrm{extern}}\right)\pi_i\hat{\kappa}^{\mathrm{CC}} \\
\hat{Z}_{i,k}^{\mathrm{CC}} &= \hat{S}_{i,k}^{\mathrm{CC}} - \hat{S}_{i,k-1}^{\mathrm{CC}} = \left(\hat{\gamma}_k^{\mathrm{extern}} - \hat{\gamma}_{k-1}^{\mathrm{extern}}\right)\pi_i\hat{\kappa}^{\mathrm{CC}} \\
\hat{R}_i^{\mathrm{CC}} &= \hat{S}_{i,3}^{\mathrm{CC}} - S_{i,3-i} = \left(\hat{\gamma}_3^{\mathrm{extern}} - \hat{\gamma}_{3-i}^{\mathrm{extern}}\right)\pi_i\hat{\kappa}^{\mathrm{CC}} = \left(1 - \hat{\gamma}_{3-i}^{\mathrm{extern}}\right)\pi_i\,\hat{\kappa}^{\mathrm{CC}}
\end{aligned}$$

mit der Cape–Cod Endschadenquote

$$\hat{\kappa}^{\mathrm{CC}} = \frac{S_{0,3} + S_{1,2} + S_{2,1} + S_{3,0}}{\pi_0\hat{\gamma}_3^{\mathrm{extern}} + \pi_1\hat{\gamma}_2^{\mathrm{extern}} + \pi_2\hat{\gamma}_1^{\mathrm{extern}} + \pi_3\hat{\gamma}_0^{\mathrm{extern}}}$$

Die Veränderung des Schadenstandes $S_{2,1}$ bewirkt eine Veränderung der Cape–Cod Endschadenquote. Daher bedürfen die Cape–Cod Schätzer aller Schadenstände, Zuwächse und Anfalljahrreserven einer Korrektur.

(3 Punkte)

(d) Für die Chain–Ladder Schätzer der Schadenstände, Zuwächse und Anfalljahrreserven gilt

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{CL}} = S_{i,3-i} \prod_{l=4-i}^{k} \hat{\varphi}_l^{\mathrm{CL}}$$

$$\hat{Z}_{i,k}^{\mathrm{CL}} = \hat{S}_{i,k}^{\mathrm{CL}} - \hat{S}_{i,k-1}^{\mathrm{CL}} = S_{i,3-i} \left(\prod_{l=4-i}^{k} \hat{\varphi}_l^{\mathrm{CL}} - \prod_{l=4-i}^{k-1} \hat{\varphi}_l^{\mathrm{CL}} \right)$$

$$\hat{R}_{i}^{\mathrm{CL}} = \hat{S}_{i,3}^{\mathrm{CL}} - S_{i,3-i} = S_{i,3-i} \left(\prod_{l=4-i}^{3} \hat{\varphi}_l^{\mathrm{CL}} - 1 \right)$$

Daher bedürfen die Chain–Ladder Schätzer der Schadenstände, der Zuwächse und der Anfalljahrreserve des Anfalljahres 2 einer Korrektur. Darüber hinaus bewirkt die Veränderung des Schadenstandes $S_{2,1}$ eine Veränderung des Chain–Ladder Faktors $\hat{\varphi}_1^{\mathrm{CL}}$. Daher bedürfen auch die Chain–Ladder Schätzer der Schadenstände, der Zuwächse und der Anfalljahrreserve des Anfalljahres 3 einer Korrektur.

(3 Punkte)

(e) Für die additiven Schätzer der Schadenstände, Zuwächse und Anfalljahrreserven gilt

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{AD}} = S_{i,3-i} + \pi_i \sum_{l=4-i}^{k} \hat{\zeta}_l^{\mathrm{AD}}$$

$$\hat{Z}_{i,k}^{\mathrm{AD}} = \hat{S}_{i,k}^{\mathrm{AD}} - \hat{S}_{i,k-1}^{\mathrm{AD}} = \pi_i \, \hat{\zeta}_k^{\mathrm{AD}}$$

$$\hat{R}_{i}^{\mathrm{AD}} = \hat{S}_{i,3}^{\mathrm{AD}} - S_{i,3-i} = \pi_i \sum_{l=4-i}^{k} \hat{\zeta}_l^{\mathrm{AD}}$$

Daher bedürfen die additiven Schätzer der Schadenstände des Anfalljahres 2 einer Korrektur. Darüber hinaus bewirkt die Veränderung des Schadenstandes $S_{2,1}$ eine Veränderung des additiven Schadenquotenzuwachses $\hat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}}$. Daher bedürfen auch die additiven Schätzer der Schadenstände des Anfalljahres 3 sowie der additive Schätzer des Zuwachses $Z_{3,1}$ und der additive Schätzer der Anfalljahrreserve des Anfalljahres 3 einer Korrektur.

(3 Punkte)

10 Zusatzaufgabe II (Rückversicherung und Risikoteilung)

Der Versicherungsbestand eines Erstversicherers wird modelliert durch das kollektive Modell mit Schadenzahl N, welche eine Poissonverteilung mit Parameter 2 besitzt, und mit unabhängigen Schadenhöhen X_i mit Verteilung

$$P\{X_i = k\} = 1/10, \; k = 1, \ldots, 10.$$

Für diesen Bestand hat der Erstversicherer eine nicht limitierte Schadenexzedentenrückversicherung mit Priorität 5 abgeschlossen.

(1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Gesamtschaden $S = X_1 + \cdots + X_N$ Null ist.
(2) Nach Rückversicherung bleibt ein Gesamtschaden S_1 beim Erstversicherer, der aus einer Schadenanzahl N_1 und Schadenhöhen $X_i^{(1)}$ zusammengesetzt ist. Geben Sie die Verteilung von N_1 und $X_i^{(1)}$ an.
(3) Der Anteil des Rückversicherers $S_2 = S - S_1$ hat ebenso eine Darstellung im kollektiven Modell mit Schadenanzahl N_2 und Schadenhöhen $X_i^{(2)}$. Geben Sie die Verteilung von N_2 und $X_i^{(2)}$ an.
(4) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für $S_2 = 0$.
(5) Berechnen Sie die Erwartungswerte von S_1 und S_2.

10.1 Lösung

(1) $$\mathbb{P}\{S = 0\} = \mathbb{P}\{N = 0\} = \exp(-2) = 0{,}1353$$

(2) $N_1 = N$ hat eine Poisson(2)-Verteilung, und

$$Q_1\{i\} = 1/10, i = 1, \ldots, 4 \qquad Q_1\{5\} = 3/5$$

(3) Hier gibt es zwei mögliche Darstellungen: $N_2 = N$ und $X_i^{(2)} = (X_i - 5)^+$ oder $N_2 = \#\{i \le N : X_i > 5\}$ und $X_i^{(2)} = X_i$, gegeben $X_i > 5$. Die zweite Version ist die für das kollektive Modell angemessene, wobei Nullschäden nicht gezählt werden. In diesem Fall hat N_2 eine Poisson(1)-Verteilung, und

$$Q_2\{i\} = 1/5, \quad i = 1, \ldots, 5$$

(4) $$\mathbb{P}\{S_2 = 0\} = \exp(-1) = 0{,}36788$$

(5) $$E[S_1] = 2 \times (1/10 + 2/10 + 3/10 + 4/10 + 5 \times 6/10) = 8$$

$$E[S_2] = 1 \times (1/5 + 2/5 + 3/5 + 4/5 + 5/5) = 3$$

oder

$$E[S_2] = 2 \times (0/2 + 1/10 + 2/10 + 3/10 + 4/10 + 5/10) = 3$$

Zur Probe:

$$E[S] = 11 = E[S_1] + E[S_2].$$