Blätter DGVFM
DOI 10.1007/s11857-008-0059-x

ACTUARIAL EXAMS

Bericht zur Prüfung im Mai 2008 über Schadenversicherungsmathematik (Grundwissen)

Christian Hipp · Martin Morlock · Hanspeter Schmidli · Klaus D. Schmidt

Received: 15 Juli 2008 / Accepted: 15 Juli 2008

Am 17. Mai 2008 fand die DAV-Prüfung zur Schadenversicherungsmathematik (Grundwissen) statt. Von den 92 Teilnehmern und Teilnehmerinnen haben 66 bestanden. Zu jedem der Gebiete Risikomodelle, Tarifierung, Schadenreservierung, Rückversicherung und Risikoteilung waren jeweils zwei Aufgabe sowie ferner zwei Zusatzaufgaben gestellt worden. Eine oder zwei Zusatzaufgaben wurden nur gewertet, wenn eine bzw. zwei der anderen Aufgaben nicht bearbeitet waren oder als nicht bearbeitet gekennzeichnet worden war. Als Hilfsmittel war die klassische Formelsammlung sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner zugelassen.
Bei jeder Aufgabe konnten maximal 15 Punkte erreicht werden. Die Klausur wurde als bestanden gewertet, wenn 48 der 120 möglichen Punkte erreicht wurden.

Aufgabe 1 (Risikomodelle)

Ein Versicherungsunternehmen modelliert einen Teilbestand mit Hilfe eines kollektiven Modells $\{N, \{X_k : k \in \mathbb{N}\}\}$. Die Schadensanzahl N ist Poisson-verteilt mit Parameter λ, die Schäden haben eine logarithmische Verteilung

$$\mathbb{P}\{X_k = n\} = \frac{q^n}{-n\log(1-q)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

für ein $q \in (0, 1)$.

a) Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von X_k.
b) Zeigen Sie, dass $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ negativ binomial verteilt ist und bestimmen Sie die Parameter.

Hinweis. Bemerken Sie, dass $-\sum_{n=1}^{\infty} q^n/n = \log(1-q)$ für $|q| < 1$.

Martin Morlock, Gießen, Deutschland, e-mail: Martin.E.Morlock@wirtschaft.uni-giessen.de

Lösung

Zu a)

Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von X_k ist

$$E[x^{X_k}] = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{q^n}{-n\log(1-q)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xq)^n}{-n\log(1-q)} = \frac{\log(1-xq)}{\log(1-q)}\,.$$

Zu b)

Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von N ist

$$E[x^N] = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda(1-x)}\,.$$

Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von S ist

$$E[x^S] = E\big[x^{\sum_{k=1}^{N} X_k}\big] = E\Big[E\Big[\prod_{k=1}^{N} x^{X_k}\ \Big|\ N\Big]\Big] = E[E[x^{X_k}]^N]\,.$$

Also erhalten wir

$$E[x^S] = \exp\left\{-\lambda\left(1-\frac{\log(1-xq)}{\log(1-q)}\right)\right\} = (1-qx)^{\lambda/\log(1-q)}\mathrm{e}^{-\lambda}\,.$$

Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion der negativen Binomial-Verteilung ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \binom{\beta+n-1}{n} p^n (1-p)^{\beta} = \left(\frac{1-p}{1-px}\right)^{\beta}.$$

Somit erhalten wir $\beta = -\lambda/\log(1-q)$ und $p = q$.

Aufgabe 2 (Risikomodelle)

Ein Versicherungsunternehmen modelliert einen Teilbestand mit Hilfe eines kollektiven Modells $\{N, \{X_k : k \in \mathbb{N}\}\}$. Die Schadensanzahl N ist Poisson-verteilt mit Parameter $0{,}2$, die Schäden sind unabhängig und identisch verteilt mit Verteilung

x	1	10	100
$\mathbb{P}\{X = x\}$	0,5	0,3	0,2

a) Bestimmen Sie Mittelwert und Varianz des Gesamtschadens.
b) Der Versicherer will nun soviel Kapital bereitstellen, dass der Gesamtschaden dieses Kapital mit Wahrscheinlichkeit $0{,}995$ nicht übersteigt (Value at Risk). Wieviel Kapital ist dazu nötig?

Hinweis. Es gilt $\mathbb{P}\{N = 0\} = 0{,}818731$. Überlegen Sie sich, welche Gesamtschadensummen Sie mit $N \in \{0, 1, 2\}$ erreichen können und berechnen Sie die für die Lösung relevanten Wahrscheinlichkeiten.

Lösung

Zu a)

Die Poissonverteilung hat Mittelwert und Varianz $\lambda = 0{,}2$. Das erste Moment der Schadensverteilung ist

$$E[X] = 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 10 + 0{,}2 \cdot 100 = 23{,}5\,.$$

Das zweite Moment wird

$$E[X^2] = 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 100 + 0{,}2 \cdot 10.000 = 2.030{,}5\,.$$

Nach der ersten Wald'schen Formel ist der Mittelwert des Gesamtschadens S

$$E[S] = E[N]E[X] = 0{,}2 \cdot 23{,}5 = 4{,}7\,.$$

Die Varianz ist nach der zweiten Wald'schen Formel

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[S] &= E[N]\mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[N]E[X]^2 = \lambda(\mathrm{Var}[X] + E[X]^2) = \lambda E[X^2] \\ &= 0{,}2 \cdot 2.030{,}5 = 406{,}1\,.\end{aligned}$$

Zu b)

Kein Schaden tritt mit Wahrscheinlichkeit $\mathrm{e}^{-0{,}2} = 0{,}818731$ ein. Ein Schaden tritt mit Wahrscheinlichkeit $0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2} = 0{,}163746$ ein. Zwei Schäden treten mit Wahrscheinlichkeit $0{,}2^2\mathrm{e}^{-0{,}2}/2 = 0{,}016375$ auf. Zwei Schäden überschreiten 100, falls mindestens ein Schaden 100 ist, also mit Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\{X_1 = 100\} + \mathbb{P}\{X_2 = 100\} - \mathbb{P}\{X_1 = X_2 = 100\} = 0{,}36\,.$$

Da $0{,}016375 \cdot 0{,}36 = 0{,}005895 > 0{,}005$, kann 100 nicht das gesuchte Kapital sein. Zwei Schäden überschreiten 101, falls ein Schaden 100 und der andere nicht 1 ist, also mit Wahrscheinlichkeit $2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 - 0{,}2^2 = 0{,}16$. Die Wahrscheinlichkeit für genau 2 Schäden, die 101 nicht überschreiten, ist $0{,}016375 \cdot 0{,}84 = 0{,}013755$. Also

$$\mathbb{P}\{S \le 101\} \ge 0{,}818731 + 0{,}163746 + 0{,}013755 = 0{,}996232\,.$$

Somit ist das gesuchte Kapital 101.

Aufgabe 3 (Tarifierung)

Ein Versicherungsunternehmen hat einen Bestand, der sich zu 60% aus Risiken des Typs A und zu 40% aus Risiken des Typs B zusammensetzt:

- Jedes dieser Risiken hat pro Jahr entweder keinen oder genau einen Schaden von 1.000 €.
- Schäden treten stochastisch unabhängig auf.
- Die beiden Risikotypen unterscheiden sich nur in der Schadeneintrittswahrscheinlichkeit:
  Typ A: Schadeneintrittswahrscheinlichkeit 0,2
  Typ B: Schadeneintrittswahrscheinlichkeit 0,5

- Das Versicherungsunternehmen differenziert die Nettorisikoprämie mit einem Bonus-System, das aus der Einstiegsklasse 0 und den Bonusklassen 1 und 2 besteht.
- Tritt kein Schaden ein, wird das Risiko im nächsten Jahr von 0 auf 1 bzw. von 1 auf 2 hochgestuft bzw. bleibt in 2.
- Tritt ein Schaden ein, wird das Risiko im nächsten Jahr von 2 auf 1 bzw. von 1 auf 0 zurückgestuft bzw. bleibt in 0.

a) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für ein Risiko für das erste Jahr in der Einstiegsklasse 0, wenn für das Risiko noch keine Schadenerfahrung vorliegt.
b) Wie setzen sich die Risiken in der Bonusklasse 1 nach drei Jahren zusammen, wenn anfangs alle Risiken in der Einstiegsklasse 0 waren?
c) Berechnen Sie risikogerechte Nettorisikoprämien für die Risiken in den Klassen 0 und 2 für das vierte Jahr, wenn also eine Schadenerfahrung von drei Jahren vorliegt.
Beurteilen Sie anhand dieser Ergebnisse die Eignung dieses Bonussystems im vorliegenden Fall stichwortartig.

Lösung

Zu a)

Die Nettorisikoprämie in der Einstiegsklasse 0 im ersten Jahr ist gerade die Nettorisikoprämie des Kollektivs:

$$(1.000 \cdot 0{,}2) \cdot 0{,}6 + (1.000 \cdot 0{,}5) \cdot 0{,}4 = 320\,.$$

Zu b)

Übergangsmatrix für Risikotyp A

$$P_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Zustandsvektor zum Zeitpunkt $t = 0$: $p_{\mathrm{A}}^0 = (1; 0; 0)$, d. h. nach null Jahren.
Zustandsvektor zum Zeitpunkt $t = 1$: $p_{\mathrm{A}}^1 = (0{,}2; 0{,}8; 0)$, d. h. nach einem Jahr.
Zustandsvektor zum Zeitpunkt $t = 2$: $p_{\mathrm{A}}^2 = (0{,}2; 0{,}16; 0{,}64)$, d. h. nach zwei Jahren.
Zustandsvektor zum Zeitpunkt $t = 3$: $p_{\mathrm{A}}^3 = (0{,}072; 0{,}288; 0{,}64)$, d. h. nach drei Jahren.

Übergangsmatrix für Risikotyp B

$$P_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Zustandsvektor zum Zeitpunkt $t = 0$: $p_{\mathrm{A}}^0 = (1; 0; 0)$, d. h. nach null Jahren.
Zustandsvektor zum Zeitpunkt $t = 1$: $p_{\mathrm{B}}^1 = (0{,}5; 0{,}5; 0)$, d. h. nach einem Jahr.
Zustandsvektor zum Zeitpunkt $t = 2$: $p_{\mathrm{B}}^2 = (0{,}5; 0{,}25; 0{,}25)$, d. h. nach zwei Jahren.
Zustandsvektor zum Zeitpunkt $t = 3$: $p_{\mathrm{B}}^3 = (0{,}375; 0{,}375; 0{,}25)$, d. h. nach drei Jahren.

Zusammensetzung der Risiken in der Bonusklasse 1 nach drei Jahren:

Anteil der Risken vom Typ A: $0{,}288 \cdot 0{,}6/(0{,}288 \cdot 0{,}6 + 0{,}375 \cdot 0{,}4) = 53{,}5\%$.

Anteil der Risken vom Typ B: $0{,}375 \cdot 0{,}4/(0{,}288 \cdot 0{,}6 + 0{,}37 \cdot 0{,}4) = 46{,}5\%$.

Zu c)

Risikogerechte Prämie in der Einstiegsklasse 0 für das vierte Jahr:

$$\begin{aligned} &0{,}072 \cdot 0{,}6/(0{,}072 \cdot 0{,}6 + 0{,}375 \cdot 0{,}4) \cdot 200 \\ &+ 0{,}375 \cdot 0{,}4/(0{,}072 \cdot 0{,}6 + 0{,}375 \cdot 0{,}4) \cdot 500 = 432{,}92\,. \end{aligned}$$

Risikogerechte Prämie in der Bonusklasse 2 für das vierte Jahr:

$$\begin{aligned} &0{,}64 \cdot 0{,}6/(0{,}64 \cdot 0{,}6 + 0{,}25 \cdot 0{,}4) \cdot 200 \\ &+ 0{,}25 \cdot 0{,}4/(0{,}64 \cdot 0{,}6 + 0{,}25 \cdot 0{,}4) \cdot 500 = 261{,}98\,. \end{aligned}$$

Beurteilung:

Die Risiken des Typs A sind bereits nach drei Jahren überwiegend in der Bonusklasse 2. Ihr Beitrag in der Bonusklasse 2 ist mit 261,98 € zwar noch deutlich höher als der risikogerechte Beitrag in Höhe von 200,00 €, aber bereits deutlich niedriger als der anfängliche Beitrag in Höhe von 320,00 €.
Entsprechendes gilt für die Risiken des Typs B in der Einstiegsklasse 0.
Die Risiken des Typs B sind bereits nach drei Jahren überwiegend in der Einstiegsklasse (und der Bonusklasse 1). Ihr Beitrag ist mit 432,98 € in der Einstiegsklasse zwar noch niedriger als der risikogerechte Beitrag in Höhe von 500,00 €, aber bereits deutlich höher als der anfängliche Beitrag in Höhe von 320,00 €.

Fazit:

Dieses einfache Bonus-Systen differenziert also bereits nach drei Jahren recht gut.

Aufgabe 4 (Tarifierung)

Beim Transport eines Gefahrguts tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 kein Schaden und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 genau ein Schaden ein. Falls ein Schaden eintritt, ist die Schadenhöhe exponentialverteilt mit dem Erwartungswert 2.000 €.

a) Berechnen Sie die Bruttorisikoprämie nach Varianzprinzip mit dem Parameter $\beta = 1/100.000$.
b) Falls keine Schadenregulierung erfolgt, gibt es eine Beitragsrückerstattung in Höhe von 50 €. Die Bruttoprämie soll das 1,2-fache der Summe aus dem Erwartungswert der Schadenzahlung und der Beitragsrückerstattung betragen.
   (i) Berechnen Sie die Bruttoprämie, falls jeder eingetretene Schaden durch das Versicherungsunternehmen beglichen wird.
   (ii) Berechnen Sie die Bruttoprämie, falls bekannt ist, dass der Versicherungsnehmer einen Schaden nicht meldet, der kleiner ist als 50 € und er damit auch in diesem Fall die Beitragsrückerstattung erhält.

Lösung

N: Schadenzahl mit $\mathbb{P}\{N=0\}=0{,}9$ und $\mathbb{P}\{N=1\}=0{,}1$; $E[N]=0{,}1$; $\operatorname{Var}[N]=0{,}09$
X: Exponentialverteilte Schadenhöhe mit $E[X]=2.000$ und $\operatorname{Var}[X]=2.000^2$
S: Schaden
BRP: Bruttorisikoprämie
BP: Bruttoprämie

Zu a)

$$\begin{aligned} E[S] &= 0{,}1\cdot 2.000 = 200\,, \\ \operatorname{Var}[S] &= E[N]\operatorname{Var}[X]+\operatorname{Var}[N](E[X])^2 \\ &= 0{,}1\cdot 2.000^2+0{,}09\cdot 2.000^2 \\ &= 760.000\,, \\ \mathrm{BRP} &= 200+760.000/100.000 = 207{,}6\,. \end{aligned}$$

Zu b)

(i)

$$\mathrm{BP} = (50\cdot 0{,}9+0{,}1\cdot 2.000)\cdot 1{,}2 = 294\,.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \mathrm{BP} = \Bigg[& 50\cdot\left(0{,}9+0{,}1\int_0^{50}\exp(-x/2.000)/2.000\,\mathrm{d}x\right) \\ & +0{,}1\int_{50}^{\infty}\exp(-x/2.000)/2.000\cdot x\,\mathrm{d}x\Bigg]\cdot 1{,}2 \\ = {} & [50\cdot(0{,}9+0{,}1\cdot(1-\exp(-50/2.000))) \\ & +0{,}1\cdot(50\cdot\exp(-50/2.000)+2.000\cdot\exp(-50/2.000))]\cdot 1{,}2 \\ = {} & 294{,}07\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Reservierung)

Für einen Bestand von Risiken sind für die Anfalljahre 2004 bis 2007 die Prämien π_i und die aktuellen Schadenstände bekannt. Des Weiteren liegen auf der Grundlage eines Marktportfolios a-priori Schätzer $\widehat{\alpha}_i^{\text{extern}}$ für die erwarteten Endschadenstände und a-priori Schätzer $\widehat{\gamma}_k^{\text{extern}}$ für das Abwicklungsmuster für Quoten vor.

Anfall-jahr i	Abwicklungsjahr k: 0	1	2	3	Prämie π_i	a-priori Endschadenstand $\widehat{\alpha}_i^{\text{extern}}$
2004				561	660	600
2005			486		675	650
2006		441			750	700
2007	294				870	750
$\widehat{\gamma}_k^{\text{extern}}$	0,500	0,700	0,900	1,000		

Es wird angenommen, dass alle Schäden bis zum Ende des Abwicklungsjahres 3 vollständig abgewickelt werden.

a) Schätzen Sie die Reserve für das Kalenderjahr 2009 mit dem Bornhuetter–Ferguson Verfahren.
b) Schätzen Sie die Reserve für das Kalenderjahr 2009 mit dem Loss-Development Verfahren.
c) Schätzen Sie die Reserve für das Kalenderjahr 2009 mit dem Cape-Cod Verfahren.
d) Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Lösung

Der Schätzer der Reserve für das Kalenderjahr 2009 ist in allen Fällen durch

$$\widehat{R}_{2009} := (\widehat{S}_{2006,3} - \widehat{S}_{2006,2}) + (\widehat{S}_{2007,2} - \widehat{S}_{2007,1})$$

gegeben.

Zu a)

Für die Bornhuetter–Ferguson Prädiktoren erhält man

$$\begin{aligned}
\widehat{S}^{\text{BF}}_{2006,3} &= S_{2006,1} + \left(\widehat{\gamma}_3^{\text{extern}} - \widehat{\gamma}_1^{\text{extern}}\right)\widehat{\alpha}_{2006}^{\text{extern}} \\
&= 441 + (1{,}000 - 0{,}700) \cdot 700 = 651\,, \\
\widehat{S}^{\text{BF}}_{2006,2} &= S_{2006,1} + \left(\widehat{\gamma}_2^{\text{extern}} - \widehat{\gamma}_1^{\text{extern}}\right)\widehat{\alpha}_{2006}^{\text{extern}} \\
&= 441 + (0{,}900 - 0{,}700) \cdot 700 = 581\,, \\
\widehat{S}^{\text{BF}}_{2007,2} &= S_{2007,0} + \left(\widehat{\gamma}_2^{\text{extern}} - \widehat{\gamma}_0^{\text{extern}}\right)\widehat{\alpha}_{2007}^{\text{extern}} \\
&= 294 + (0{,}900 - 0{,}500) \cdot 750 = 594\,, \\
\widehat{S}^{\text{BF}}_{2007,1} &= S_{2007,0} + \left(\widehat{\gamma}_1^{\text{extern}} - \widehat{\gamma}_0^{\text{extern}}\right)\widehat{\alpha}_{2007}^{\text{extern}} \\
&= 294 + (0{,}700 - 0{,}500) \cdot 750 = 444\,.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\widehat{R}^{\text{BF}}_{2009} &= \left(\widehat{S}^{\text{BF}}_{2006,3} - \widehat{S}^{\text{BF}}_{2006,2}\right) + \left(\widehat{S}^{\text{BF}}_{2007,2} - \widehat{S}^{\text{BF}}_{2007,1}\right) \\
&= (651 - 581) + (594 - 444) = 220\,.
\end{aligned}$$

Zu b)

Für die Loss-Development Prädiktoren erhält man

$$\begin{aligned}
\widehat{S}^{\text{LD}}_{2006,3} &= \widehat{\gamma}_3^{\text{extern}} \cdot \frac{S_{2006,1}}{\widehat{\gamma}_1^{\text{extern}}} = 1{,}000 \cdot \frac{441}{0{,}700} = 630\,, \\
\widehat{S}^{\text{LD}}_{2006,2} &= \widehat{\gamma}_2^{\text{extern}} \cdot \frac{S_{2006,1}}{\widehat{\gamma}_1^{\text{extern}}} = 0{,}900 \cdot \frac{441}{0{,}700} = 567\,, \\
\widehat{S}^{\text{LD}}_{2007,2} &= \widehat{\gamma}_2^{\text{extern}} \cdot \frac{S_{2007,0}}{\widehat{\gamma}_0^{\text{extern}}} = 0{,}900 \cdot \frac{294}{0{,}500} = 529{,}2\,, \\
\widehat{S}^{\text{LD}}_{2007,1} &= \widehat{\gamma}_1^{\text{extern}} \cdot \frac{S_{2007,0}}{\widehat{\gamma}_0^{\text{extern}}} = 0{,}700 \cdot \frac{294}{0{,}500} = 411{,}6\,.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\widehat{R}^{\mathrm{LD}}_{2009} &= \big(\widehat{S}^{\mathrm{LD}}_{2006,3} - \widehat{S}^{\mathrm{LD}}_{2006,2}\big) + \big(\widehat{S}^{\mathrm{LD}}_{2007,2} - \widehat{S}^{\mathrm{LD}}_{2007,1}\big) \\ &= (630 - 567) + (529,2 - 411,6) = 180,6\,.\end{aligned}$$

Zu c)

Für die Cape-Cod Schadenquote erhält man

$$\begin{aligned}\widehat{\kappa}^{\mathrm{CC}} &= \frac{S_{2004,3} + S_{2005,2} + S_{2006,1} + S_{2007,0}}{\pi_{2004} \cdot \widehat{\gamma}_3^{\mathrm{extern}} + \pi_{2005} \cdot \widehat{\gamma}_2^{\mathrm{extern}} + \pi_{2006} \cdot \widehat{\gamma}_1^{\mathrm{extern}} + \pi_{2007} \cdot \widehat{\gamma}_0^{\mathrm{extern}}} \\ &= \frac{561 + 486 + 441 + 294}{660 + 607,5 + 525 + 435} = 0,800\,.\end{aligned}$$

Für die Cape-Cod Prädiktoren erhält man daher

$$\begin{aligned}\widehat{S}^{\mathrm{CC}}_{2006,3} &= S_{2006,1} + \big(\widehat{\gamma}_3^{\mathrm{extern}} - \widehat{\gamma}_1^{\mathrm{extern}}\big) \cdot \pi_{2006} \cdot \widehat{\kappa}^{\mathrm{CC}} \\ &= 441 + (1,000 - 0,700) \cdot 750 \cdot 0,800 = 621\,, \\ \widehat{S}^{\mathrm{CC}}_{2006,2} &= S_{2006,1} + \big(\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{extern}} - \widehat{\gamma}_1^{\mathrm{extern}}\big) \cdot \pi_{2006} \cdot \widehat{\kappa}^{\mathrm{CC}} \\ &= 441 + (0,900 - 0,700) \cdot 750 \cdot 0,800 = 561\,, \\ \widehat{S}^{\mathrm{CC}}_{2007,2} &= S_{2007,0} + \big(\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{extern}} - \widehat{\gamma}_0^{\mathrm{extern}}\big) \cdot \pi_{2007} \cdot \widehat{\kappa}^{\mathrm{CC}} \\ &= 294 + (0,900 - 0,500) \cdot 870 \cdot 0,800 = 572,4\,, \\ \widehat{S}^{\mathrm{CC}}_{2007,1} &= S_{2007,0} + \big(\widehat{\gamma}_1^{\mathrm{extern}} - \widehat{\gamma}_0^{\mathrm{extern}}\big) \cdot \pi_{2007} \cdot \widehat{\kappa}^{\mathrm{CC}} \\ &= 294 + (0,700 - 0,500) \cdot 870 \cdot 0,800 = 433,2\,.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\widehat{R}^{\mathrm{CC}}_{2009} &= \big(\widehat{S}^{\mathrm{CC}}_{2006,3} - \widehat{S}^{\mathrm{CC}}_{2006,2}\big) + \big(\widehat{S}^{\mathrm{CC}}_{2007,2} - \widehat{S}^{\mathrm{CC}}_{2007,1}\big) \\ &= (621 - 561) + (572,4 - 433,2) = 199,2\,.\end{aligned}$$

Zu d)

Unter den Schätzwerten für die Reserve für das Kalenderjahr 2009 ist der Schätzwert nach dem Bornhuetter–Ferguson Verfahren der größte und der Schätzwert nach dem Loss-Development Verfahren der kleinste. Da der Schätzwert nach dem Bornhuetter–Ferguson Verfahren deutlich höher ist als die Schätzwerte nach dem Loss-Development Verfahren und nach dem Cape-Cod Verfahren, ist zu vermuten, dass der vorliegende Bestand vom Marktportfolio abweicht. Das Cape-Cod Verfahren gleicht den ungewöhnlich niedrigen Schadenstand $S_{2007,0}$ aus.

Aufgabe 6 (Reservierung)

Das folgende Abwicklungsdreieck für Schadenstände enthält die kumulierten Schadenzahlungen $S_{i,k}$ und die Prämien π_i für die Anfalljahre 2004 bis 2007 in den Abwicklungsjahren 0 bis 3:

Anfall-	Abwicklungsjahr k				Prämie
jahr i	0	1	2	3	π_i
2004	90	150	200	220	250
2005	100	170	200		250
2006	110	160			250
2007	120				250

Es wird angenommen, dass alle Schäden bis zum Ende des Abwicklungsjahres 3 vollständig abgewickelt werden.

a) Schätzen Sie mit dem Chain-Ladder Verfahren das Abwicklungsmuster für Quoten.
b) Schätzen Sie mit dem Chain-Ladder Verfahren den Endschadenstand des Anfalljahres 2007.
c) Schätzen Sie mit dem additiven Verfahren das Abwicklungsmuster für Quoten.
d) Schätzen Sie mit dem additiven Verfahren den Endschadenstand des Anfalljahres 2007.
e) Vergleichen Sie die Schätzer für den Endschadenstand des Anfalljahres 2007.

Lösung

Zu a)

Für die Chain-Ladder Faktoren erhält man

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_1^{\mathrm{CL}} &= \frac{150+170+160}{90+100+110} = 1{,}600\,,\\
\widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}} &= \frac{200+200}{150+170} = 1{,}250\,,\\
\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} &= \frac{220}{200} = 1{,}100\,.
\end{aligned}$$

Für die Chain-Ladder Quoten gilt daher

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_3^{\mathrm{CL}} &= 1\,,\\
\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{CL}} &= \frac{\widehat{\gamma}_3^{\mathrm{CL}}}{\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}}} = \frac{1}{1{,}100} \approx 0{,}909\,,\\
\widehat{\gamma}_1^{\mathrm{CL}} &= \frac{\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{CL}}}{\widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}}} \approx \frac{0{,}909}{1{,}250} = 0{,}727\,,\\
\widehat{\gamma}_0^{\mathrm{CL}} &= \frac{\widehat{\gamma}_1^{\mathrm{CL}}}{\widehat{\varphi}_1^{\mathrm{CL}}} \approx \frac{0{,}727}{1{,}600} = 0{,}454\,.
\end{aligned}$$

Zu b)

Für den Chain-Ladder Prädiktor des Endschadenstandes des Anfalljahres 2007 ergibt sich

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{2007,3}^{\text{CL}} &= S_{2007,0} \cdot \widehat{\varphi}_1^{\text{CL}} \cdot \widehat{\varphi}_2^{\text{CL}} \cdot \widehat{\varphi}_3^{\text{CL}} \\ &= 120 \cdot 1{,}600 \cdot 1{,}250 \cdot 1{,}100 = 264\,.\end{aligned}$$

Zu c)

Aus dem Abwicklungsmuster für Schadenstände erhält man das Abwicklungsmuster für Zuwächse:

Anfall-	Abwicklungsjahr k				Prämie
jahr i	0	1	2	3	π_i
2004	90	60	50	20	250
2005	100	70	30		250
2006	110	50			250
2007	120				250

Für die additiven Schadenquotenzuwächse erhält man

$$\begin{aligned}\widehat{\zeta}_0^{\text{AD}} &= \frac{90+100+110+120}{250+250+250+250} = 0{,}420\,,\\ \widehat{\zeta}_1^{\text{AD}} &= \frac{60+70+50}{250+250+250} = 0{,}240\,,\\ \widehat{\zeta}_2^{\text{AD}} &= \frac{50+30}{250+250} = 0{,}160\,,\\ \widehat{\zeta}_3^{\text{AD}} &= \frac{20}{250} = 0{,}080\,.\end{aligned}$$

Für die additiven Quoten gilt daher

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}_0^{\text{AD}} &= \frac{\widehat{\zeta}_0^{\text{AD}}}{\widehat{\zeta}_0^{\text{AD}}+\widehat{\zeta}_1^{\text{AD}}+\widehat{\zeta}_2^{\text{AD}}+\widehat{\zeta}_3^{\text{AD}}} = \frac{0{,}420}{0{,}420+0{,}240+0{,}160+0{,}080} \approx 0{,}467\,,\\ \widehat{\gamma}_1^{\text{AD}} &= \frac{\widehat{\zeta}_0^{\text{AD}}+\widehat{\zeta}_1^{\text{AD}}}{\widehat{\zeta}_0^{\text{AD}}+\widehat{\zeta}_1^{\text{AD}}+\widehat{\zeta}_2^{\text{AD}}+\widehat{\zeta}_3^{\text{AD}}} = \frac{0{,}420+0{,}240}{0{,}420+0{,}240+0{,}160+0{,}080} \approx 0{,}733\,,\\ \widehat{\gamma}_2^{\text{AD}} &= \frac{\widehat{\zeta}_0^{\text{AD}}+\widehat{\zeta}_1^{\text{AD}}+\widehat{\zeta}_2^{\text{AD}}}{\widehat{\zeta}_0^{\text{AD}}+\widehat{\zeta}_1^{\text{AD}}+\widehat{\zeta}_2^{\text{AD}}+\widehat{\zeta}_3^{\text{AD}}} = \frac{0{,}420+0{,}240+0{,}160}{0{,}420+0{,}240+0{,}160+0{,}080} \approx 0{,}911\,,\\ \widehat{\gamma}_3^{\text{AD}} &= 1\,.\end{aligned}$$

Zu d)

Für den additiven Prädiktor des Endschadenstandes des Anfalljahres 2007 ergibt sich

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{2007,3}^{\text{AD}} &= S_{2007,0} + \widehat{Z}_{2007,1}^{\text{AD}} + \widehat{Z}_{2007,2}^{\text{AD}} + \widehat{Z}_{2007,3}^{\text{AD}} \\ &= S_{2007,0} + \pi_{2007}\big(\widehat{\zeta}_{2007,1}^{\text{AD}} + \widehat{\zeta}_{2007,2}^{\text{AD}} + \widehat{\zeta}_{2007,3}^{\text{AD}}\big) \\ &= 120 + 250 \cdot (0{,}24 + 0{,}16 + 0{,}08) = 240\,.\end{aligned}$$

Zu e)

Der additive Prädiktor des Endschadenstandes des Anfalljahres 2007 ist deutlich niedriger als der Chain-Ladder Prädiktor. Dies ist auf die Berücksichtigung der Prämien und auf den geringen Zuwachs $Z_{2006,1}$ mit dem daraus resultierenden niedrigen Wert von $\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}}$ und dem im Vergleich zu $\widehat{\gamma}_0^{\mathrm{CL}}$ relativ hohen Wert von $\widehat{\gamma}_0^{\mathrm{AD}}$ zurückzuführen.

Aufgabe 7 (Rückversicherung und Risikoteilung)

Sei $S = X_1 + \ldots + X_N$ der Gesamtschaden eines Versicherungsbestandes, der mit dem kollektiven Modell, also mit einer Schadenzahlverteilung für N und einer Schadenhöhenverteilung für X_i, beschrieben wird. Für diesen Bestand wird ein limitierter XL-Rückversicherungsvertrag mit Priorität M und Limit L vereinbart, bei dem der Rückversicherer bei einem Schaden der Größe $X > M$ das Minimum von $X - M$ und L bezahlt.

a) Geben Sie eine Formel an für die Nettorisikoprämie Π des Rückversicherers.
b) Berechnen Sie Π für die beiden Fälle, dass $E[N] = 1$ und X_i eine
   (i) Exponentialverteilung mit Dichte $f(x) = \exp(-x)$, $x > 0$, oder
   (ii) Pareto-Verteilung mit Dichte $f(x) = 2(1+x)^{-3}$, $x > 0$, besitzt.

Lösung

Zu a)

Die Leistung des Rückversicherers Y bei einem Schaden der Höhe X ist

$$Y = \min[\max(X - M, 0), L]\,,$$

und die Nettorisikoprämie ist als Erwartungswert der Leistung des Rückversicherers für den Bestand gegeben durch

$$\Pi = E[N]E[Y] = E[N]\left(\int_M^{M+L} (x-M)\,f(x)\,\mathrm{d}x + L\mathbb{P}\{X > M+L\}\right),$$

oder einfacher mit der Formel

$$E[Y] = \int_0^\infty \mathbb{P}\{Y > t\}\,\mathrm{d}t\,,$$

$$\Pi = E[N]\int_0^L \mathbb{P}\{X > t+M\}\,\mathrm{d}t\,.$$

Zu b)

Wegen $E[N] = 1$ ist $\Pi = E[Y]$.

(i) Für die angegebene Exponentialverteilung ist $\mathbb{P}\{X > t\} = \exp(-t)$ und damit

$$\Pi = E[Y] = \int_0^L \exp(-t-M)\,\mathrm{d}t = \exp(-M)(1-\exp(-L))\,.$$

(ii) Für die angegebene Pareto-Verteilung ist $\mathbb{P}\{X > t\} = (1+t)^{-2}$ und damit

$$\begin{aligned}\Pi = E[Y] &= \int_0^L (1+t+M)^{-2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{1+M}^{1+M+L} t^{-2}\,\mathrm{d}t = \frac{L}{(1+L+M)(1+M)}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 8 (Rückversicherung und Risikoteilung)

Zwei Versicherer wollen gemeinsam ein Risiko S_0 teilen, welches mit dem kollektiven Modell beschrieben wird, bei dem die Schadenanzahl eine Poissonverteilung besitzt. Versicherer 1 bewertet ein Risiko S mit einem Erwartungswertprinzip:

$$\pi_1(S) = E[S](1+\beta_1)\,,$$

während Versicherer 2 ein Varianzprinzip verwendet:

$$\pi_2(S) = E[S] + \beta_2 \mathrm{Var}(S)\,.$$

Hierbei sind β_1, β_2 positive Konstanten. Die Risikoteilung soll nun so erfolgen, dass die Summe der Prämien $\pi_1(S_1) + \pi_2(S_2)$ minimal ist, wobei $S_0 = S_1 + S_2$ die Aufteilung des Risikos ist.

a) Berechnen Sie die optimale *proportionale* Risikoteilung

$$S_0 = \alpha S_0 + (1-\alpha) S_0\,.$$

b) Welches optimale α ergibt sich unter der Voraussetzung, dass beide Versicherer das Gesamtrisiko S_0 gleich bewerten, also wenn $\pi_1(S_0) = \pi_2(S_0)$ gilt?

Lösung

Ist $S = X_1 + \ldots + X_N$ mit Poisson-verteilter Schadenanzahl, dann gilt $E[S] = E[N]E[X]$ und $\mathrm{Var}(S) = E[N]E[X^2]$.

Zu a)

Für $0 \leq \alpha \leq 1$ ist $E[\alpha S_0] = E[N]\alpha E[X]$ und

$$\mathrm{Var}(\alpha S_0) = E[N]\alpha^2 E[X^2]\,.$$

Damit wird

$$\pi_1((1-\alpha)S_0) + \pi_2(\alpha S_0) = E[N]\big\{(1-\alpha)(1+\beta_1)E[X] + \alpha E[X] + \alpha^2 \beta_2 E[X^2]\big\}\,.$$

Die Ableitung der geschweiften Klammer ist

$$-(1+\beta_1)E[X] + E[X] + 2\alpha\beta_2 E[X^2]\,,$$

und dieser Ausdruck ist Null genau dann, wenn

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{\beta_1}{2\beta_2} \frac{E[X]}{E[X^2]} .$$

Das optimale α ist demnach $\alpha = \alpha_0$ oder $\alpha = 1$. Letzteres ist nur dann der Fall, wenn $\alpha_0 \geq 1$.

Zu b)

$\pi_1(S_0) = \pi_2(S_0)$ ist wahr genau dann, wenn

$$E[N]E[X](1+\beta_1) = E[N]\big(E[X]+\beta_2 E[X^2]\big) ,$$

und das ist der Fall, wenn $\beta_1 E[X] = \beta_2 E[X^2]$. Dann ist mit obiger Notation $\alpha_0 = 1/2$, und $\alpha = \alpha_0 = 1/2$ ist dann auch optimal.

Aufgabe 9 (Zusatzaufgabe I)

Eine Versicherte modelliert einen ihrer Versicherungsverträge wie ein kollektives Modell als $\{N, \{X_k : k \in \mathbb{N}\}\}$. Dabei nimmt sie an, dass N Poisson-verteilt ist mit Mittelwert 0,1 und X_k gleichverteilt ist auf (0, 1.000). Falls kein Schaden gemeldet wird, erhält die Versicherte eine Prämienrückerstattung der Höhe 20. Sie denkt sich nun folgende Strategie aus: Sie wählt eine Schranke x_0. Sie meldet einen Schaden nur, falls der Schaden x_0 überschreitet oder falls sie schon früher einen Schaden gemeldet hat. Ein eingetretener Schaden muss sofort gemeldet werden, kann also nicht erst gemeldet werden, wenn ein weiterer Schaden bekannt ist. Die Versicherte will nun das x_0 finden, für das die obige Strategie die erwarteten Kosten minimiert.

a) Bedingt auf $\{N = n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, wie viele Schäden werden im Durchschnitt nicht gemeldet?
b) Wie viele Schäden werden im Durchschnitt nicht gemeldet, und wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Schaden gemeldet wird?
c) Finden Sie die Gleichung, aus der die Versicherte das optimale x_0 finden kann.

Lösung

Setzen wir $p = \mathbb{P}\{X_k \leq x_0\}$ und die Schadenintensität $\lambda = 0{,}1$.

Zu a)

Die Verteilung der Anzahl K nicht gemeldeter Schäden bedingt auf $\{N = n\}$ ist $\mathbb{P}\{K = k \mid N = n\} = p^k(1-p)$, falls $k < n$, und $\mathbb{P}\{K = n \mid N = n\} = p^n$. Damit haben wir $\mathbb{P}\{K \geq \ell \mid N = n\} = p^\ell$ für $\ell \in \{0, 1, \ldots , n\}$. Dies ergibt den Erwartungswert

$$E[K \mid N = n] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{K \geq k \mid N = n\} = \sum_{k=1}^{n} p^k = p\frac{1-p^n}{1-p} .$$

Zu b)

Die Formel aus a) gilt auch für $n = 0$. Also erhalten wir mittels der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} E[K] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[K \mid N = n]\mathbb{P}\{N = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} p\frac{1-p^n}{1-p}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &= \frac{p}{1-p}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}\right). \end{aligned}$$

Kein Schaden wird gemeldet, falls $K = N$, also mit Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\{N = K\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{K = n \mid N = n\}\mathbb{P}\{N = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}.$$

Dies hätte man auch so herleiten können. Die Anzahl der Schäden größer als x_0 sind Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda\mathbb{P}\{X_k > x_0\} = \lambda(1-p)$. Die Wahrscheinlichkeit für 0 Schäden größer als x_0 ist also $\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}$.

Zu c)

Die erwarteten Kosten sind die selbst bezahlten Schäden minus die Rückerstattung. Wir bezeichnen die Rückerstattung mit $R = 20$. Ein selbst bezahlter Schaden ist im Mittel

$$E[X_k \mid X_k \le x_0] = \frac{\int_0^{x_0} x \,\mathrm{d}F(x)}{F(x_0)},$$

wobei $F(x)$ die Schadensverteilung bezeichnet. Somit sind die erwarteten Kosten

$$\frac{p}{1-p}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}\right)\frac{\int_0^{x_0} x\,\mathrm{d}F(x)}{F(x_0)} - R\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}.$$

Für die Gleichverteilung und die Parameter ergibt dies

$$\frac{x_0}{1.000-x_0}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1(1.000-x_0)/1.000}\right)\frac{x_0}{2} - 20\mathrm{e}^{-0,1(1.000-x_0)/1.000}.$$

Es ist zweckmäßig $(1.000 - x_0)/1.000$ durch y_0 zu ersetzen und den Ausdruck durch 1.000 zu teilen

$$\frac{(1-y_0)^2}{2y_0}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1y_0}\right) - 0,02\mathrm{e}^{-0,1y_0}.$$

Die Ableitung ist

$$\frac{y_0^2-1}{2y_0^2}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1y_0}\right) + 0,1\left(\frac{(1-y_0)^2}{2y_0} + 0,02\right)\mathrm{e}^{-0,1y_0}.$$

Die zu lösende Gleichung wird dann

$$(y_0^2-1)\left(1-\mathrm{e}^{-0,1y_0}\right) + 0,1y_0\left((1-y_0)^2 + 0,04y_0\right)\mathrm{e}^{-0,1y_0} = 0.$$

Diese Gleichung muss numerisch gelöst werden. Die Lösung, die in der Aufgabe nicht verlangt war, ist $y_0 = 0{,}980974$, also $x_0 = 19{,}026$. Die erwarteten Kosten sind dann $-0{,}018114$. Wählen wir $x_0 = 20$, so sind die erwarteten Kosten $-0{,}0181139$. Der Gewinn durch das optimale x_0 ist also minimal. Dies liegt daran, dass zwei oder mehr Schäden mit der sehr kleinen Wahrscheinlichkeit 0,004679 auftreten.

Aufgabe 10 (Zusatzaufgabe II)

Zu den beiden Tarifmerkmalen Geschlecht (Mann und Frau) und Alter (Kind, Erwachsener und Senior/Seniorin) sind die Gesamtschäden der resultierenden Tarifklassen (in T€) des Bestands eines Haftpflichtversicherers in der folgenden Schadentafel angegeben:

	Kind $j=1$	Erwachsener $j=2$	Senior $j=3$
Mann; $i=1$	100	400	300
Frau; $i=2$	50	200	200

Die Anzahl der Jahreseinheiten beträgt in allen Tarifklassen 1.000.

a) Berechnen Sie die (ausgeglichenen) Bedarfsprämien in den sechs Tarifklassen mit dem Marginalsummenverfahren zum Ausgleich der obigen Schadentafel.
Verwenden Sie dabei die Startwerte $v_j^{(0)} = 1$ $(j = 1, 2, 3)$.
b) Welche Bedarfsprämien erhält man, wenn man als Startwerte $v_j^{(0)} = 2$ $(j = 1, 2, 3)$ verwendet. (Begründen Sie Ihre Antwort.)

Lösung

s_{ij}: Gesamtschaden in Tarifklasse i, j (in T€ gemäß obiger Schadentafel)
n_{ij}: Volumen; Anzahl der Jahreseinheiten in Tarifklasse i, j
$n_{..} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} n_{ij} = 6.000$: Gesamtzahl der Versicherungsnehmer des Bestands
$\mathrm{SB}_{ij} = s_{ij}/n_{ij}$: Schadenbedarf eines Versicherungsnehmers in Tarifklasse i, j (in €)
PM: Schadenbedarfsdurchschnitt des Gesamtkollektivs (in €)
b_{ij}: Bedarfsprämie in Tarifklasse i, j (in €)

$$\mathrm{PM} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{n_{ij}}{n_{..}}\mathrm{SB}_{ij} = (100+400+300+50+200+200)/6 = 208{,}33\,.$$

Zu a)

1. Iterationsschritt

$$u_1^{(1)} = \frac{\sum_{j=1}^{3} n_{1j}\mathrm{SB}_{1j}}{\sum_{j=1}^{3} n_{1j}\cdot\mathrm{PM}\cdot v_j^{(0)}} = \frac{100+400+300}{208{,}33\cdot 3} = 1{,}28\,,$$

$$u_2^{(1)} = \frac{\sum_{j=1}^{3} n_{2j}\mathrm{SB}_{2j}}{\sum_{j=1}^{3} n_{2j}\cdot\mathrm{PM}\cdot v_j^{(0)}} = \frac{50+200+200}{208{,}33\cdot 3} = 0{,}72\,,$$

$$v_1^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{2} n_{i1}\mathrm{SB}_{i1}}{\sum_{i=1}^{2} n_{i1}\cdot\mathrm{PM}\cdot u_i^{(1)}} = \frac{100+50}{208{,}33\cdot(1{,}28+0{,}72)} = 0{,}360\,,$$

$$v_2^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{2} n_{i2}\mathrm{SB}_{i2}}{\sum_{i=1}^{2} n_{i2}\cdot\mathrm{PM}\cdot u_i^{(1)}} = \frac{400+200}{208{,}33\cdot(1{,}28+0{,}72)} = 1{,}440\,,$$

$$v_3^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{2} n_{i3}\mathrm{SB}_{i3}}{\sum_{i=1}^{2} n_{i3}\cdot\mathrm{PM}\cdot u_i^{(1)}} = \frac{300+200}{208{,}33\cdot(1{,}28+0{,}72)} = 1{,}200\,.$$

2. Iterationsschritt

$$u_1^{(2)} = \frac{\sum_{j=1}^{3} n_{1j}\mathrm{SB}_{1j}}{\sum_{j=1}^{3} n_{1j}\cdot \mathrm{PM}\cdot v_j^{(1)}} = \frac{100+400+300}{208{,}33\cdot(0{,}360+1{,}440+1{,}200)} = 1{,}28\,,$$

$$u_2^{(2)} = \frac{\sum_{j=1}^{3} n_{2j}\mathrm{SB}_{2j}}{\sum_{j=1}^{3} n_{2j}\cdot \mathrm{PM}\cdot v_j^{(1)}} = \frac{50+200+200}{208{,}33\cdot(0{,}360+1{,}440+1{,}200)} = 0{,}72\,.$$

Wegen $u_1^{(1)} = u_1^{(2)}$ und $u_2^{(1)} = u_2^{(2)}$ gilt $u_1^{(2)} = u_1^*$ und $u_2^{(2)} = u_2^*$ sowie $v_1^{(1)} = v_1^*$ und $v_2^{(1)} = v_2^*$ und $v_3^{(1)} = v_3^*$ ergeben sich die Bedarfsprämien (in €) in den Tarifklassen i, j:

$$b_{11} = 208{,}33\cdot u_1^*\cdot v_1^* = 96\,; \quad b_{12} = 208{,}33\cdot u_1^*\cdot v_2^* = 384\,; \quad b_{13} = 208{,}33\cdot u_1^*\cdot v_3^* = 320\,,$$
$$b_{21} = 208{,}33\cdot u_2^*\cdot v_1^* = 54\,; \quad b_{22} = 208{,}33\cdot u_2^*\cdot v_2^* = 216\,; \quad b_{23} = 208{,}33\cdot u_2^*\cdot v_3^* = 180\,.$$

Zu b)

Die Faktoren u_i^* und v_j^* ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$) sind bis auf einen multiplikativen Faktor bzw. dessen Inverses eindeutig bestimmt. Daher ergeben sich die gleichen Bedarfsprämien.