Blätter DGVFM
DOI 10.1007/s11857-007-0027-x

ACTUARIAL EXAMS

Bericht zur Prüfung im Mai 2007 über Schadenversicherungsmathematik (Grundwissen)

Christian Hipp · Martin Morlock · Hanspeter Schmidli · Klaus D. Schmidt

Received: 22 Juli 2007

Am 5. Mai 2007 fand die DAV-Prüfung zur Schadenversicherungsmathematik (Grundwissen) statt. Von den 130 Teilnehmern und Teilnehmerinnen haben 96 bestanden.
Zu jedem der Gebiete Risikomodelle, Tarifierung, Schadenreservierung, Risikoteilung und Rückversicherung waren jeweils zwei Aufgabe sowie ferner zwei Zusatzaufgaben gestellt worden. Eine oder zwei Zusatzaufgaben wurden nur gewertet, wenn eine bzw. zwei der anderen Aufgaben nicht bearbeitet waren oder als nicht bearbeitet gekennzeichnet worden war.
Als Hilfsmittel war die klassische Formelsammlung sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner zugelassen.
Bei jeder Aufgabe konnten maximal 15 Punkte erreicht werden. Die Klausur wurde als bestanden gewertet, wenn 48 der 120 möglichen Punkte erreicht wurden.

Aufgabe 1 (Risikomodelle)

Ein kollektiver Versicherungsvertrag erzeugt in einem Jahr N Schäden mit Schadenshöhen $\{X_k\}$, wobei alle Variablen stochastisch unabhängig sind. Die Verteilung von N ist gegeben durch

$$P[N=n] = \frac{q^{n+1}}{-(n+1)\ln(1-q)}\,, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\,,$$

wobei $q = 0{,}37137$. Die Schäden sind identisch verteilt mit der Verteilung

x	100	200	300	500	700	1.000
$P[X=x]$	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1

a) Berechnen Sie die Nettoprämie und die Varianz für das Risiko $\sum_{k=1}^N X_k$.
Hinweis: Es gilt $Var[N+1] = Var[N]$.
b) Wie ändert sich die Nettoprämie, wenn ein jährlicher Selbstbehalt von 250 für den Gesamtschaden vereinbart wird?
Hinweis: Es gilt $P[N=0] = 0{,}8$.

Martin Morlock, Gießen, Deutschland, e-mail: martin.e.morlock@wirtschaft.uni-giessen.de

Lösung:

Zu a)
Der Erwartungswert von N ist

$$E[N] = E[N+1] - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{q^{n+1}}{-(n+1)\log(1-q)} - 1$$
$$= \frac{q}{-(1-q)\log(1-q)} - 1 = \frac{0{,}8}{1-0{,}37137} - 1 = 0{,}27261\,.$$

Die Varianz von N ist $Var[N] = Var[N+1]$. Das zweite Moment wird

$$E[(N+1)^2] = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \frac{q^{n+1}}{-(n+1)\log(1-q)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{q^{n+1}}{-\log(1-q)}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} \frac{q^{n+1}}{-\log(1-q)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m+1}}{-(1-q)\log(1-q)}$$
$$= \frac{q}{-(1-q)^2\log(1-q)} = \frac{0{,}8}{(1-0{,}37137)^2} = 2{,}02442\,.$$

Dies ergibt für die Varianz $Var[N] = 2{,}02442 - 1{,}27261^2 = 0{,}40488$.
Für den Mittelwert der Schadenshöhe X erhalten wir

$$E[X] = 0{,}3 \cdot 100 + 0{,}2 \cdot (200+300) + 0{,}1 \cdot (500+700+1.000) = 350\,.$$

Die Varianz wird

$$Var[X] = 0{,}3 \cdot (250)^2 + 0{,}2 \cdot (150^2 + 50^2) + 0{,}1 \cdot (150^2 + 350^2 + 650^2) = 80.500\,.$$

Somit erhalten wir für die Nettoprämie

$$E[N]E[X] = 0{,}27261 \cdot 350 = 95{,}4135\,.$$

Die Varianz wird

$$E[N]Var[X] + Var[N]E[X]^2 = 0{,}27261 \cdot 80.500 + 0{,}40488 \cdot 350^2 = 71.542{,}9\,.$$

Zu b)

Die Nettoprämie wird um die Kosten des Versicherten reduziert. Die Kosten für den Versicherten sind 0, falls kein Schaden auftritt, 100 falls ein Schaden der Höhe 100 eintritt, 200, falls ein Schaden der Höhe 200, oder zwei Schäden der Höhe 100 auftreten. In allen anderen Fällen ist der Schaden 250. Kein Schaden tritt mit Wahrscheinlichkeit 0,8 auf. Ein Schaden der Höhe 100 tritt mit Wahrscheinlichkeit

$$\frac{q^2}{-2\log(1-q)} 0{,}3 = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}37137}{2} 0{,}3 = 0{,}0445644$$

auf. Ein Schaden der Höhe 200 mit Wahrscheinlichkeit 0,0297096. Zwei Schäden der Höhe 100 mit Wahrscheinlichkeit

$$\frac{q^3}{-3\log(1-q)} 0{,}3^2 = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}37137^2}{3} 0{,}3^2 = 0{,}00330998\,.$$

Somit muss der ganze Selbstbehalt mit Wahrscheinlichkeit

$$1-0,8-0,0445644-0,0297096-0,00330998=0,122416$$

bezahlt werden. Die Nettoprämie wird dann

$$95,4135-0,0445644\cdot 100-(0,0297096+0,00330998)\cdot 200-0,122416\cdot 250=53,7491\,.$$

Die Varianz, dies war aber in der Aufgabe nicht verlangt, wird 68.340,2. Das Risiko wird also durch den Selbstbehalt nicht wesentlich kleiner. Dadurch, dass aber die Versicherung nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit von 12% statt mit 20% involviert ist, können Administrationskosten gesenkt werden.

Aufgabe 2 (Risikomodelle)

Ein Versicherer hat ein Portfolio, das durch eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung mit Schadensintensität $\lambda = 100$ und exponential verteilten Schäden mit Erwartungswert 1 modelliert wird. Mit Hilfe der ersten drei Momente des Gesamtschadens wird nun die Verteilung geeignet approximiert.

a) Wie groß muss das Eigenkapital sein, wenn die Überwachungsbehörde einen Value-at-Risk von 0,99 verlangt, das heißt, dass die Schäden mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% gedeckt sind?
b) Der Versicherer hat ein Eigenkapital von 102. Daher wird eine proportionale Rückversicherung abgeschlossen. Bezeichnen wir den Anteil, den die Rückversicherung bezahlt mit b. Die Rückversicherungsprämie ist $101b$. Wie groß ist der minimale Anteil der Rückversicherung, so dass das Eigenkapital ausreicht, um den Value-at-Risk einzuhalten?

Lösung:

Zu a)

Die Normal-Power-Approximation ist eine geeignete Approximation der Gesamtschadenverteilung.
Die Momente der Exponentialverteilung sind $\mu_k = k!$. Einsetzen in die Normal-Power-Approximation ergibt die Approximation

$$\Phi\left(\left\{\frac{9\cdot 100\cdot 2^3}{6^2}+\frac{6\cdot 2}{6}(x-100\cdot 1)+1\right\}^{\frac{1}{2}}-\frac{3\sqrt{100}\,2^{\frac{3}{2}}}{6}\right)=\Phi\left(\sqrt{2x+1}-10\sqrt{2}\right)\,.$$

Aus der Tabelle finden wir das 99% Quantil 2,3263. Somit haben wir die Gleichung $\sqrt{2x+1}-10\sqrt{2}=2{,}3263$, also $x=\frac{1}{2}(199+2{,}3263^2)=102{,}206$.

Zu b)

Nach der Rückversicherung ist die Schadensverteilung für den Versicherer

$$P[(1-b)X\le x]=P\left[X\le\frac{x}{1-b}\right]=1-\exp\left\{\frac{-x}{1-b}\right\}\,,$$

also exponential verteilt mit Mittelwert $1-b$. Die Momente werden nun $\mu_k^b = (1-b)^k k!$. Die Normal-Power-Approximation wird

$$\Phi\left(\sqrt{\frac{2x}{1-b}+1}-10\sqrt{2}\right).$$

Das benötigte Kapital ist dann zuzüglich der Rückversicherungsprämie

$$102{,}206(1-b)+101b = 102\,.$$

Das ergibt die Lösung $b = 0{,}170813$.

Aufgabe 3 (Tarifierung)

Der Gesamtschaden X eines Kollektivs sei exponentialverteilt mit dem Erwartungswert 100.

a) Berechnen Sie die Prämie π nach dem Exponentialprinzip

$$\pi = \frac{1}{a}\ln\left(E\left(e^{aX}\right)\right)$$

für $a = 0{,}005$.

b) Berechnen Sie den Sicherheitszuschlag als Differenz zwischen der Prämie π und der Nettorisikoprämie.

c) Wie groß muss der Parameter β bei Anwendung des Varianzprinzips $\pi_V = E(X)+\beta\cdot Var(X)$ sein, damit der Sicherheitszuschlag bei beiden Prämienprinzipien gleich groß ist?

d) Berechnen Sie bei einem Startkapital (Anfangsreserve) von $s = 1.000$ eine obere Schranke für die Ruinwahrscheinlichkeit $\Psi(s)$ nach Cramer-Lundberg:

$$\Psi(s) \le e^{-R\cdot s}\,.$$

Lösung:

Zu a)

Die beim Exponentialprinzip verwendete momenterzeugende Funktion des Gesamtschadens X hat die Form:

$$\begin{aligned} E\left(e^{aX}\right) &= \int_0^\infty e^{ax}\cdot 0{,}01\cdot e^{-0{,}01x}dx \\ &= \frac{1}{a-0{,}01}\cdot 0{,}01\cdot e^{(a-0{,}01)x}\Big|_0^\infty \\ &= \frac{0{,}01}{0{,}01-a}\,. \end{aligned}$$

Damit erhält man als Prämie π

$$\pi = \frac{1}{0{,}005}\ln\left(\frac{0{,}01}{0{,}01-0{,}005}\right) = 138{,}63\,.$$

Zu b)

Sicherheitszuschlag $\pi - E(X) = 38,63$.

Zu c)

Die Prämie π_V nach dem Varianzprinzip beträgt

$$\pi_V = E(X) + \beta \cdot Var(X) = 138{,}63 = 100 + \beta \cdot 10.000\,.$$

Damit gilt $\beta = 0{,}003863$.

Zu d)

Den Anpassungskoeffizient R erhält man als positive Lösung aus der Bestimmungsgleichung

$$E\left[e^{r(X-\pi)}\right] = 1\,,$$

$$E\left[e^{r\cdot 1/0{,}005\cdot \ln(E(\exp(0{,}005X)))}\right] = e^{r\cdot 1/0{,}005\cdot \ln(E(\exp(0{,}005X)))} = E\left[e^{rX}\right]\,,$$

$$e^{r\cdot 1/0{,}005\cdot \ln(E(\exp(0{,}005X)))} = E\left[e^{0{,}005X}\right]^{r/0{,}005} = E\left[e^{rX}\right]\,.$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich $R = 0{,}005$ und damit bei einem Startkapital (Anfangsreserve) von $s = 1.000$ als obere Schranke für die Ruinwahrscheinlichkeit

$$\Psi(1.000) \leq e^{-0{,}005\,\cdot\,1.000} = 0{,}0067\,.$$

Aufgabe 4 (Tarifierung)

Von einem Risiko ist bekannt, dass es mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 zum Typ I gehört, bei dem pro Jahr mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 kein Schaden und mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 ein Schaden der Höhe 100 eintritt.
Mit der Wahrscheinlichkeit 0,8 gehört es zum Typ II, bei dem pro Jahr mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 kein Schaden und mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 ein Schaden der Höhe 100 eintritt. Die Schadenereignisse werden als stochastisch unabhängig angenommen.

a) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für den Fall, dass nicht bekannt ist, ob das Risiko zum Typ I oder II gehört.
b) Berechnen Sie mit Hilfe des Theorems von Bayes die Nettorisikoprämie auf der Erfahrungsbasis, dass in drei Jahren genau ein Schaden eingetreten ist.
c) Das Versicherungsunternehmen verwendet zur Erfahrungstarifierung folgendes Bonussystem mit der Einstiegsklasse A und den Bonusklassen B und C:
   Tritt kein Schaden auf, dann wird das Risiko im Folgejahr von A nach B bzw. von B nach C hochgestuft oder bleibt in C.
   Tritt ein Schaden auf, dann wird das Risiko im Folgejahr von C nach B bzw. von B nach A zurückgestuft oder bleibt in A.
   ca) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Risiko des Typs I bzw. II nach drei Jahren in der Klasse B?
   cb) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für einen Versicherungsnehmer, der nach drei Jahren in der Bonusklasse B ist und von dem nicht bekannt ist, ob er zum Typ I oder II gehört.
d) Stellt sich eine stationäre Verteilung der Risiken auf die Klassen A, B und C bereits nach drei Jahren ein?

Lösung:

Zu a)

Nettorisikoprämie für Typ I: 10,
Nettorisikoprämie für Typ II: 30,
Nettorisikoprämie ohne a priori-Information: $0{,}2 \cdot 10 + 0{,}8 \cdot 30 = 26$.

Zu b)

Bayes-Ansatz – bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$P(I|0,\,0,\,1) =$ bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Risiko vom Typ I ist, falls in drei Jahren genau ein Schaden aufgetreten ist.
Auf Grund der Unabhängigkeit der Schadenereignisse ist es gleichgültig, in welchem Jahr (hier im dritten) der Schaden eingetreten ist.

$$\begin{aligned} P\,(I \mid 0,\ 0,\ 1) &= \frac{P(\,0,0,1 \mid I) \cdot P(I)}{P(\,0,0,1 \mid I) \cdot P(I) + P(\,0,0,1 \mid II) \cdot P(II)} \\ &= \frac{0{,}9^2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}9^2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8} = 0{,}1211\,. \end{aligned}$$

Nettorisikoprämie: $0{,}1211 \cdot 10 + (1 - 0{,}1211) \cdot 30 = 27{,}58\,$.

Zu ca)

Transponierter Startzustandsvektor; Übergangsmatrix Typ I

$$p^0 = (1;\ 0;\ 0)\,; \quad \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

Linksmultiplikation liefert nach 1, 2, und 3 Jahren:

$$\begin{aligned} p^1 &= (0{,}1;\ 0{,}9;\ 0)\ , \\ p^2 &= (0{,}1;\ 0{,}09;\ 0{,}81)\ , \\ p^3 &= (0{,}019;\ 0{,}171;\ 0{,}81)\ . \end{aligned}$$

Typ I ist nach drei Jahren mit Wahrscheinlichkeit 0,171 in B.

Transponierter Startzustandsvektor; Übergangsmatrix Typ II

$$p^0 = (1;\ 0;\ 0)\,; \quad \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Linksmultiplikation liefert nach 1, 2, und 3 Jahren:

$$\begin{aligned} p^1 &= (0{,}3;\ 0{,}7;\ 0)\ , \\ p^2 &= (0{,}3;\ 0{,}021;\ 0{,}49)\ , \\ p^3 &= (0{,}153;\ 0{,}357;\ 0{,}49)\ . \end{aligned}$$

Typ II ist nach drei Jahren mit Wahrscheinlichkeit 0,357 in B.

Zu cb)

Nettorisikoprämie in Klasse B:

$$\frac{0,171 \cdot 0,2}{0,171 \cdot 0,2 + 0,357 \cdot 0,8} \cdot 10 + \frac{0,357 \cdot 0,8}{0,171 \cdot 0,2 + 0,357 \cdot 0,8} \cdot 30 = 27,86\,.$$

Zu d)

Wie man durch eine weitere Linksmultiplikation des Zustandsvektors mit der Übergangsmatrix unmittelbar sieht, ist kein stationärer Zustand erreicht. Beispielsweise ändert sich die dritte Komponente des Zustandsvektors im darauffolgenden Jahr:

$$p^4 = (....;\ ....;\ 0,5929)\ .$$

Aufgabe 5 (Schadenreservierung)

Das folgende Abwicklungsdreieck für Schadenstände enthält die kumulierten Schadenzahlungen $S_{i,k}$ und die Prämien π_i für die Anfalljahre 2003 bis 2006 in den Abwicklungsjahren 0 bis 3:

Anfall-jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2003	88	129	154	170	200
2004	98	144	170		225
2005	95	143			250
2006	99				275

Es wird angenommen, dass alle Schäden bis zum Ende des Abwicklungsjahres 3 vollständig abgewickelt werden.

a) Schätzen Sie mit dem additiven Verfahren den Endschadenstand des Anfalljahres 2005.
b) Schätzen Sie mit dem additiven Verfahren die Summe der Schadenzahlungen in 2008.
c) Schätzen Sie mit dem additiven Verfahren das Abwicklungsmuster für Quoten.
d) Wie wirkt sich eine Erhöhung aller Prämien um 12% auf diese Ergebnisse aus?

Lösung:

Aus dem Abwicklungsmuster für Schadenstände erhält man das Abwicklungsmuster für Zuwächse:

Anfall-jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2003	88	41	25	16	200
2004	98	46	26		225
2005	95	48			250
2006	99				275

Für die additiven Schadenquotenzuwächse erhält man

$$\widehat{\zeta}_0^{\mathrm{AD}} = \frac{88+98+95+99}{200+225+250+275} \;=\; 0{,}400\,,$$
$$\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}} = \frac{41+46+48}{200+225+250} \;=\; 0{,}200\,,$$
$$\widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}} = \frac{25+26}{200+225} \;=\; 0{,}120\,,$$
$$\widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}} = \frac{16}{200} \;=\; 0{,}080\,.$$

Zu a)

Für den Endschadenstand des Anfalljahres 2005 erhält man

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{2.005,3}^{\mathrm{AD}} = S_{2.005,1} + \widehat{Z}_{2.005,2}^{\mathrm{AD}} + \widehat{Z}_{2.005,3}^{\mathrm{AD}} \;&=\; S_{2.005,1} + \pi_{2005}\cdot\left(\widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}} + \widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}}\right)\\ = 143 + 250\cdot(0{,}120+0{,}080) \;&=\; 193\,.\end{aligned}$$

Zu b)

Für die Summe der Schadenzahlungen in 2008 erhält man

$$\begin{aligned}\widehat{Z}_{2.005,3}^{\mathrm{AD}} + \widehat{Z}_{2.006,2}^{\mathrm{AD}} &= \pi_{2005}\cdot\widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}} + \pi_{2006}\cdot\widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}}\\ &= 250\cdot 0{,}080 + 275\cdot 0{,}120 \;=\; 53\,.\end{aligned}$$

Zu c)

Für das Abwicklungsmuster für Quoten erhält man

$$\widehat{\gamma}_0^{\mathrm{AD}} = \frac{\widehat{\zeta}_0^{\mathrm{AD}}}{\widehat{\zeta}_0^{\mathrm{AD}}+\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}}+\widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}}+\widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}}} \;=\; \frac{0{,}400}{0{,}400+0{,}200+0{,}120+0{,}080} = 0{,}500\,,$$
$$\widehat{\gamma}_1^{\mathrm{AD}} = \frac{\widehat{\zeta}_0^{\mathrm{AD}}+\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}}}{\widehat{\zeta}_0^{\mathrm{AD}}+\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}}+\widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}}+\widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}}} \;=\; \frac{0{,}400+0{,}200}{0{,}400+0{,}200+0{,}120+0{,}080} = 0{,}750\,,$$
$$\widehat{\gamma}_2^{\mathrm{AD}} = \frac{\widehat{\zeta}_0^{\mathrm{AD}}+\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}}+\widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}}}{\widehat{\zeta}_0^{\mathrm{AD}}+\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}}+\widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}}+\widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}}} \;=\; \frac{0{,}400+0{,}200+0{,}120}{0{,}400+0{,}200+0{,}120+0{,}080} = 0{,}900\,,$$
$$\widehat{\gamma}_3^{\mathrm{AD}} = 1\,.$$

Zu d)

Die Prädiktoren des additiven Verfahrens ändern sich bei einer proportionalen Änderung aller Prämien nicht. Dies gilt auch für das Abwicklungsmuster für Quoten.

Aufgabe 6 (Schadenreservierung)

Für einen kleinen Bestand von Risiken sind für die Anfalljahre 2003 bis 2006 nur die Prämien und die aktuellen Schadenstände bekannt. Zur Schätzung der Endschadenstände der Anfalljahre 2004 bis 2005 soll ein externes Abwicklungsmuster für Quoten verwendet werden.

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2003				374	440
2004			324		450
2005		294			500
2006	196				580
$\widehat{\gamma}_k^{\text{extern}}$	0,500	0,700	0,900	1,000	

Es wird angenommen, dass alle Schäden bis zum Ende des Abwicklungsjahres 3 vollständig abgewickelt werden.

a) Schätzen Sie die Endschadenstände der Anfalljahre 2004 bis 2006 mit dem Loss-Development Verfahren.
b) Schätzen Sie für jedes Anfalljahr die Schadenquote und stellen Sie fest, ob es eine Besonderheit gibt.
c) Schätzen Sie die Cape-Cod Schadenquote.
d) Schätzen Sie die Endschadenstände der Anfalljahre 2004 bis 2006 mit dem Cape-Cod Verfahren.

Lösung:

Zu a)

Für die Loss-Development Prädiktoren erhält man

$$\widehat{S}^{\text{LD}}_{2.004,3} = \widehat{\gamma}_3^{\text{extern}} \cdot \frac{S_{2.004,2}}{\widehat{\gamma}_2^{\text{extern}}} = 1{,}000 \cdot \frac{324}{0{,}900} = 360\,,$$

$$\widehat{S}^{\text{LD}}_{2.005,3} = \widehat{\gamma}_3^{\text{extern}} \cdot \frac{S_{2.005,1}}{\widehat{\gamma}_1^{\text{extern}}} = 1{,}000 \cdot \frac{294}{0{,}700} = 420\,,$$

$$\widehat{S}^{\text{LD}}_{2.006,3} = \widehat{\gamma}_3^{\text{extern}} \cdot \frac{S_{2.006,0}}{\widehat{\gamma}_0^{\text{extern}}} = 1{,}000 \cdot \frac{196}{0{,}500} = 392\,.$$

Zu b)

Für die Schadenquoten erhält man

$$\widehat{\kappa}_{2003} = \frac{S_{2.003,3}}{\pi_{2003} \cdot \widehat{\gamma}_3^{\text{extern}}} = \frac{374}{440 \cdot 1{,}000} = 0{,}850\,,$$

$$\widehat{\kappa}_{2004} = \frac{S_{2.004,2}}{\pi_{2004} \cdot \widehat{\gamma}_2^{\text{extern}}} = \frac{324}{450 \cdot 0{,}900} = 0{,}800\,,$$

$$\widehat{\kappa}_{2005} = \frac{S_{2.005,1}}{\pi_{2005} \cdot \widehat{\gamma}_1^{\text{extern}}} = \frac{294}{500 \cdot 0{,}700} = 0{,}840\,,$$

$$\widehat{\kappa}_{2006} = \frac{S_{2.006,0}}{\pi_{2006} \cdot \widehat{\gamma}_0^{\text{extern}}} = \frac{196}{580 \cdot 0{,}500} = 0{,}676\,.$$

Der Schätzwert für die Schadenquote in 2006 ist deutlich niedriger als die Schätzwerte für die Schadenquoten in den anderen Anfalljahren. Vermutlich liegt in 2006 ein Ausreißer vor.

Zu c)

Für die Cape-Cod Schadenquote erhält man

$$\begin{aligned}\widehat{\kappa}^{CC} &= \frac{S_{2.003,3} + S_{2.004,2} + S_{2.005,1} + S_{2.006,0}}{\pi_{2003} \cdot \widehat{\gamma}_3^{\text{extern}} + \pi_{2004} \cdot \widehat{\gamma}_2^{\text{extern}} + \pi_{2005} \cdot \widehat{\gamma}_1^{\text{extern}} + \pi_{2006} \cdot \widehat{\gamma}_0^{\text{extern}}} \\ &= \frac{374 + 324 + 294 + 196}{440 + 405 + 350 + 290} = 0{,}800\,.\end{aligned}$$

Zu d)

Für die Cape-Cod Prädiktoren erhält man

$$\begin{aligned}\widehat{S}^{CC}_{2.004,3} &= S_{2.004,2} + \left(\widehat{\gamma}_3^{\text{extern}} - \widehat{\gamma}_2^{\text{extern}}\right) \cdot \pi_{2004} \cdot \widehat{\kappa}^{CC} \\ &= 324 + (1{,}000 - 0{,}900) \cdot 450 \cdot 0{,}800 = 360\,, \\ \widehat{S}^{CC}_{2.005,3} &= S_{2.005,1} + \left(\widehat{\gamma}_3^{\text{extern}} - \widehat{\gamma}_1^{\text{extern}}\right) \cdot \pi_{2005} \cdot \widehat{\kappa}^{CC} \\ &= 294 + (1{,}000 - 0{,}700) \cdot 500 \cdot 0{,}800 = 414\,, \\ \widehat{S}^{CC}_{2.006,3} &= S_{2.006,0} + \left(\widehat{\gamma}_3^{\text{extern}} - \widehat{\gamma}_0^{\text{extern}}\right) \cdot \pi_{2006} \cdot \widehat{\kappa}^{CC} \\ &= 196 + (1{,}000 - 0{,}500) \cdot 580 \cdot 0{,}800 = 428\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (Rückversicherung und Risikoteilung)

a) Zwei Versicherer übernehmen ein Risiko X jeweils zum Preis von

$$\pi(X) = E[X] + \beta Var(X)\,.$$

Hierbei ist $E[X]$ der Erwartungswert des Risikos, also die Netto-Risikoprämie, und $Var(X)$ die Varianz des Risikos. Der Koeffizient β ist positiv. Ein Versicherungsnehmer versichert sein Risiko X nun bei beiden Unternehmen, und zwar αX beim ersten und $(1-\alpha)X$ beim zweiten. Zeigen Sie, dass er sich dabei besser stellt als bei der Versicherung seines Risikos bei nur einem Versicherer, gleichgültig welchen Wert β aufweist. Geben Sie das optimale $0 < \alpha < 1$ an, bei der die Versicherungsprämie des Versicherungsnehmers minimiert wird.

b) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie eines Versicherungsvertrages mit Abzugsfranchise M:

$$E[(X-M)^+]$$

für den Fall eines Pareto-verteilten Risikos mit Dichte

$$f(x) = \alpha(1+x)^{-\alpha-1}, x > 0, \alpha > 1 .$$

Lösung:

Zu a)

Ist $0 < \alpha < 1$ beliebig, dann ist die Gesamtprämie für den Versicherungsnehmer

$$\begin{aligned} \pi(X) &= \alpha E[X] + \alpha^2 \beta Var(X) + (1-\alpha)E[X] + (1-\alpha)^2 \beta Var(X) \\ &= E[X] + \beta(\alpha^2 + (1-\alpha)^2) Var(X) \\ &< E[X] + \beta Var(X) \end{aligned}$$

wegen $\alpha^2 + (1-\alpha)^2 < 1$. Der optimale Wert für α ist 1/2, an diesem Wert wird $\alpha^2 + (1-\alpha)^2 = 1/4$ minimal.

Zu b)

Mit der Formel

$$E[(X-M)^+] = \int_M^\infty P(X > t)dt$$

erhält man

$$E[(X-M)^+] = \int_M^\infty (1+t)^{-a} dt = \frac{1}{a-1}(1+M)^{-a+1} .$$

Aufgabe 8 (Rückversicherung und Risikoteilung)

Für einen Versicherungsvertrag wird eine Jahresprämie von 50 bezahlt; dafür wird vom Gesamtschaden S eines Jahres der die Abzugsfranchise 150 übersteigende Teil vom Versicherer übernommen, wenn er gemeldet wird. Wenn nichts gemeldet wird, dann gibt der Versicherer 25 an den Versicherungsnehmer als Beitragserstattung zurück.

a) Ab welchem Wert wird ein rationaler Versicherungsnehmer seinen Gesamtschaden melden?
b) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für den Versicherungsvertrag mit Abzugsfranchise, aber ohne Berücksichtigung der Beitragserstattung für folgende Situation: S nimmt die Werte $100i$, $i = 0, \ldots, 7$ mit den Wahrscheinlichkeiten 0,8; 0,05; 0,05; 0,03; 0,03; 0,02; 0,01; 0,01 an.
c) Ist der Versicherungsvertrag mit Beitragserstattung für das Versicherungsunternehmen profitabel?

Hinweis: Berechnen Sie für Teil c) die Nettorisikoprämie für die Zahlungen des Versicherungsunternehmens unter dem in Teil b) genannten Modell.

Lösung:

Zu a)

Bei einem Gesamtschaden von unter 150 wird der Versicherungsnehmer die Beitragserstattung immer erhalten, aber er wird den Gesamtschaden erst ab einer Summe von 175 melden, weil dann die Schadenzahlung des Versicherers höher ist als die Beitragserstattung.

Zu b)

Die Nettorisikoprämie beträgt

$$\sum_{i=0}^{7} p_i(x_i - 150)^+ = \sum_{i=2}^{7} p_i(x_i - 150) = 31{,}50\,.$$

Zu c)

In den Fällen $S = 0$ und $S = 100$ wird jeweils 25 gezahlt. Der Erwartungswert wird also durch die Beitragserstattung um

$$(0{,}8 + 0{,}05) \cdot 25 = 21{,}25$$

vergrößert. Dies führt zu einer erwarteten Zahlung pro Jahr von 52,75. Der Vertrag ist demnach nicht profitabel, selbst wenn man Kosten für Verwaltung und Provisionen nicht berücksichtigt.

Aufgabe 9 (Zusatzaufgabe I)

In einem Bestand eines Versicherungsunternehmens fällt in jedem Anfalljahr i eine zufällige Anzahl N_i von Schäden an. Für den s-ten Schaden aus Anfalljahr i bezeichne $X_{i,s}$ das Abwicklungsjahr, in dem der Schaden gemeldet wird. Es wird angenommen, dass für jedes Anfalljahr i das Paar $\langle N_i, \{X_{i,s}\}_{s\in\mathbf{N}}\rangle$ ein kollektives Modell ist mit $P[\{X_{i,s} = 0\}] = 1 - \eta$ und $P[\{X_{i,s} = 1\}] = \eta$ und dass die (Zufallsvariablen verschiedener) Anfalljahre voneinander unabhängig sind. Dann ist

$$N_{i,0} := \sum_{s=1}^{N_i} (1 - X_{i,s})$$

die Anzahl der Schäden aus Anfalljahr i, die im Abwicklungsjahr 0 gemeldet werden, und

$$N_{i,1} := \sum_{s=1}^{N_i} X_{i,s}$$

ist die Anzahl der Schäden aus Anfalljahr i, die im Abwicklungsjahr 1 gemeldet werden. Die folgende Tabelle enthält für die Anfalljahre 2001 bis 2005 und die Abwicklungsjahre 0 und 1 die Anzahl der gemeldeten Schäden:

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** 0	k 1
2001	68	28
2002	83	27
2003	79	21
2004	71	26
2005	74	23

a) Bestimmen Sie für jedes Anfalljahr i und jedes Abwicklungsjahr k die bedingte Verteilung von $N_{i,k}$ unter N_i.
b) Bestimmen Sie für jedes Anfalljahr i die bedingte gemeinsame Verteilung von $N_{i,0}$ und $N_{i,1}$ unter N_i.
c) Schätzen Sie den Parameter η mit dem Maximum-Likelihood Verfahren.
d) Nehmen Sie zusätzlich an, dass alle Schadenzahlen N_i die Poisson-Verteilung mit dem Erwartungswert α besitzen.
   (i) Bestimmen Sie für jedes Anfalljahr i und jedes Abwicklungsjahr k die Verteilung von $N_{i,k}$.
   (ii) Bestimmen Sie für jedes Anfalljahr i und jedes Abwicklungsjahr k die gemeinsame Verteilung von $N_{i,0}$ und $N_{i,1}$.
   (iii) Schätzen Sie den Parameter α mit dem Maximum-Likelihood Verfahren.

Lösung:

Zu a)

Aufgrund der Modellannahmen gilt für alle $n \in \mathbf{N}_0$ und für alle $n \in \mathbf{N}_0$ mit $l \leq n$

$$\begin{aligned} P[\{N_{i,1} = l\} \mid \{N_i = n\}] &= P\left[\left\{\sum_{s=1}^{N_i} X_{i,s} = l\right\} \,\middle|\, \{N_i = n\}\right] \\ &= P\left[\left\{\sum_{s=1}^{n} X_{i,s} = l\right\} \,\middle|\, \{N_i = n\}\right] \\ &= P\left[\left\{\sum_{s=1}^{n} X_{i,s} = l\right\}\right] \\ &= \binom{n}{l} \eta^l \, (1-\eta)^{n-l} \,. \end{aligned}$$

Daher ist die bedingte Verteilung von $N_{i,1}$ unter N_i die Binomial-Verteilung mit den Parametern N_i und η. Analog zeigt man, dass die bedingte Verteilung von $N_{i,0}$ unter N_i die Binomial-Verteilung mit den Parametern N_i und $1-\eta$ ist.

Zu b)

Wegen $N_{i,0} + N_{i,1} = N_i$ gilt für alle $n \in \mathbf{N}_0$ und für alle $k, l \in \mathbf{N}_0$ mit $k + l = n$

$$P[\{N_{i,0} = k\} \cap \{N_{i,1} = l\} \mid \{N_i = n\}]$$

$$= P[\{N_{i,0} = k\} \cap \{N_{i,1} = n-k\} \mid \{N_i = n\}]$$

$$
\begin{aligned}
&= P[\{N_{i,0} = k\} \mid \{N_i = n\}] \\
&= \binom{n}{k} (1-\eta)^k \, \eta^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!\,l!} (1-\eta)^k \, \eta^l \,.
\end{aligned}
$$

Daher ist die bedingte gemeinsame Verteilung von $N_{i,0}$ und $N_{i,1}$ unter N_i die Multinomial-Verteilung mit den Parametern N_i sowie $1-\eta$ und η.

Zu c)

Aufgrund der Unabhängigkeit der Anfalljahre gilt mit $n_i := n_{i,0} + n_{i,1}$

$$
\begin{aligned}
& P\left[\bigcap_{i=2001}^{2005} \{N_{i,0} = n_{i,0}\} \cap \{N_{i,1} = n_{i,1}\}\right] \\
&= \prod_{i=2001}^{2005} P[\{N_{i,0} = n_{i,0}\} \cap \{N_{i,1} = n_{i,1}\}] \\
&= \prod_{i=2001}^{2005} \left(P[\{N_{i,0} = n_{i,0}\} \cap \{N_{i,1} = n_{i,1}\} \mid \{N_i = n_i\}] \cdot P[\{N_i = n_i\}]\right) \\
&= \prod_{i=2001}^{2005} P[\{N_{i,0} = n_{i,0}\} \cap \{N_{i,1} = n_{i,1}\} \mid \{N_i = n_i\}] \cdot \prod_{i=2001}^{2005} P[\{N_i = n_i\}] \\
&= \prod_{i=2001}^{2005} \frac{n_i!}{n_{i,0}!\, n_{i,1}!} (1-\eta)^{n_{i,0}} \, \eta^{n_{i,1}} \cdot \prod_{i=2001}^{2005} P[\{N_i = n_i\}] \\
&= C \cdot \prod_{i=2001}^{2005} (1-\eta)^{n_{i,0}} \, \eta^{n_{i,1}} \,,
\end{aligned}
$$

wobei C das Produkt aller Faktoren bezeichnet, die nicht von η abhängen. Für die Likelihood-Funktion gilt daher

$$
\begin{aligned}
& L(\eta \mid n_{2.001,0}, \ldots, n_{2.005,0}, n_{2.001,1}, \ldots, n_{2.005,1}) \\
&= C \cdot \prod_{i=2001}^{2005} (1-\eta)^{n_{i,0}} \, \eta^{n_{i,1}} \,,
\end{aligned}
$$

und für die Loglikelihood-Funktion erhält man

$$
\begin{aligned}
& (\log \circ L)(\eta \mid n_{2.001,0}, \ldots, n_{2.005,0}, n_{2.001,1}, \ldots, n_{2.005,1}) \\
&= \log(C) + \sum_{i=2001}^{2005} n_{i,0} \, \log(1-\eta) + \sum_{i=2001}^{2005} n_{i,1} \, \log(\eta) \\
&= \log(C) + \left(\sum_{i=2001}^{2005} n_{i,0}\right) \log(1-\eta) + \left(\sum_{i=2001}^{2005} n_{i,1}\right) \log(\eta) \,.
\end{aligned}
$$

Differentiation ergibt

$$\begin{aligned}
&\frac{d(\log \circ L)}{d\eta}\,(\eta \mid n_{2.001,0},\ldots,n_{2.005,0},n_{2.001,1},\ldots,n_{2.005,1})\\
&= -\left(\sum_{i=2001}^{2005} n_{i,0}\right)\frac{1}{1-\eta} + \left(\sum_{i=2001}^{2005} n_{i,1}\right)\frac{1}{\eta}\,.
\end{aligned}$$

Die Ableitung der Loglikelihood-Funktion besitzt die einzige Nullstelle

$$\eta_0 = \frac{\sum_{i=2001}^{2005} n_{i,1}}{\sum_{i=2001}^{2005} n_{i,0} + \sum_{i=2001}^{2005} n_{i,1}}\,.$$

Daraus erhält man den eindeutig bestimmten Maximum-Likelihood Schätzer für η

$$\widehat{\eta}^{\mathrm{ML}} = \frac{\sum_{i=2001}^{2005} N_{i,1}}{\sum_{i=2001}^{2005} N_{i,0} + \sum_{i=2001}^{2005} N_{i,1}}\,.$$

Aus den Daten ergibt sich für den Maximum-Likelihood Schätzer für η der Schätzwert

$$\widehat{\eta}^{\mathrm{ML}} = \frac{28+27+21+26+23}{(68+83+79+71+74)+(28+27+21+26+23)} \;=\; \frac{1}{4}\,.$$

Bemerkung: Die zweite Ableitung der Loglikelihood-Funktion ist kleiner als 0. Daher maximiert η_0 die Loglikelihood-Funktion und η_0 ist der einzige Maximierer der Loglikelihood-Funktion und damit auch der Likelihood-Funktion.

Zu d)

Aus den zusätzlichen Annahmen ergibt sich für alle Anfalljahre $P_{N_i} = \mathbf{Poi}(\alpha)$. Daher erhält man (unter Verwendung von b)) für alle $k, l \in \mathbf{N}_0$

$$\begin{aligned}
&P[\{N_{i,0}=k\}\cap\{N_{i,1}=l\}]\\
&= P[\{N_{i,0}=k\}\cap\{N_{i,1}=l\} \mid \{N_i=k+l\}]\cdot P[\{N_i=k+l\}]\\
&= \frac{(k+l)!}{k!\,l!}\,(1-\eta)^k\,\eta^l \cdot e^{-\alpha}\,\frac{\alpha^{k+l}}{(k+l)!}\\
&= e^{-(1-\eta)\alpha}\,\frac{((1-\eta)\alpha)^k}{k!}\cdot e^{-\eta\alpha}\,\frac{(\eta\alpha)^l}{l!}\,.
\end{aligned}$$

Durch Summation über $l \in \mathbf{N}_0$ bzw. $k \in \mathbf{N}_0$ erhält man daraus

$$\begin{aligned}
P[\{N_{i,0}=k\}] &= e^{-(1-\eta)\alpha}\,\frac{((1-\eta)\alpha)^k}{k!}\,,\\
P[\{N_{i,1}=l\}] &= e^{-\eta\alpha}\,\frac{(\eta\alpha)^l}{l!}\,,
\end{aligned}$$

und damit

$$P[\{N_{i,0}=k\}\cap\{N_{i,1}=l\}] = P[\{N_{i,0}=k\}]\cdot P[\{N_{i,1}=l\}]\,.$$

Daher sind $N_{i,0}$ und $N_{i,1}$ unabhängig mit $P_{N_{i,0}} = \mathbf{Poi}((1-\eta)\alpha)$ und $P_{N_{i,1}} = \mathbf{Poi}(\eta\alpha)$. Aufgrund der Unabhängigkeit der Anfalljahre gilt

$$\begin{aligned} P\left[\bigcap_{i=2001}^{2005} \{N_i = n_i\}\right] &= \prod_{i=2001}^{2005} P[\{N_i = n_i\}] \\ &= \prod_{i=2001}^{2005} e^{-\alpha} \frac{\alpha^{n_i}}{n_i!} \\ &= C \cdot e^{-5\alpha}\, \alpha^{\sum_{i=2001}^{2005} n_i}\,, \end{aligned}$$

wobei C das Produkt aller Faktoren bezeichnet, die nicht von α abhängen. Für die Likelihood-Funktion gilt daher

$$L(\alpha \mid n_{2001}, \ldots, n_{2005}) = C \cdot e^{-5\alpha}\, \alpha^{\sum_{i=2001}^{2005} n_i}\,,$$

und für die Loglikelihood-Funktion erhält man

$$(\log \circ L)(\alpha \mid n_{2001}, \ldots, n_{2005}) = \log(C) - 5\,\alpha + \left(\sum_{i=2001}^{2005} n_i\right) \log(\alpha)\,.$$

Differentiation ergibt

$$\frac{d(\log \circ L)}{d\alpha}(\alpha \mid n_{2001}, \ldots, n_{2005}) = -5 + \left(\sum_{i=2001}^{2005} n_i\right) \frac{1}{\alpha}\,.$$

Die Ableitung der Loglikelihood-Funktion besitzt die einzige Nullstelle

$$\alpha_0 = \frac{1}{5} \sum_{i=2001}^{2005} n_i\,.$$

Daraus erhält man den eindeutig bestimmten Maximum-Likelihood Schätzer für α

$$\widehat{\alpha}^{\mathrm{ML}} = \frac{1}{5} \sum_{i=2001}^{2005} N_i\,.$$

Aus den Daten ergibt sich für den Maximum-Likelihood Schätzer für α der Schätzwert

$$\widehat{\alpha}^{\mathrm{ML}} = \frac{1}{5}((68+28)+(83+27)+(79+21)+(71+26)+(74+23)) \;=\; 100\,.$$

Bemerkung: Die zweite Ableitung der Loglikelihood-Funktion ist kleiner als 0. Daher maximiert α_0 die Loglikelihood-Funktion und α_0 ist der einzige Maximierer der Loglikelihood-Funktion und damit auch der Likelihood-Funktion.

Aufgabe 10 (Zusatzaufgabe II)

Der Gesamtschaden S eines Erstversicherers wird im kollektiven Modell beschrieben durch die unabhängigen Zufallsgrößen *Schadenzahl* N und *Schadenhöhen* $X_1, X_2, \ldots$ und zwar folgendermaßen:

$$S = X_1 + \ldots + X_N.$$

Hierbei sind X_1, X_2, ... identisch verteilt. Bei einem Schadenexzedenten-Rückversicherungsvertrag mit Priorität $M > 0$ wird der Gesamtschaden S aufgeteilt in den Anteil S' des Erstversicherers und den Anteil S'' des Rückversicherers

$$\begin{aligned} S &= S' + S'' , \\ S' &= \min(X_1, M) + \ldots + \min(X_N, M) , \\ S'' &= (X_1 - M)^+ + \ldots + (X_N - M)^+ . \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Einzelsummanden $\min(X_i, M)$ und $(X_i - M)^+$ nur im Falle $X_i \leq M$ oder $X_i \geq M$ stochastisch unabhängig sind. Zeigen Sie ferner, dass die Anteile S', S'' unter der Annahme $Var(N) > 0$ nur dann stochastisch unabhängig sind, wenn $S'' = 0$ gilt.
b) Weisen Sie nach, dass $Var(S) \geq Var(S') + Var(S'')$.

Lösung:

Zu a)

Wir schreiben X für X_i. Wegen $(X-M)^+ \min(X, M) = M(X-M)^+$ ist

$$E[(X-M)^+ \min(X, M)] = ME[(X-M)^+] \geq E[(X-M)^+]E[\min(X, M)]$$

mit Gleichheit nur dann, wenn $X \geq M$ oder wenn $(X-M)^+ = 0$ fast überall.

Zu b)

Wegen der Unabhängigkeit von Schadenzahl und Schadenhöhe gilt

$$\begin{aligned} &Cov(S', S'') \\ &= E[Cov(S', S''|N)] + Cov(E[S'|N], E[S''|N]) \\ &= E[NCov(\min(X, M), (X-M)^+)] + Cov(NE[\min(X, M)], NE[(X-M)^+]) \\ &= E[N]Cov(\min(X, M), (X-M)^+) + Var(N)E[\min(X, M)(X-M)^+] . \end{aligned}$$

Diese Kovarianz ist nicht negativ und bei $Var(N) > 0$ nur dann Null, wenn $X_i \leq M$, was dasselbe bedeutet wie $S'' = 0$.

Zu c)

$Var(S) = Var(S' + S'') = Var(S') + 2Cov(S', S'') + Var(S'')$, und dies ist mindestens so groß wie $Var(S') + Var(S'')$.