Klausur zum
Grundwissen Schadenversicherungsmathematik

Ch. Hipp, M. Morlock, H. Schmidli, K. D. Schmidt

Mai 2016 in Köln

Die Klausur besteht aus 8 Aufgaben. Bei jeder Aufgabe sind maximal 15 Punkte zu erreichen. Insgesamt sind damit maximal 120 Punkte möglich.

Zum Bestehen sind 48 Punkte ausreichend.

Zugelassen sind die klassische Formelsammlung, die verteilt wird, sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner.

Alle Antworten sind zu begründen, und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1 (Risikomodelle)

Die Gesamtschäden in zwei Regionen werden durch die Zufallsvariablen

$$X_1 \;:=\; \exp(\mu_1 + \sigma_1 Y_1) \qquad \text{bzw.} \qquad X_2 \;:=\; \exp(\mu_2 + \sigma_2 Y_2)$$

mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ modelliert. Dabei ist Y_1 standardnormalverteilt und

$$Y_2 \;:=\; ZY_1$$

mit einer Zufallsvariablen Z, die unabhängig von Y_1 ist und für die

$$P[Z = 1] \;=\; \tfrac{1}{2} \;=\; P[Z = -1]$$

gilt.

(a) Zeigen Sie, dass Y_2 standardnormalverteilt ist.
(4 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass Y_1 und Y_2 unkorreliert sind.
(4 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass Y_1 und Y_2 nicht unabhängig sind.
(5 Punkte)

(d) Zeigen Sie, dass X_1 und X_2 nicht unabhängig sind.
(2 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
P[Y_2 \le y] &= P[ZY_1 \le y] \\
&= P[Z = 1, Y_1 \le y] + P[Z = -1, -Y_1 \le y] \\
&= P[Z = 1]\, P[Y_1 \le y] + P[Z = -1]\, P[-Y_1 \le y] \\
&= P[Z = 1]\, P[Y_1 \le y] + P[Z = -1]\, P[Y_1 \ge -y] \\
&= P[Z = 1]\, P[Y_1 \le y] + P[Z = -1]\, P[Y_1 \le y] \\
&= P[Y_1 \le y]
\end{aligned}$$

Mit Y_1 ist daher auch Y_2 standardnormalverteilt.

(b) Da Y_1 und Y_2 standardnormalverteilt sind, gilt $E[Y_1] = 0 = E[Y_2]$ und damit

$$\mathrm{cov}[Y_1, Y_2] = E[Y_1 Y_2] - E[Y_1]\, E[Y_2] = E[Y_1 Y_2] = E[Z Y_1^2]$$

Mit Z und Y_1 sind auch Z und Y_1^2 unabhängig, und daraus folgt

$$\mathrm{cov}[Y_1, Y_2] = E[Z Y_1^2] = E[Z]\, E[Y_1^2]$$

Aus $E[Z] = 0$ folgt nun $\mathrm{cov}[Y_1, Y_2] = 0$.

(c) Wegen (a) gilt $P[Y_2 \le -1] < \frac{1}{2} = P[Z = 1]$ und damit

$$\begin{aligned}
P[Y_1 \le -1, Y_2 \le -1] &= P[Y_1 \le -1, Z = 1] \\
&= P[Y_1 \le -1]\, P[Z = 1] \\
&> P[Y_1 \le -1]\, P[Y_2 \le -1]
\end{aligned}$$

Daher sind Y_1 und Y_2 nicht unabhängig.
Es ist zu bemerken, dass aufgrund der Unabhängigkeit von Z und Y_1 und wegen (a) die Zufallsvariablen Z und Y_2 unabhängig sind und daher die Abhängigkeit von Y_1 und Y_2 nicht offensichtlich ist.

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}
P[X_1 \le e^{\mu_1 - \sigma_1}, X_2 \le e^{\mu_2 - \sigma_2}] &= P[Y_1 \le -1, Y_2 \le -1] \\
&> P[Y_1 \le -1]\, P[Y_2 \le -1] \\
&= P[X_1 \le e^{\mu_1 - \sigma_1}]\, P[X_2 \le e^{\mu_2 - \sigma_2}]
\end{aligned}$$

Daher sind X_1 und X_2 nicht unabhängig.
Alternatives Argument ohne Rechnung: Y_i ist eine Transformation von X_i. Wären X_1 und X_2 unabhängig, so wären auch Y_1 und Y_2 unabhängig, was nach (c) nicht der Fall ist. Daher sind X_1 und X_2 nicht unabhängig.

Aufgabe 2 (Risikomodelle)

Wir betrachten das kollektive Modell $\langle N, \{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}\rangle$ und nehmen an, dass die Schadenzahl N die Negativbinomialverteilung mit

$$P[N=n] \;=\; \binom{1+n-1}{n}\,(1-0.04)\,0.04^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt und dass

$$\begin{aligned} E[X] &= 1 \\ \mathrm{var}[X] &= 2 \end{aligned}$$

gilt.

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Gesamtschadens

$$S \;:=\; \sum_{k=1}^{N} X_k$$

(6 Punkte)

(b) Nehmen Sie für das Weitere an, dass der Gesamtschaden die absolute Schiefe 0.5939 besitzt, und bestimmen Sie die relative Schiefe des Gesamtschadens.
(1 Punkt)

(c) Die Verteilungsfunktion des Gesamtschadens soll approximiert werden. Erklären Sie unter Berücksichtigung von (b), ob

– die Normal–Approximation,

– die Normal–Power–Approximation,

– die Pareto–Approximation oder

– die Lognormal–Approximation

geeignet ist oder nicht.
(8 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt

$$E[N] \;=\; \frac{0.04}{0.96} \;=\; 0.041667$$

und

$$\mathrm{var}[N] \;=\; \frac{0.04}{0.96^2} \;=\; 0.043403$$

Nach den Gleichungen von Wald gilt daher

$$\begin{aligned} E[S] &= E[N]\,E[X] \\ &= 0.041667 \times 1 \\ &= 0.041667 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{var}[S] &= E[N]\,\mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[N]\,(E[X])^2 \\ &= 0.041667 \times 2 + 0.043403 \times 1^2 \\ &= 0.126737 \end{aligned}$$

(b) Für die relative Schiefe des Gesamtschadens gilt

$$\gamma[S] \;:=\; \frac{E[(S-E[S])^3]}{(\mathrm{var}[S])^{3/2}} \;=\; \frac{0.5939}{0.126737^{3/2}} \;=\; 13.1631$$

(c) Nach (b) besitzt die Verteilung des Gesamtschadens eine recht große und positive relative Schiefe.
Da jede Normalverteilung die Schiefe 0 besitzt, ist die Normal–Approximation ungeeignet.
Die Normal–Power–Approximation verwendet neben dem Erwartungswert und der Varianz auch die relative Schiefe der Verteilung des Gesamtschadens. Sie könnte daher geeignet sein, aber aus der Verwendung der ersten drei Momente folgt nicht, dass die Normal–Power–Approximation gleichmäßig besser ist als die anderen Approximationen.
Die Pareto–Verteilung und die Lognormal–Verteilung besitzen eine positive Schiefe. Die Pareto–Approximation und die Lognormal–Approximation unter Erhalt des Erwartungswertes und der Varianz könnten daher geeignet sein; den exakten Wert der relativen Schiefe der Verteilung des Gesamtschadens berücksichtigen sie jedoch nicht.
Der Gesamtschaden besitzt den großen Variationskoeffizienten 8.54 und eine große relative Schiefe; daher handelt es sich wahrscheinlich um ein Großschadenportfolio. Somit könnte man die Verteilung des Gesamtschadens durch eine Pareto–Verteilung oder eine Lognormalverteilung approximieren, die den selben Erwartungswert und die selbe Varianz besitzen. Damit erhält man ebenfalls schiefe Verteilungen zur Approximation. Man kann erwarten, dass die Approximationen gut funktionieren. Da hier aber die Verteilung der Schadenzahl schon sehr schief ist, werden diese Approximationen aber die Schiefe eher unterschätzen.

Aufgabe 3 (Tarifierung)

Das Risiko X eines Versicherungsnehmers wird durch eine nach rechts verschobene Exponentialverteilung mit der Dichte

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1 \\ 0.2\, e^{-0.2(x-1)} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

beschrieben. Der Versicherer bezahlt bei jedem gemeldeten Schaden 80% der Schadenhöhe und gewährt eine Beitragsrückerstattung in Höhe von 2, falls kein Schaden gemeldet wird.

(a) Bis zu welchem Betrag bezahlt ein rational handelnder Versicherungsnehmer einen Schaden selbst?
(2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie (Erwartungswert der Leistungen des Versicherers) für einen rational handelnden Versicherungsnehmer.
(7 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie (Erwartungswert der Leistungen des Versicherers) für einen rational handelnden Versicherungsnehmer, falls anstelle einer prozentualen Selbstbeteiligung von 20% eine Abzugsfranchise in Höhe von 3 vereinbart wird.
(6 Punkte)

Lösung:

(a) Die Meldegrenze eines Schadens beträgt $2/0.8 = 2.5$.

(b) Für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schaden vom Versicherungsnehmer selbst reguliert wird, gilt

$$\begin{aligned}
P[X \leq 2.5] &= \int_{-\infty}^{2.5} 0.2\, e^{-0.2(x-1)}\, \chi_{(1,\infty)}(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{1.5} 0.2\, e^{-0.2z}\, \chi_{(0,\infty)}(z)\, dz \\
&= 1 - e^{-0.2\times 1.5} \\
&= 1 - e^{-0.3} \\
&= 0.26
\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert BRE der Beitragsrückerstattung erhält man daher

$$\begin{aligned}
\text{BRE} &= E[2\, \chi_{\{X\leq 2.5\}}] \\
&= 2\, P[X \leq 2.5] \\
&= 2 \times 0.26 \\
&= 0.52
\end{aligned}$$

und für die Nettorisikoprämie NRP erhält man

$$\begin{aligned}
\text{NRP} &= \text{BRE} + E\Big[0.8\, X\, \chi_{\{X>2.5\}}\Big] \\
&= 0.52 + \int_{2.5}^{\infty} 0.8\, x \cdot 0.2\, e^{-0.2(x-1)}\, dx \\
&= 0.52 + 0.8 \int_{0}^{\infty} (z+2.5) \cdot 0.2\, e^{-0.2(z+1.5)}\, dz \\
&= 0.52 + 0.8\, e^{-0.3} \int_{0}^{\infty} (z+2.5) \cdot 0.2\, e^{-0.2z}\, dz \\
&= 0.52 + 0.8\, e^{-0.3} \left(\int_{0}^{\infty} z \cdot 0.2\, e^{-0.2z}\, dz + 2.5 \int_{0}^{\infty} 0.2\, e^{-0.2z}\, dz \right) \\
&= 0.52 + 0.8\, e^{-0.3} \left(\frac{1}{0.2} + 2.5 \right) \\
&= 0.52 + 6\, e^{-0.3} \\
&= 4.96
\end{aligned}$$

(c) Der Versicherungsnehmer wird seine Schäden bis zur Höhe 5 selbst begleichen, da nur bei höheren Schäden als der Summe aus Beitragsrückerstattung und Selbstbeteiligung ein positiver Saldo für ihn resultiert. Für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schaden vom Versicherungsnehmer selbst reguliert wird, gilt

$$\begin{aligned}
P[X \leq 5] &= \int_{-\infty}^{5} 0.2\, e^{-0.2(x-1)}\, \chi_{(1,\infty)}(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{4} 0.2\, e^{-0.2z}\, \chi_{(0,\infty)}(z)\, dz \\
&= 1 - e^{-0.2\times 4} \\
&= 1 - e^{-0.8} \\
&= 0.55
\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert BRE der Beitragsrückerstattung erhält man daher

$$\begin{aligned}
\mathrm{BRE} &= E[2\, \chi_{\{X \leq 5\}}] \\
&= 2\, P[X \leq 5] \\
&= 2 \times 0.55 \\
&= 1.10
\end{aligned}$$

und für die Nettorisikoprämie NRP erhält man und für die Nettorisikoprämie NRP erhält man

$$\begin{aligned}
\mathrm{NRP} &= \mathrm{BRE} + E\Big[(X-3)\, \chi_{\{X>5\}}\Big] \\
&= 1.10 + \int_{5}^{\infty} (x-3) \cdot 0.2\, e^{-0.2(x-1)}\, dx \\
&= 1.10 + \int_{0}^{\infty} (z+2) \cdot 0.2\, e^{-0.2(z+4)}\, dz \\
&= 1.10 + e^{-0.8} \int_{0}^{\infty} (z+2) \cdot 0.2\, e^{-0.2z}\, dz \\
&= 1.10 + e^{-0.8} \left(\int_{0}^{\infty} z \cdot 0.2\, e^{-0.2z}\, dz + 2 \int_{0}^{\infty} 0.2\, e^{-0.2z}\, dz \right) \\
&= 1.10 + e^{-0.8} \left(\frac{1}{0.2} + 2 \right) \\
&= 1.10 + 7\, e^{-0.8} \\
&= 4.25
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Tarifierung)

Ein Versicherer mit einem heterogenen Bestand, bestehend aus Versicherungsnehmern des Typs A und B, beabsichtigt, ein einfaches Bonus–Malus System mit den drei Klassen 1, 2 und 3 einzuführen. Dabei geht er von folgender Situation aus:

– Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Versicherungsnehmer zum Typ A gehört, ist

$$P[A] = 0.3$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Versicherungsnehmer zum Typ B gehört, ist

$$P[B] = 0.7$$

– Die Verteilung der Schadenzahl N_A des Typs A ist durch

$$P[N_A = 0] = 0.90, \quad P[N_A = 1] = 0.05, \quad P[N_A = 2] = 0.05$$

gegeben und die Verteilung der Schadenzahl N_B des Typs B ist durch

$$P[N_B = 0] = 0.50, \quad P[N_B = 1] = 0.20, \quad P[N_B = 2] = 0.30$$

gegeben.

– Die Höhe jedes Schadens ist 1000.

– Die Einstiegsklasse ist die Klasse 1.

– Höherstufung und Rückstufung im nächsten Kalenderjahr: Bei schadenfreiem Verlauf Höherstufung um eine Klasse oder Verbleib in Klasse 3. Pro Schaden Rückstufung um eine Klasse oder Verbleib in Klasse 1.

(a) Bestimmen Sie jeweils die Nettorisikoprämie für einen Versicherungsnehmer vom Typ A bzw. B.
(2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Nettorisikoprämie für einen Versicherungsnehmer, von dem nicht bekannt ist, ob er zum Typ A oder B gehört.
(2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix des Bonus–Malus Systems für einen Versicherungsnehmer vom Typ A.
(3 Punkte)

(d) Zeigen Sie, dass die Verteilung eines Versicherungsnehmers vom Typ A auf die drei Klassen im stationären Fall durch den Vektor

$$\nu_A = \begin{pmatrix} 11/191 \\ 18/191 \\ 162/191 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.
(4 Punkte)

(e) Im stationären Fall ist die Verteilung eines Versicherungsnehmers vom Typ B auf die drei Klassen durch den Vektor

$$\nu_B \quad = \quad \begin{pmatrix} 8/18 \\ 5/18 \\ 5/18 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für einen Versicherungsnehmer in der Klasse 3 im stationären Fall.
(4 Punkte)

Lösung:

(a) Die Nettorisikoprämie NRP_A eines Versicherungsnehmers vom Typ A ist

$$\mathrm{NRP}_A = E[1000\, N_A] = 1000\, E[N_A] = 1000 \times 0.15 = 150$$

und analog erhält man $\mathrm{NRP}_B = 800$.

(b) Die Nettorisikoprämie NRP für einen Versicherungsnehmer, von dem nicht bekannt ist, ob er zum Typ A oder B gehört, ist durch

$$\mathrm{NRP} = \mathrm{NRP}_A \times P[A] + \mathrm{NRP}_B \times P[B] = 150 \times 0.3 + 800 \times 0.7 = 605$$

gegeben.

(c) Die Übergangsmatrix M_A für Typ A ist durch

$$M_A = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.10 & 0.05 \\ 0.90 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0.90 & 0.90 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(d) Es gilt

$$\begin{aligned} M_A \nu_A &= \begin{pmatrix} 0.10 & 0.10 & 0.05 \\ 0.90 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0.90 & 0.90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11/191 \\ 18/191 \\ 162/191 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1.1 + 1.8 + 8.1)/191 \\ (9.9 + 0 + 8.1)/191 \\ (0 + 16.2 + 145.8)/191 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11/191 \\ 18/191 \\ 162/191 \end{pmatrix} \\ &= \nu_A \end{aligned}$$

Daher ist ν_A stationär für M_A.

(e) Im stationären Fall ist in der Klasse 3 der Anteil der Versicherungsnehmer vom Typ A durch

$$\frac{\frac{162}{191} \times 0.3}{\frac{162}{191} \times 0.3 + \frac{5}{18} \times 0.7} = 0.567$$

und der Anteil der Versicherungsnehmer vom Typ B durch $1 - 0.567 = 0.433$ gegeben. Daher beträgt die Nettorisikoprämie in der Klasse 3 im stationären Fall

$$150 \times 0.567 + 800 \times 0.433 = 431.45$$

Aufgabe 5 (Reservierung)

Die folgende Tabelle enthält für die Anfalljahre 2012 bis 2015 die beobachteten Schadenstände und die Prämien:

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2012	180	300	400	460	500
2013	200	340	400		500
2014	220	320			500
2015	240				500

Es wird angenommen, dass ein Abwicklungsmuster für Quoten vorliegt.

(a) Bestimmen Sie mit dem Chain–Ladder Verfahren die Reserve für 2015.
(2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Chain–Ladder Quoten.
(2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie mit dem additiven Verfahren die Reserve für 2015.
(3 Punkte)

(d) Bestimmen Sie die additiven Quoten.
(3 Punkte)

(e) Erklären Sie den Unterschied zwischen den beiden Reserven für 2015.
(3 Punkte)

(f) Erklären Sie ohne Rechnung, wie sich eine Erhöhung aller Prämien um 10% auf die Reserven auswirkt.
(2 Punkte)

Lösung:

(a) Für die Chain–Ladder Faktoren gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_3^{\mathrm{CL}} &= \frac{460}{400} = 1.15 \\
\varphi_2^{\mathrm{CL}} &= \frac{400+400}{300+340} = 1.25 \\
\varphi_1^{\mathrm{CL}} &= \frac{300+340+320}{180+200+220} = 1.60
\end{aligned}$$

Für den Chain–Ladder Endschadenstand des Jahres 2015 gilt daher

$$S_{2015,3}^{\mathrm{CL}} = S_{2015,0}\,\varphi_1^{\mathrm{CL}}\,\varphi_2^{\mathrm{CL}}\,\varphi_3^{\mathrm{CL}} = 240 \times 1.60 \times 1.25 \times 1.15 = 552$$

Daraus ergibt sich für das Anfalljahr 2015 die Chain–Ladder Reserve

$$R_{2015}^{\mathrm{CL}} = S_{2015,3}^{\mathrm{CL}} - S_{2015,0} = 552 - 240 = 312$$

(b) Für die Chain–Ladder Quoten gilt

$$\gamma_3^{\mathrm{CL}} = 1$$

und für $k \in \{0,1,2\}$ erhält man wegen $\gamma_k^{\mathrm{CL}} = \gamma_{k+1}^{\mathrm{CL}}/\varphi_{k+1}^{\mathrm{CL}}$

$$\begin{aligned}
\gamma_2^{\mathrm{CL}} &= \frac{1}{1.150} = 0.870 \\
\gamma_1^{\mathrm{CL}} &= \frac{0.870}{1.250} = 0.696 \\
\gamma_0^{\mathrm{CL}} &= \frac{0.696}{1.600} = 0.435
\end{aligned}$$

(c) Aus dem Abwicklungsdreieck für Schadenstände erhält man das Abwicklungsdreieck für Zuwächse:

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2012	180	120	100	60	500
2013	200	140	60		500
2014	220	100			500
2015	240				500

Für die additiven Schadenquotenzuwächse gilt

$$\begin{aligned}
\zeta_3^{\mathrm{AD}} &= \frac{60}{500} = 0.12 \\
\zeta_2^{\mathrm{AD}} &= \frac{100+60}{500+500} = 0.16 \\
\zeta_1^{\mathrm{AD}} &= \frac{120+140+100}{500+500+500} = 0.24 \\
\zeta_0^{\mathrm{AD}} &= \frac{180+200+220+240}{500+500+500+500} = 0.42
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für das Anfalljahr 2015 die additive Reserve

$$
\begin{aligned}
R_{2015}^{\mathrm{AD}} \;&=\; \sum_{k=1}^{3} Z_{2015,k}^{\mathrm{AD}} \;=\; \sum_{k=1}^{3} \zeta_k^{\mathrm{AD}}\, \pi_{2015} \;=\; \left(\sum_{k=1}^{3} \zeta_k^{\mathrm{AD}}\right) \pi_{2015} \\
&=\; (0.24 + 0.16 + 0.12) \times 500 \;=\; 260
\end{aligned}
$$

(d) Für die additive Endschadenquote gilt

$$
\kappa^{\mathrm{AD}} \;=\; \sum_{k=0}^{3} \zeta_k^{\mathrm{AD}} \;=\; 0.42 + 0.24 + 0.16 + 0.12 \;=\; 0.94
$$

Daraus ergeben sich wegen $\vartheta_k^{\mathrm{AD}} = \zeta_k^{\mathrm{AD}}/\kappa^{\mathrm{AD}}$ und $\gamma_k^{\mathrm{AD}} = \sum_{l=0}^{k} \vartheta_l$ zunächst die additiven Anteile und sodann die additiven Quoten:

	Abwicklungsjahr k 0	1	2	3	$\sum$
ζ_k^{AD}	0.420	0.240	0.160	0.120	0.940
$\vartheta_k^{\mathrm{AD}}$	0.447	0.255	0.170	0.128	1.000
γ_k^{AD}	0.447	0.702	0.872	1.000	

(e) Für jedes Anfalljahr ist die Chain–Ladder Reserve proportional zum aktuellen Schadenstand, während die additive Reserve proportional zur Prämie ist. Daher führt der hohe Schadenstand $S_{2015,0}$ zu einer hohen Chain–Ladder Reserve für das Anfalljahr 2015, während er die additive Reserve nicht beeinflusst.

(f) Das Chain–Ladder Verfahren verwendet keine Volumenmaße; daher ergibt sich aus einer Veränderung der Prämien keine Auswirkung auf die Chain–Ladder Reserven. Beim additiven Verfahren bewirkt eine Skalierung aller Prämien mit einem Faktor $c > 0$ eine Skalierung der additiven Schadenquotenzuwächse mit dem Faktor $1/c$; daher ergibt sich aus einer proportionalen Veränderung aller Prämien keine Auswirkung auf die additiven Prädiktoren der Zuwächse und der Reserven.

Aufgabe 6 (Reservierung)

Die folgende Tabelle enthält für die Anfalljahre 2012 bis 2015 die aktuellen Schadenstände, die Prämien und die Loss–Development Prädiktoren der Endschadenstände:

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i	**LD–Endschadenstand** $S_{i,3}^{\mathrm{LD}}$
2012				535	596	535
2013			475		600	500
2014		480			630	600
2015	310				660	620

Es wird angenommen, dass ein Abwicklungsmuster für Quoten vorliegt und dass die erwarteten Endschadenquoten für alle Anfalljahre identisch sind.

(a) Bestimmen Sie die beim Loss–Development Verfahren verwendeten Schätzer des Abwicklungsmusters für Quoten.
(3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie den Loss–Development Prädiktor der Reserve für 2017.
(3 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Cape–Cod Prädiktoren der Endschadenstände.
(4 Punkte)

(d) Bestimmen Sie den Cape–Cod Prädiktor der Reserve für 2017.
(2 Punkte)

(e) Erklären Sie anhand der vorliegenden Daten die Auswirkung des Cape–Cod Verfahrens im Vergleich zum Loss–Development Verfahren.
(3 Punkte)

Lösung:

(a) Das Loss–Development Verfahren verwendet Schätzer $\widehat{\gamma}_0, \widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2, \widehat{\gamma}_3$ des Abwicklungsmusters für Quoten und die Loss–Development Endschadenstände sind durch

$$S_{i,3}^{\mathrm{LD}} \;:=\; \frac{S_{i,2015-i}}{\widehat{\gamma}_{2015-i}}$$

definiert. Daraus ergibt sich

$$\widehat{\gamma}_k \;=\; S_{2015-k,k}/S_{2015-k,3}^{\mathrm{LD}}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_0 &= 310/620 = 0.50\\
\widehat{\gamma}_1 &= 480/600 = 0.80\\
\widehat{\gamma}_2 &= 475/500 = 0.95\\
\widehat{\gamma}_3 &= 535/535 = 1
\end{aligned}$$

(b) Aus den Schätzern des Abwicklungsmusters für Quoten ergeben sich die zugehörigen Schätzer des Abwicklungsmusters für Anteile:

$$\begin{aligned}
\widehat{\vartheta}_0 &:= \widehat{\gamma}_0 = 0.50\\
\widehat{\vartheta}_1 &:= \widehat{\gamma}_1 - \widehat{\gamma}_0 = 0.80 - 0.50 = 0.30\\
\widehat{\vartheta}_2 &:= \widehat{\gamma}_2 - \widehat{\gamma}_1 = 0.95 - 0.80 = 0.15\\
\widehat{\vartheta}_3 &:= \widehat{\gamma}_3 - \widehat{\gamma}_2 = 1 - 0.95 = 0.05
\end{aligned}$$

Für die Loss–Development Reserve für 2017 erhält man daher

$$R_{2017}^{\mathrm{LD}} \;:=\; \widehat{\vartheta}_2\, S_{2015,3}^{\mathrm{LD}} + \widehat{\vartheta}_3\, S_{2014,3}^{\mathrm{LD}} \;=\; 0.15 \times 620 + 0.05 \times 600 \;=\; 123$$

(c) Beim Cape–Cod Verfahren wird die erwartete Endschadenquote durch die Cape–Cod Endschadenquote κ^{CC} geschätzt. Für die Berechnung von κ^{CC} benötigt man die Summe der aktuellen Schadenstände und die Summe der verbrauchten Prämien. Für die verbrauchten Prämien erhält man

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2012				596	596
2013			570		600
2014		504			630
2015	330				660
$\widehat{\gamma}_k$	0.50	0.80	0.95	1	

Daher gilt

$$\kappa^{\mathrm{CC}} \;=\; \frac{310 + 480 + 475 + 535}{330 + 504 + 570 + 596} \;=\; 0.90$$

Die Cape–Cod Endschadenstände sind durch

$$S_{i,3}^{\mathrm{CC}} \;:=\; S_{i,2015-i} + (1-\widehat{\gamma}_{2015-i})\,\pi_i \kappa^{\mathrm{CC}}$$

definiert. Es gilt

$$\begin{aligned} \pi_{2013}\kappa^{\mathrm{CC}} &= 600 \times 0.9 &= 540 \\ \pi_{2014}\kappa^{\mathrm{CC}} &= 630 \times 0.9 &= 567 \\ \pi_{2015}\kappa^{\mathrm{CC}} &= 660 \times 0.9 &= 594 \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} S_{2012,3}^{\mathrm{CC}} &= 535 \\ S_{2013,3}^{\mathrm{CC}} &= 475 + (1-0.95) \times 540 &= 502 \\ S_{2014,3}^{\mathrm{CC}} &= 480 + (1-0.80) \times 567 &= 593.40 \\ S_{2015,3}^{\mathrm{CC}} &= 310 + (1-0.50) \times 594 &= 607 \end{aligned}$$

(d) Für die Cape–Cod Reserve für 2017 erhält man daher

$$R_{2017}^{\mathrm{CC}} \;:=\; \widehat{\vartheta}_2\,\pi_{2015}\kappa^{\mathrm{CC}} + \widehat{\vartheta}_3\,\pi_{2014}\kappa^{\mathrm{CC}} \;=\; 0.15 \times 594 + 0.05 \times 567 \;=\; 117.45$$

(e) Beim Loss–Development Verfahren ergibt sich für das Anfalljahr 2013 ein Endschadenstand, der im Vergleich mit den anderen Anfalljahren und vor allem im Vergleich zur Prämie ungewöhnlich klein ist. Dies deutet darauf hin, dass der aktuelle Schadenstand des Anfalljahres 2013 einen Ausreißereffekt enthält. Das Cape–Cod Verfahren gleicht den Ausreißereffekt aus und führt dazu, dass der Cape–Cod Endschadenstand für 2013 größer und für 2014 und 2015 kleiner ist als der Loss–Development Endschadenstand. Die Auswirkung des Cape–Cod Verfahrens ist allerdings gering. Dies liegt daran, dass der Ausreißereffekt nicht besonders stark ausgeprägt ist.

Aufgabe 7 (Risikoteilung und Rückversicherung)

Bei einem Versicherungsvertrag tritt pro Periode ein Gesamtschaden X mit folgender Verteilung auf:

x	0	100	500	1000
$P[X = x]$	0.80	0.10	0.08	0.02

Die Prämie beträgt 90 ohne Selbstbeteiligung des Versicherungsnehmers und 70 bei einer Selbstbeteiligung des Versicherungsnehmers in Höhe von 100. Ein Rückversicherer bietet an, den 400 überschreitenden Betrag zu übernehmen, und zwar für eine Rückversicherungsprämie von 26 ohne Selbstbeteiligung und 15 bei einer Selbstbeteiligung des Versicherungsnehmers in Höhe von 100.

(a) Berechnen Sie den Variationskoeffizienten des Gewinns $P - Z$ des Rückversicherers (ohne Kosten und Steuern) für die beiden Fälle ohne beziehungsweise mit Selbstbeteiligung. Dabei ist Z die Zahlung und P die Prämie des Rückversicherers.
(6 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Variationskoeffizienten des Gewinns des Erstversicherers für die drei Fälle

(i) ohne Selbstbeteiligung und ohne Rückversicherung,

(ii) mit Selbstbeteiligung und ohne Rückversicherung,

(iii) mit Selbstbeteiligung und mit Rückversicherung.

(8 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass die Variante mit Selbstbeteiligung und mit Rückversicherung, gemessen am Variationskoeffizienten, die für den Erstversicherer günstigste ist.
(1 Punkt)

Lösung:

(a) Ohne Selbstbeteiligung gilt $P = 26$ und die Zahlung Z des Rückversicherers hat die Verteilung

z	0	100	600
$P[Z = z]$	0.90	0.08	0.02

Daher gilt

$$E[Z] = 0.08 \times 100 + 0.02 \times 600 = 20$$

und

$$\text{var}[Z] = 0.08 \times 100^2 + 0.02 \times 600^2 - E[Z]^2 = 7600$$

Für den Variationskoeffizienten des Gewinns des Rückversicherers ergibt sich daher

$$\text{Varko}[P-Z] = \frac{\sqrt{\text{var}[P-Z]}}{E[P-Z]} = \frac{\sqrt{\text{var}[Z]}}{P - E[Z]} = \frac{\sqrt{7600}}{26 - 20} = 14.5297$$

Mit Selbstbeteiligung gilt $P = 15$ und die Zahlung Z des Rückversicherers hat die Verteilung

z	0	500
$P[Z = z]$	0.98	0.02

Daher gilt

$$E[Z] = 10$$

und

$$\text{var}[Z] = 0.02 \times 0.98 \times 500^2 = 4900$$

Für den Variationskoeffizienten des Gewinns des Rückversicherers ergibt sich daher

$$\text{Varko}[P - Z] = \frac{\sqrt{4900}}{15 - 10} = 14$$

(b) Wir bezeichnen die Prämie des Erstversicherers mit Q.
Im Fall (i) gilt

$$E[X] = 70$$

und

$$\text{var}[X] = 0.1 \times 100^2 + 0.02 \times 500^2 + 0.02 \times 1000^2 - E[X]^2 = 36\,100$$

und mit $Q = 90$ erhält man

$$\text{Varko}[Q-X] = \frac{\sqrt{36\,100}}{90 - 70} = 9.5$$

Im Fall (ii) hat die Zahlung Y des Versicherers die Verteilung

y	0	400	900
$P[Y=y]$	0.90	0.08	0.02

Es gilt

$$E[Y] = 50$$

und

$$\mathrm{var}[Y] = 0.08 \times 400^2 + 0.02 \times 900^2 - E[Y]^2 = 26\,500$$

und mit $Q = 70$ erhält man

$$\mathrm{Varko}[Q-Y] = \frac{\sqrt{26\,500}}{70-50} = 8.139$$

Im Fall (iii) hat die Zahlung Y des Versicherers die Verteilung

y	0	400
$P[Y=y]$	0.90	0.10

Es gilt

$$E[Y] = 40$$

und

$$\mathrm{var}[Y] = 0.9 \times 0.1 \times 400^2 = 14\,400$$

und mit $Q = 70$ und $P = 15$ erhält man

$$\mathrm{Varko}[Q-Y-P] = \mathrm{Varko}[70-Y-15] = \mathrm{Varko}[55-Y] = \frac{\sqrt{14\,400}}{55-40} = 8$$

(c) Wegen $9.5 > 8.139 > 8$ ist die Variante (iii) am günstigsten.

Aufgabe 8 (Risikoteilung und Rückversicherung)

Eine Schadenexzedentenrückversicherung mit Priorität $M > 0$ und Limit $L > 0$ zahlt bei einem Schaden der Höhe X den Wert $Y := \min\{\max\{X - M, 0\}, L\}$. Für die Berechnung der zugehörigen Nettorisikoprämie verwendet man die nützliche Formel

$$E[Y] \quad = \quad \int_M^{M+L} (1 - F(u))\, du$$

wobei F die Verteilungsfunktion von X ist.
Leiten Sie entsprechende Formeln für folgende Zahlungen her, die modifizierte Rückversicherungsformen beschreiben:

(a) Für $a \in (0, 1)$ sei

$$Y_1 \quad := \quad \begin{cases} 0 & \text{für } X \leq M \\ a(X - M) & \text{für } M < X \leq M + L \\ aL & \text{für } M + L < X \end{cases}$$

(5 Punkte)

(b) Für $a \in (0, 1)$ und $M_2 > 0$ sei

$$Y_2 \quad := a \min\{X, M_2\}$$

(4 Punkte)

(c) Sei

$$Y_3 \quad := \quad \begin{cases} 0 & \text{für } X \leq M \\ 2(X - M) & \text{für } M < X \leq 2M \\ X & \text{für } 2M < X \end{cases}$$

(6 Punkte)

Lösung:

(a) Für $a = 1$ ist die Zahlung Y_1 dieselbe wie in einer Schadenexzedentenrückversicherung mit Priorität M und Limit L. Aus der Linearität des Erwartungswertes ergibt sich für $a \in (0, 1)$

$$E[Y_1] \;=\; a \int_M^{M+L} (1 - F(u))\, du$$

(b) Die Zahlung Y_2 ist dieselbe wie die Zahlung Y_1 für $M = 0$ und $L = M_2$. Für $M > 0$ benutzt man das Ergebnis in (a) und erhält mit $M \to 0$ das Ergebnis

$$E[Y_2] \;=\; a \int_0^{M_2} (1 - F(u))\, du$$

(c) Die Formel aus (a) gilt für beliebige Konstanten $a > 0$; allerdings stellt der Fall $a = 2$ keine sinnvolle Rückversicherungsform dar. Ändert man Y_3 für $X > 2M$ ab zu $Y_3 := 2M$, dann entsteht eine Zahlung Y_4, für die nach (a) mit $a = 2$ und $L = M$ die Formel

$$E[Y_4] \;=\; 2 \int_M^{2M} (1 - F(u))\, du$$

gilt. Die Differenz $Y_5 := Y_3 - Y_4$ ist 0 für $X \leq 2M$ und sie ist $X - 2M$ für $X > 2M$. Also gilt nach der Ausgangsformel

$$E[Y_5] \;=\; \int_{2M}^{\infty} (1 - F(u))\, du$$

Zusammengenommen erhält man damit

$$\begin{aligned}
E[Y_3] &= E[Y_3 - Y_4] + E[Y_4] \\
&= E[Y_5] + E[Y_4] \\
&= \int_{2M}^{\infty} (1 - F(u))\, du + 2 \int_M^{2M} (1 - F(u))\, du \\
&= \int_M^{\infty} (1 - F(u))\, du + \int_M^{2M} (1 - F(u))\, du
\end{aligned}$$