DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Schadenversicherungsmathematik

gemäß Prüfungsordnung 3
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 31. Mai 2019

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 9 Seiten. Sie enthält 8 Aufgaben und bei jeder Aufgabe sind 15 Punkte zu erreichen.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Christian Hipp, Martin Morlock,
Klaus D. Schmidt, Hanspeter Schmidli

Aufgabe 1 (Risikomodelle)

Ein Versicherer nimmt an, dass jeder Schaden X einer Sparte die Pareto–Verteilung $\mathbf{Par}(1,\beta)$ mit der Verteilungsfunktion F mit

$$F(x) \quad = \quad (1 - x^{-\beta})\,\chi_{(1,\infty)}(x)$$

und $\beta > 1$ besitzt. Es sind 23 Schäden bekannt und für diese Schäden gilt

$$\overline{X} \quad := \quad \frac{1}{23}\sum_{k=1}^{23} X_k \quad = \quad 4.21$$

und

$$\overline{\log(X)} \quad := \quad \frac{1}{23}\sum_{k=1}^{23} \log(X_k) \quad = \quad 0.96$$

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $\log(X)$.
(3 Punkte)

(b) Schätzen Sie mit der Momentenmethode den Parameter β mit Hilfe der Statistik $\overline{X}$ und schätzen Sie den Erwartungswert von X auf Basis dieses Schätzers von β.
(5 Punkte)

(c) Schätzen Sie mit der Momentenmethode den Parameter β mit Hilfe der Statistik $\overline{\log(X)}$ und schätzen Sie den Erwartungswert von X auf Basis dieses Schätzers von β.
(4 Punkte)

(d) Wie ist der Unterschied zwischen den beiden Schätzern für $E[X]$ zu erklären?
(3 Punkte)

Lösung:

(a) Für alle $x > 0$ gilt

$$P[\log(X) > x] \;=\; P[X > e^x] \;=\; (e^x)^{-\beta} \;=\; e^{-\beta x}$$

Die logarithmierten Schäden besitzen daher die Exponentialverteilung $\mathbf{Exp}(\beta)$.

(b) Wegen $\beta > 1$ besitzen die Schäden einen endlichen Erwartungswert und es gilt

$$E[X] \;=\; \frac{\beta}{\beta - 1}$$

und damit

$$\beta \;=\; \frac{E[X]}{E[X] - 1}$$

Für den Momentenschätzer von β auf der Basis der Schäden ergibt sich daher

$$\widehat{\beta} \;=\; \frac{\overline{X}}{\overline{X} - 1} \;=\; \frac{4.21}{4.21 - 1} \;=\; 1.31$$

und für den Erwartungswert der Schäden erhält man daraus den Schätzer

$$\widehat{E[X]} \;=\; \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\beta} - 1} \;=\; \frac{1.31}{1.31 - 1} \;=\; 4.21 \;=\; \overline{X}$$

(c) Die Exponentialverteilung $\mathbf{Exp}(\beta)$ besitzt den Erwartungswert $1/\beta$. Nach (a) gilt daher

$$E[\log(X)] \;=\; \frac{1}{\beta}$$

und damit

$$\beta \;=\; \frac{1}{E[\log(X)]}$$

Für den Momentenschätzer von β auf der Basis der logarithmierten Schäden ergibt sich daher

$$\widehat{\beta} \;=\; \frac{1}{\overline{\log(X)}} \;=\; \frac{1}{0.96} \;=\; 1.04$$

und für den Erwartungswert der Schäden erhält man daraus den Schätzer

$$\widehat{E[X]} \;=\; \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\beta} - 1} \;=\; \frac{1.04}{1.04 - 1} \;=\; 26$$

(d) Pareto–verteilte Schäden sind mit großer Wahrscheinlichkeit Großschäden und besitzen daher einen großen Erwartungswert. Bei einer kleinen Stichprobe vom Umfang 23 tritt jedoch mit großer Wahrscheinlichkeit kein Großschaden auf, was bedeutet, dass in diesem Fall das Stichprobenmittel der Schäden den Erwartungswert stark unterschätzt.

Aufgabe 2 (Risikomodelle)

Der Gesamtschaden

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k$$

eines Bestandes wird durch ein kollektives Modell mit N Schäden und Schadenhöhen X_k modelliert. Dabei ist die Verteilung von N durch

n	0	1	3	5
$P[N = n]$	0.4	0.3	0.1	0.2

gegeben und für die Schadenhöhen gilt $E[X_k] = 38$ und $E[X_k^2] = 2560$.

(a) Berechnen Sie den Variationskoeffizienten von S.
(9 Punkte)

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ungleichung von Cantelli das Solvenzkapital, d.h. das kleinste Kapital s mit $P[S \leq s] = 0.995$.
(4 Punkte)

(c) Beurteilen Sie die Höhe des Solvenzkapitals.
(2 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} E[N] &= 1.6 \\ E[N^2] &= 6.2 \\ \text{var}[N] &= 3.64 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E[X] &= 38 \\ E[X^2] &= 2560 \\ \text{var}[X] &= 1116 \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen von Wald ergibt sich daher

$$\begin{aligned} E[S] &= E[N]\,E[X] \\ &= 1.6 \times 38 \\ &= 60.8 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{var}[S] &= E[N]\,\text{var}[X] + \text{var}[N]\,(E[X])^2 \\ &= 1.6 \times 1116 + 3.64 \times 38^2 \\ &= 7042 \end{aligned}$$

Für den Variationskoeffizienten erhält man daraus

$$v[S] = \frac{\sqrt{\text{var}[S]}}{E[S]} = \frac{\sqrt{7042}}{60.8} = 1.38$$

(b) Die Ungleichung von Cantelli lautet

$$P[S \geq E[S] + c] \leq \frac{\text{var}[S]}{c^2 + \text{var}[S]}$$

und aus der Bedingung

$$\frac{\text{var}[S]}{c^2 + \text{var}[S]} = 0.005$$

ergibt sich

$$c^2 = 199\,\text{var}[S] = 199 \times 7042 = 1\,401\,358$$

und damit

$$c = 1184$$

Für das gesuchte Kapital s gilt daher

$$s = E[S] + c = 60.8 + 1184 = 1245$$

(c) Das mit der Ungleichung von Cantelli bestimmte Solvenzkapital ist etwa das zwanzigfache des Erwartungswertes und übersteigt den Erwartungswert um 14 Standardabweichungen. Dies deutet darauf hin, dass das mit der Ungleichung von Cantelli bestimmte Solvenzkapital zu einem Sicherheitsgrad in der Nähe von 1 zu hoch ist.

Aufgabe 3 (Tarifierung)

Bei einer Transportversicherung tritt ein Schaden der Höhe X mit der folgenden Verteilung ein:

x	0	50	1000
$P[X = x]$	0.7	0.2	0.1

(a) Berechnen Sie die Bruttorisikoprämie $H[X]$ nach dem Varianzprinzip mit dem Parameter $\beta = 0.0005$.
(3 Punkte)

(b) Das Versicherungsunternehmen prüft, ob es zusätzlich die folgenden Varianten anbieten soll:

(1) Einführung eines Abzugsfranchise in Höhe von 60.

(2) Einführung einer Integralfranchise in Höhe von 60.

(3) Einführung einer Beitragsrückerstattung in Höhe von 60, falls kein Schaden gemeldet wird.

Berechnen Sie jeweils die Bruttorisikoprämie gemäß (a).
(6 Punkte)

(c) Welche der vier Vertragsmöglichkeiten unter (a) und (b) ist für den Versicherungsnehmer im Hinblick auf den Eintritt des Worst Case am günstigsten? Begründen Sie Ihre Antwort.
(6 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} E[X] &= 110 \\ \mathrm{var}[X] &= 88\,400 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} H[X] &= E[X] + 0.0005\,\mathrm{var}[X] \\ &= 110 + 0.0005 \times 88\,400 \\ &= 154.20 \end{aligned}$$

(b) (1) Für die Abzugsfranchise in Höhe von 60 gibt sich die Versicherungsleistung

$$Y = (X-60)^+$$

mit

y	0	940
$P[Y=y]$	0.9	0.1

und damit

$$\begin{aligned} E[Y] &= 94 \\ \mathrm{var}[Y] &= 79\,524 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} H[Y] &= E[Y] + 0.0005\,\mathrm{var}[Y] \\ &= 94 + 0.0005 \times 79\,524 \\ &= 133.76 \end{aligned}$$

(2) Für die Integralfranchise in Höhe von 60 gibt sich die Versicherungsleistung

$$Z = X\chi_{\{X>60\}}$$

mit

z	0	1000
$P[Z=z]$	0.9	0.1

und damit

$$\begin{aligned} E[Z] &= 100 \\ \mathrm{var}[Z] &= 90\,000 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} H[Z] &= E[Z] + 0.0005\,\mathrm{var}[Z] \\ &= 100 + 0.0005 \times 90\,000 \\ &= 145.00 \end{aligned}$$

(3) Für die Beitragsrückerstattung in Höhe von 60 ergibt sich die Versicherungsleistung

$$U = 60\chi_{\{X \leq 60\}} + 1000\chi_{\{X > 60\}}$$

mit

u	60	1000
$P[U = u]$	0.9	0.1

und damit

$$\begin{aligned} E[U] &= 154 \\ \operatorname{var}[U] &= 79\,524 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} H[U] &= E[U] + 0.0005 \operatorname{var}[U] \\ &= 154 + 0.0005 \times 79\,524 \\ &= 193.76 \end{aligned}$$

(c) (1) Im Fall (a) hat die Realisation der Zufallsvariablen X keinen Einfluss auf den Aufwand des Versicherungsnehmers. Sein Aufwand beträgt in jedem Fall

$$H[X] = 154.20$$

(2) Im Fall (b)(1) tritt der Worst Case genau dann ein, wenn sich ein Schaden der Höhe 1000 einstellt, und in diesem Fall beträgt der Aufwand des Versicherungsnehmers

$$H[Y] + 60 = 133.76 + 60 = 193.76$$

(3) Im Fall (b)(2) tritt der Worst Case genau dann ein, wenn sich ein Schaden der Höhe 50 einstellt, und in diesem Fall beträgt der Aufwand des Versicherungsnehmers

$$H[Z] + 50 = 145.00 + 50 = 195.00$$

(4) Im Fall (b)(3) tritt der Worst Case genau dann ein, wenn sich ein Schaden der Höhe 1000 einstellt, denn in diesem Fall erhält der Versicherungsnehmer keine Beitragsrückerstattung und sein Aufwand beträgt

$$E[U] = 193.76$$

Ein (risikoaverser) Versicherungsnehmer wird sich also für die Variante (a) entscheiden. Er meidet also das mit dem Selbstbehalt oder der Beitragsrückerstattung verbundene Risiko.

Aufgabe 4 (Tarifierung)

Ein Versicherungsunternehmen mit einem inhomogenen Bestand geht davon aus, dass sich der Bestand zu gleichen Teilen aus drei Typen von Versicherungsnehmern zusammensetzt. Diese unterscheiden sich durch die Wahrscheinlichkeiten, mit denen sie innerhalb eines Jahres einen Schaden verursachen:

	Schadeneintrittswahrscheinlichkeit
Typ I	0.1
Typ II	0.2
Typ III	0.3

Bei jedem Versicherungsnehmer tritt innerhalb eines Jahres höchstens ein Schaden auf und die Höhe eines Schadens ist 1000.
Zur Risikoselektion wird das folgende Bonus–Malus–System mit den drei Klassen 1, 2 und 3 verwendet:

– Im ersten Jahr ist jeder Versicherungsnehmer in der Klasse 1.
– Bei schadenfreiem Verlauf in einem Jahr wird der Versicherungsnehmer eine Klasse höher eingestuft oder bleibt in der höchsten Klasse 3.
– Verursacht der Versicherungsnehmer in einem Jahr einen Schaden, so wird er in die Klasse 1 zurückgestuft.

(a) Bestimmen Sie die Nettorisikoprämie (Erwartungswert der Schadenzahlungen) für einen Versicherungsnehmer, von dem nicht bekannt ist, zu welchem Typ er gehört (also die kollektive Nettorisikoprämie).
(2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie für alle $k \in \{1, 2, 3\}$ die Nettorisikoprämie für die Versicherungsnehmer, die sich nach 2 Jahren (und damit im 3. Jahr) in der Klasse k befinden.
(6 Punkte)

(c) Prüfen Sie, ob sich die Verteilung der Risikotypen auf die drei Klassen nach dem 3. Jahr ändert.
(4 Punkte)

(d) Beurteilen Sie stichwortartig die Leistung des Bonus–Malus–Systems bei der Selektion der Risikotypen.
(3 Punkte)

Lösung:

(a) Sei X der Schaden eines Versicherungsnehmers, von dem nicht bekannt ist, zu welchem Typ er gehört. Für die Nettorisikoprämie gilt

$$E[X] \;=\; 1000 \times \frac{0.1+0.2+0.3}{3} \;=\; 200$$

(b) Für die Verteilungen der drei Typen auf die Klassen 1, 2 und 3 nach 2 Jahren gilt

Klasse k	1	2	3
Typ I	$0.1^2 + 0.9 \times 0.1 = 0.10$	$0.1 \times 0.9 = 0.09$	$0.9^2 = 0.81$
Typ II	$0.2^2 + 0.8 \times 0.2 = 0.20$	$0.2 \times 0.8 = 0.16$	$0.8^2 = 0.64$
Typ III	$0.3^2 + 0.7 \times 0.3 = 0.30$	$0.3 \times 0.7 = 0.21$	$0.7^2 = 0.49$

Sei X der Schaden eines Versicherungsnehmers im dritten Jahr. Da der Bestand zu gleichen Teilen aus den drei Typen besteht, erhält man die Nettorisikoprämien

$$\begin{aligned}
E[X|\text{Klasse 1}] &= 1000 \times \left(0.1 \times \frac{0.10}{0.60} + 0.2 \times \frac{0.20}{0.60} + 0.3 \times \frac{0.30}{0.60}\right) &= 233 \\
E[X|\text{Klasse 2}] &= 1000 \times \left(0.1 \times \frac{0.09}{0.46} + 0.2 \times \frac{0.16}{0.46} + 0.3 \times \frac{0.21}{0.46}\right) &= 226 \\
E[X|\text{Klasse 3}] &= 1000 \times \left(0.1 \times \frac{0.81}{1.94} + 0.2 \times \frac{0.64}{1.94} + 0.3 \times \frac{0.49}{1.94}\right) &= 184
\end{aligned}$$

(c) Mit $p \in \{0.1, 0.2, 0.3\}$ haben die Übergangsmatrizen für die drei Typen die Gestalt

$$\mathbf{Q} \;=\; \begin{pmatrix} p & p & p \\ 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 1-p \end{pmatrix}$$

und die Verteilungen nach 2 Jahren haben die Gestalt

$$\mathbf{q} \;=\; \begin{pmatrix} p^2 + (1-p)p \\ p\,(1-p) \\ (1-p)^2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} p \\ p - p^2 \\ 1 - 2p + p^2 \end{pmatrix}$$

Eine einfache Rechnung ergibt $\mathbf{Qq} = \mathbf{q}$. Daher wird bereits nach 2 Jahren der stationäre Zustand erreicht und die Nettorisikoprämien gemäß (b) können für die Kalkulation einer dauerhaften Prämie verwendet werden.

(d) Das Bonus-Malus-System ist zu einfach, denn es differenziert zu wenig. Idealerweise sollten die Nettorisikoprämien auf Grund der Schadenhistorie dem Verhältnis der Nettorisikoprämien der einzelnen Risikotypen entsprechen und damit im vorliegenden Fall das Verhältnis 1:2:3 haben.

Aufgabe 5 (Reservierung)

Die folgende Tabelle enthält für die Anfalljahre 2015 bis 2018 die Schadenstände der Abwicklungsjahre 0 bis 3 sowie a–priori Schätzer für das Abwicklungsmuster für Quoten:

Anfall-jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3
2015	415	660	800	880
2016	445	640	760	
2017	440	650		
2018	450			
γ_k^{extern}	0.45	0.75	0.90	1

(a) Schätzen Sie die Reserve für 2021 mit dem Chain–Ladder Verfahren.
(6 Punkte)

(b) Schätzen Sie die Reserve für 2021 mit dem Loss–Development Verfahren unter Verwendung der externen Schätzer der Quoten.
(5 Punkte)

(c) Welche Reserve für 2021 ergibt sich, wenn man das Loss–Development Verfahren unter Verwendung der Chain–Ladder Quoten durchführt?
(4 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_3^{\mathrm{CL}} &= \frac{880}{800} = 1.10 \\
\varphi_2^{\mathrm{CL}} &= \frac{800+760}{660+640} = 1.20 \\
\varphi_1^{\mathrm{CL}} &= \frac{660+640+650}{415+445+440} = 1.50
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$S_{2018,2}^{\mathrm{CL}} = S_{2018,0} \cdot \varphi_1^{\mathrm{CL}} \cdot \varphi_2^{\mathrm{CL}} = 450 \times 1.50 \times 1.20 = 810$$

und

$$S_{2018,3}^{\mathrm{CL}} = S_{2018,0} \cdot \varphi_1^{\mathrm{CL}} \cdot \varphi_2^{\mathrm{CL}} \cdot \varphi_3^{\mathrm{CL}} = 450 \times 1.50 \times 1.20 \times 1.10 = 891$$

und damit

$$R_{(2021)}^{\mathrm{CL}} = Z_{2021,3}^{\mathrm{CL}} = S_{2018,3}^{\mathrm{CL}} - S_{2018,2}^{\mathrm{CL}} = 891 - 810 = 81$$

(b) Es gilt

$$S_{2018,3}^{\mathrm{LD}} = \gamma_3^{\mathrm{extern}} \cdot \frac{S_{2018,0}}{\gamma_0^{\mathrm{extern}}} = 1 \times \frac{450}{0.45} = 1000$$

und

$$S_{2018,2}^{\mathrm{LD}} = \gamma_2^{\mathrm{extern}} \cdot \frac{S_{2018,0}}{\gamma_0^{\mathrm{extern}}} = 0.9 \times \frac{450}{0.45} = 900$$

und damit

$$R_{(2021)}^{\mathrm{LD}} = Z_{2021,3}^{\mathrm{LD}} = S_{2018,3}^{\mathrm{LD}} - S_{2018,2}^{\mathrm{LD}} = 1000 - 900 = 100$$

(c) Bei Verwendung der Chain–Ladder Quoten im Loss–Development Verfahren stimmen die Loss–Development Schätzer mit den entsprechenden Chain–Ladder Schätzern überein. Nach (a) erhält man daher

$$R_{(2021)}^{\mathrm{LD}} = 81$$

Aufgabe 6 (Reservierung)

Dir folgende Tabelle enthält die Zahlungen für Schäden aus den Anfalljahren 2015 bis 2018 in den Abwicklungsjahren 0 bis 3 sowie die Prämien der Anfalljahre und externe Schätzer für das Abwicklungsmuster für Quoten:

Anfall-jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2015	370	260	110	40	1000
2016	410	220	130		1000
2017	420	240			1000
2018	400				1000
γ_k^{extern}	0.377	0.750	0.950	1	

Für die Schadenstände ergibt sich daraus die Tabelle

Anfall-jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2015	370	630	740	780	1000
2016	410	630	760		1000
2017	420	660			1000
2018	400				1000
γ_k^{extern}	0.377	0.750	0.950	1	

(a) Schätzen Sie den Endschadenstand für 2018 mit dem additiven Verfahren.
(4 Punkte)

(b) Schätzen Sie den Endschadenstand für 2018 mit dem Cape–Cod Verfahren.
(5 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Schätzer

$$\kappa_i^{\text{AD}} := \frac{S_{i,2018-i}}{\gamma_{2018-i}^{\text{AD}}\,\pi_i}$$

und

$$\kappa_i^{\text{extern}} := \frac{S_{i,2018-i}}{\gamma_{2018-i}^{\text{extern}}\,\pi_i}$$

und argumentieren Sie auf der Grundlage dieser Ergebnisse für oder gegen die Annahme, dass bezüglich der Schätzer γ_k^{AD} bzw. γ_k^{extern} eine anfalljahrunabhängige Endschadenquote vorliegt.
(6 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\zeta_3^{\mathrm{AD}} &= \frac{40}{1000} = 0.04 \\
\zeta_2^{\mathrm{AD}} &= \frac{110+130}{1000+1000} = 0.12 \\
\zeta_1^{\mathrm{AD}} &= \frac{260+220+240}{1000+1000+1000} = 0.24 \\
\zeta_0^{\mathrm{AD}} &= \frac{370+410+420+400}{1000+1000+1000+1000} = 0.40
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
S_{2018,3}^{\mathrm{AD}} &= S_{2018,0} + \sum_{k=1}^{3} \zeta_k \, \pi_{2018} \\
&= S_{2018,0} + \pi_{2018} \sum_{k=1}^{3} \zeta_k \\
&= 400 + 1000 \times \Big(0.24 + 0.12 + 0.04\Big) \\
&= 800
\end{aligned}$$

(b) Für das Cape–Cod Verfahren wird die Cape–Cod Endschadenquote benötigt. Für die verbrauchten Prämien erhält man

Anfall-jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2015				1000	1000
2016			950		1000
2017		750			1000
2018	377				1000
$\gamma_k^{\mathrm{extern}}$	0.377	0.750	0.950	1	

und damit die Cape–Cod Endschadenquote

$$\kappa^{\mathrm{CC}} = \frac{400+660+760+780}{377+750+950+1000} = 0.845$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
S_{2018,3}^{\mathrm{CC}} &= S_{2018,0} + (\gamma_3^{\mathrm{extern}} - \gamma_0^{\mathrm{extern}})\, \pi_{2018}\, \kappa^{\mathrm{CC}} \\
&= 400 + (1 - 0.377) \times 1000 \times 0.845 \\
&= 926
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\kappa^{\mathrm{AD}} = \sum_{k=0}^{3} \zeta_k^{\mathrm{AD}} = 0.40 + 0.24 + 0.12 + 0.04 = 0.80$$

Mit $\vartheta_k^{\text{AD}} := \zeta_k^{\text{AD}} / \kappa^{\text{AD}}$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
\vartheta_0^{\text{AD}} &= \frac{0.40}{0.80} = 0.500 \\
\vartheta_1^{\text{AD}} &= \frac{0.24}{0.80} = 0.300 \\
\vartheta_2^{\text{AD}} &= \frac{0.12}{0.80} = 0.150 \\
\vartheta_3^{\text{AD}} &= \frac{0.04}{0.80} = 0.050
\end{aligned}$$

und mit $\gamma_k^{\text{AD}} := \sum_{l=0}^{k} \vartheta_l^{\text{AD}}$ erhält man sodann

$$\begin{aligned}
\gamma_0^{\text{AD}} &= 0.500 \\
\gamma_1^{\text{AD}} &= 0.500 + 0.300 = 0.800 \\
\gamma_2^{\text{AD}} &= 0.500 + 0.300 + 0.150 = 0.950 \\
\gamma_3^{\text{AD}} &= 0.500 + 0.300 + 0.150 + 0.050 = 1
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\kappa_{2015}^{\text{AD}} &= \frac{780}{1.000 \times 1000} = 0.780 \\
\kappa_{2016}^{\text{AD}} &= \frac{760}{0.950 \times 1000} = 0.800 \\
\kappa_{2017}^{\text{AD}} &= \frac{660}{0.800 \times 1000} = 0.825 \\
\kappa_{2018}^{\text{AD}} &= \frac{400}{0.500 \times 1000} = 0.800
\end{aligned}$$

Aufgrund der geringen Volatilität dieser Werte könnte man die Annahme, dass bei Verwendung der Schätzer γ_k^{AD} eine anfalljahrunabhängige Endschadenquote vorliegt, akzeptieren.
Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\kappa_{2015}^{\text{extern}} &= \frac{780}{1.000 \times 1000} = 0.780 \\
\kappa_{2016}^{\text{extern}} &= \frac{760}{0.950 \times 1000} = 0.800 \\
\kappa_{2017}^{\text{extern}} &= \frac{660}{0.750 \times 1000} = 0.880 \\
\kappa_{2018}^{\text{extern}} &= \frac{400}{0.377 \times 1000} = 1.061
\end{aligned}$$

Der starke Trend in diesen Ergebnissen deutet darauf hin, dass bei Verwendung der Schätzer γ_k^{extern} keine anfalljahrunabhängige Endschadenquote vorliegt.

Aufgabe 7 (Risikoteilung und Rückversicherung)

Ein Erstversicherer hat einen Bestand, dessen Gesamtschaden

$$S \;=\; \sum_{k=1}^{N} X_k$$

durch ein kollektives Modell mit der Schadenanzahl N und den Einzelschäden X_k beschrieben wird. Es gilt

n	0	1	2	3
$P[N=n]$	0.5	0.3	0.1	0.1

und

x	1000	2000	3000
$P[X_k=x]$	0.7	0.2	0.1

Eine Schadenexzedenten–Rückversicherung mit Priorität $M \in (0,\infty)$ und Limit $L>0$ zahlt für jeden Einzelschaden der Höhe X den Betrag $\min\{\max\{X-M,0\},L\}$. Eine Stop–Loss Rückversicherung mit Priorität $M \in (0,\infty)$ und Limit $L>0$ zahlt bei einem Gesamtschaden der Höhe S den Betrag $\min\{\max\{S-M,0\},L\}$.

(a) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für eine Schadenexzedenten–Rückversicherung mit Priorität 500 und Limit 1000.
(5 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für eine Stop–Loss Rückversicherung mit Priorität 6000 und Limit 2000.
(7 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für diese Stop–Loss Rückversicherung, wenn schon eine Schadenexzedenten–Rückversicherung mit Priorität 500 und Limit 1000 abgeschlossen ist, also wenn die Zahlungen des Erstversicherers nach Abzug der Zahlungen aus der Schadenexzedenten–Rückversicherung betrachtet werden.
(3 Punkte)

Lösung:

(a) Für die Zahlungen $\tilde{X}_k = (X_k - 500)^+ \wedge 1000$ des Schadenexzedenten–Rückversicherers gilt

x	500	1000
$P[\tilde{X}_k = x]$	0.7	0.3

und damit $E[\tilde{X}] = 650$. Mit $E[N] = 0.8$ erhält man sodann aus der ersten Gleichung von Wald

$$E\left[\sum_{k=1}^{N} \tilde{X}_k\right] \;=\; E[N]\,E[\tilde{X}] \;=\; 0.8 \times 650 \;=\; 520$$

(b) Für die Zahlung des Stop–Loss Rückversicheres gilt

$$\begin{aligned}(S-6000)^+ \wedge 2000 &= \sum_{n=0}^{3} \chi_{\{N=n\}} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k - 6000\right)^+ \wedge 2000 \\ &= \chi_{\{N=3\}} \Big(X_1 + X_2 + X_3 - 6000\Big)^+ \wedge 2000\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}E\Big[(S-6000)^+ \wedge 2000\Big] &= E\Big[\chi_{\{N=3\}} \Big(X_1 + X_2 + X_3 - 6000\Big)^+ \wedge 2000\Big] \\ &= P[N=3]\, E\Big[\Big(X_1 + X_2 + X_3 - 6000\Big)^+ \wedge 2000\Big] \\ &= 0.1\, E\Big[\Big(X_1 + X_2 + X_3 - 6000\Big)^+ \wedge 2000\Big]\end{aligned}$$

Desweiteren gilt $(X_1 + X_2 + X_3 - 6000)^+ \wedge 2000 = 1000$ genau dann, wenn
- ein Schaden der Höhe 3000 und zwei Schäden der Höhe 2000 oder aber
- ein Schaden der Höhe 1000 und zwei Schäden der Höhe 3000

vorliegen, und die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist

$$3 \times 0.1 \times 0.2 \times 0.2 + 3 \times 0.7 \times 0.1 \times 0.1 \;=\; 0.033$$

Außerdem gilt $(X_1 + X_2 + X_3 - 6000)^+ \wedge 2000 = 2000$ genau dann, wenn
- ein Schaden der Höhe 2000 und zwei Schäden der Höhe 3000 oder aber
- drei Schäden der Höhe 3000

vorliegen, und die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist

$$3 \times 0.2 \times 0.1 \times 0.1 + 0.1 \times 0.1 \times 0.1 \;=\; 0.007$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned}E\Big[\Big(X_1 + X_2 + X_3 - 6000\Big)^+ \wedge 2000\Big] &= 1000 \times 0.033 + 2000 \times 0.007 \\ &= 47\end{aligned}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
E\Big[(S-6000)^+ \wedge 2000\Big] &= 0.1\,E\Big[\Big(X_1+X_2+X_3-6000\Big)^+ \wedge 2000\Big] \\
&= 0.1 \times 47 \\
&= 4.70
\end{aligned}
$$

(c) Für die Differenzen $X_k - \tilde{X}_k$ gilt

x	500	1000	2000
$P[X_k - \tilde{X}_k = x]$	0.7	0.2	0.1

Daraus erhält man

$$
\left(\sum_{k=1}^{N}(X_k - \tilde{X}_k) - 6000\right)^+ \wedge 2000 \;=\; 0
$$

und damit

$$
E\left[\left(\sum_{k=1}^{N}(X_k - \tilde{X}_k) - 6000\right)^+ \wedge 2000\right] \;=\; 0
$$

Aufgabe 8 (Risikoteilung und Rückversicherung)

Der Gesamtschaden S eines Versicherungsbestandes wird durch eine Pareto–Verteilung mit der Dichtefunktion f mit

$$f(x) \quad = \quad \beta\,(1+x)^{-\beta-1}\,\chi_{(0,\infty)}(x)$$

und $\beta > 0$ modelliert.
Eine Stop–Loss Rückversicherung mit Priorität $M \in (0,\infty)$ und Limit $L > 0$ zahlt bei einem Gesamtschaden der Höhe S den Betrag $\tilde{S} = \min\{\max\{S - M, 0\}, L\}$.

(a) Berechnen Sie für $\beta = 1.5$ die Nettorisikoprämie einer Stop–Loss Rückversicherung mit Priorität 5 und Limit ∞.
(4 Punkte)

(b) Berechnen Sie für $\beta = 0.5$ die Nettorisikoprämie einer Stop–Loss Rückversicherung mit Priorität 5 und Limit 5.
(4 Punkte)

(c) Berechnen Sie für $\beta = 2$ die Nettorisikoprämie eines Rückversicherungsvertrages, bei dem der Rückversicherer im Fall $S > 10$ zusätzlich zur Zahlung aus einer Stop–Loss Rückversicherung mit Priorität 5 und Limit 5 den Betrag $(S-10)/2$ zahlt.
(7 Punkte)

Lösung: Für die Verteilungsfunktion F von S gilt

$$F(x) = \Big(1-(1+x)^{-\beta}\Big)\chi_{(0,\infty)}(x)$$

Für den Erwartungswert von $\tilde{S}$ ergibt sich daraus im Fall $\beta \neq 1$

$$\begin{aligned} E[\tilde{S}] &= \int_M^{M+L} (1-F(x))\,dx \\ &= \int_M^{M+L} (1+x)^{-\beta}\,dx \\ &= \frac{1}{1-\beta}\,(1+x)^{-\beta+1}\Big|_M^{M+L} \\ &= \frac{1}{1-\beta}\Big((1+M+L)^{-\beta+1}-(1+M)^{-\beta+1}\Big) \end{aligned}$$

(a) Im Fall $\beta = 1.5$ erhält man für $M = 5$ und $L = \infty$

$$\begin{aligned} E[\tilde{S}] &= \frac{1}{1-1.5}\Big(\infty^{-1.5+1}-6^{-1.5+1}\Big) \\ &= \frac{1}{-0.5}\Big(0-6^{-0.5}\Big) \\ &= 0.8165 \end{aligned}$$

(b) Im Fall $\beta = 0.5$ erhält man für $M = 5$ und $L = 5$

$$\begin{aligned} E[\tilde{S}] &= \frac{1}{1-0.5}\Big(11^{-0.5+1}-6^{-0.5+1}\Big) \\ &= \frac{1}{0.5}\Big(11^{0.5}-6^{0.5}\Big) \\ &= 1.7343 \end{aligned}$$

(c) Im Fall $\beta = 2$ erhält man für $M = 5$ und $L = 5$

$$\begin{aligned} & E\left[(S-5)^+ \wedge 5 + \frac{S-10}{2}\,\chi_{\{S>10\}}\right] \\ &= E[(S-5)^+ \wedge 5] + \frac{1}{2}\,E[(S-10)^+] \\ &= \int_5^{10} (1-F(x))\,dx + \frac{1}{2}\int_{10}^{\infty} (1-F(x))\,dx \\ &= \frac{1}{1-\beta}\Big(11^{-\beta+1}-6^{-\beta+1}\Big) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\beta}\Big(0-11^{-\beta+1}\Big) \\ &= 6^{-1}-11^{-1}+\frac{1}{2}\,11^{-1} \\ &= \frac{1}{6}-\frac{1}{22} \\ &= \frac{4}{33} \\ &= 0.1212 \end{aligned}$$