Klausur zum
Grundwissen Schadenversicherungsmathematik

Christian Hipp, Martin Morlock, Hanspeter Schmidli, Klaus D. Schmidt

12. Mai 2018 in Köln

Die Klausur besteht aus 8 Aufgaben. Bei jeder Aufgabe sind maximal 15 Punkte zu erreichen. Insgesamt sind damit maximal 120 Punkte möglich.

Zum Bestehen sind 60 Punkte ausreichend.

Zugelassen sind die klassische Formelsammlung, die verteilt wird, sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner.

Alle Antworten sind zu begründen, und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1 (Risikomodelle)

Ein Versicherungsportfolio besteht aus 1000 Verträgen. Wir bezeichnen die Anzahl Schäden des Vertrages i mit N_i und nehmen an, dass die Familie $\{N_i\}_{i\in\{1,\dots,1000\}}$ unabhängig ist mit $P[N_i = 1] = 1 - P[N_i = 0] = p_i \in (0, 1)$.
Wir setzen $N := \sum_{i=1}^{1000} N_i$ und $\lambda := \sum_{i=1}^{1000} p_i$ und betrachten eine Zufallsvariable $\widetilde{N}$, die die Poisson–Verteilung mit Erwartungswert λ besitzt.

(a) Berechnen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion m_N von N.

(b) Berechnen Sie die Differenz $\ln m_N(t) - \ln m_{\widetilde{N}}(t)$.

(c) Für alle $p \in (0, 1)$ und $t \in [0, 1]$ gibt es ein $\xi \in (0, 1)$ mit

$$\ln\Big(1 - p(1-t)\Big) \quad = \quad -\,p(1-t) - \frac{1}{2}\,p^2(1-\xi)^2$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Gleichung, dass für alle $t \in [0, 1]$

$$\Big|\ln m_N(t) - \ln m_{\widetilde{N}}(t)\Big| \quad \le \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{1000} p_i^2$$

gilt.

(d) Diskutieren Sie, wann eine Poisson–Approximation sinnvoll ist.

Lösung:

(a) Die Zufallsvariable N_i besitzt die Binomial–Verteilung $\mathbf{B}(1; p_i)$. Für die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von N_i gilt daher

$$m_{N_i}(t) \;=\; (1-p_i) + p_i t \;=\; 1 - p_i(1-t)$$

Aufgrund der Unabhängigkeitsannahme gilt daher

$$m_N(t) \;=\; \prod_{i=1}^{1000} m_{N_i}(t) \;=\; \prod_{i=1}^{1000} \Big(1 - p_i(1-t)\Big)$$

(b) Für die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von $\widetilde{N}$ gilt

$$m_{\widetilde{N}}(t) \;=\; e^{-\lambda(1-t)}$$

Daraus ergibt sich

$$\ln m_N(t) - \ln m_{\widetilde{N}}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{1000} \ln\Big(1 - p_i(1-t)\Big) + \lambda(1-t)$$

(c) Für alle $i \in \{1, \ldots, 1000\}$ und $t \in [0,1]$ gibt es ein $\xi_i \in (0,1)$ mit

$$\ln\Big(1 - p_i(1-t)\Big) \;=\; -\,p_i(1-t) - \frac{1}{2}\,p_i^2(1-\xi_i)^2$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}\Big|\ln m_N(t) - \ln m_{\widetilde{N}}(t)\Big| \;&=\; \left|\sum_{i=1}^{1000}\Big(-\,p_i(1-t) - \frac{1}{2}\,p_i^2(1-\xi_i)^2\Big) + \lambda(1-t)\right| \\ &\leq\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{1000} p_i^2\end{aligned}$$

(d) Die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen sind nahe beieinander, wenn $\sum_{i=1}^{1000} p_i^2$ klein ist. Daher sollten die Wahrscheinlichkeiten p_i sehr klein sein. Das heißt, N sollte durch viele der N_i und nicht nur durch wenige bestimmt sein.

Aufgabe 2 (Risikomodelle)

Ein kollektiver Versicherungsvertrag erzeugt pro Jahr N Schäden mit Schadenhöhen X_k, wobei alle Zufallsvariablen unabhängig sind. Die Verteilungen der Schadenzahl N und der Schadenhöhen X_k sind durch

n	0	1	2	3	4
$P[N=n]$	0.4	0.3	0.1	0.1	0.1

und

x	10	20	40	100
$P[X_k=x]$	0.1	0.4	0.3	0.2

gegeben. Das Solvenzkapital ist das kleinste Kapital x mit

$$P\left[\sum_{k=1}^{N} X_k \leq x\right] \;\geq\; 0.995$$

Zeigen Sie, dass das Solvenzkapital gleich 280 ist.

Lösung:

Sei

$$S := \sum_{k=1}^{N} X_k$$

Es gilt $S > 280$ genau dann, wenn mindestens drei Schäden der Höhe 100 vorliegen. Daher gilt

$$P[S > 280] = 0.1 \cdot 0.2^3 + 0.1 \cdot \left(0.2^4 + \binom{4}{1} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8\right) = 0.00352$$

und damit

$$P[S \leq 280] = 1 - P[S > 280] = 1 - 0.00352 = 0.99648 \geq 0.995$$

Das Solvenzkapital beträgt also höchstens 280.
Andererseits gilt $S = 280$ genau dann, wenn vier Schäden vorliegen, von denen zwei die Höhe 100 und zwei die Höhe 40 besitzen. Daher gilt

$$P[S = 280] = 0.1 \cdot \binom{4}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.3^2 = 0.00216$$

Es gilt also

$$P[S > 279] = P[S = 280] + P[S > 280] = 0.00216 + 0.00352 = 0.00568$$

und damit

$$P[S \leq 279] = 0.99432 < 0.995$$

Das Solvenzkapital beträgt also genau 280.

Aufgabe 3 (Tarifierung)

Untersuchen Sie den Gesamtschaden S eines Versicherungsnehmers mit den unabhängigen Zufallsvariablen N (Schadenzahl) und X (Schadenhöhe) einer Versicherungsperiode, wobei

n	0	1
$P[N = n]$	0.9	0.1

und

x	10	100
$P[X = x]$	0.5	0.5

gilt.

(a) Berechnen Sie für den Gesamtschaden S die Prämie $H[S]$ nach dem Standardabweichungsprinzip zum Parameter $\delta = 0.01$.

(b) Berechnen Sie wie unter (a) die Prämie für den Fall, dass eine Selbstbeteiligung der Höhe 10 vereinbart wird.

(c) Vergleichen Sie die Höhen der prozentualen Sicherheitszuschläge auf die Nettorisikoprämie in den Fällen (a) und (b) und begründen Sie den Unterschied.

(d) Tritt der in (c) beobachtete Effekt auch beim Standardabweichungsprinzip mit beliebigem Parameter $\delta > 0$ auf?

(e) Tritt der in (c) beobachtete Effekt auch beim Varianzprinzip auf?

Lösung:

(a) Für den Erwartungswert und die Varianz des Gesamtschadens S erhält man

$$\begin{aligned} E[S] &= E[N]\,E[X] \\ &= 0.1 \cdot 55 \\ &= 5.5 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{var}[S] &= E[N]\,\mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[N]\,(E[X])^2 \\ &= 0.1 \cdot 2025 + (0.1 \cdot 0.9) \cdot 55^2 \\ &= 474.75 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Prämie

$$\begin{aligned} H[S] &= E[S] + \delta\,\sqrt{\mathrm{var}[S]} \\ &= 5.5 + 0.01 \cdot \sqrt{474.75} \\ &= 5.72 \end{aligned}$$

(b) Durch die Selbstbeteiligung in Höhe von 10 tritt an die Stelle der Zufallsvariablen X die Zufallsvariable $\widehat{X} := (X-10)^+$. Wegen $X \geq 10$ gilt $\widehat{X} = X-10$, und damit $E[\widehat{X}] = E[X] - 10 = 55 - 10 = 45$ und $\mathrm{var}[\widehat{X}] = \mathrm{var}[X] = 2025$. Für den Erwartungswert und die Varianz des zugehörigen Gesamtschadens $\widehat{S}$ erhält man daher

$$\begin{aligned} E[\widehat{S}] &= E[N]\,E[\widehat{X}] \\ &= 0.1 \cdot 45 \\ &= 4.5 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{var}[\widehat{S}] &= E[N]\,\mathrm{var}[\widehat{X}] + \mathrm{var}[N]\,(E[\widehat{X}])^2 \\ &= 0.1 \cdot 2025 + (0.1 \cdot 0.9) \cdot 45^2 \\ &= 384.75 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Prämie

$$\begin{aligned} H[\widehat{S}] &= E[\widehat{S}] + \delta\,\sqrt{\mathrm{var}[\widehat{S}]} \\ &= 4.5 + 0.01 \cdot \sqrt{384.75} \\ &= 4.70 \end{aligned}$$

(c) Die prozentualen Sicherheitszuschläge betragen

$$\frac{\delta\sqrt{\mathrm{var}[S]}}{E[S]} = \frac{0.01 \cdot \sqrt{474.75}}{5.5} = 3.96\%$$

und

$$\frac{\delta\sqrt{\mathrm{var}[\widehat{S}]}}{E[\widehat{S}]} = \frac{0.01 \cdot \sqrt{384.75}}{4.5} = 4.36\%$$

Dieser Effekt lässt sich dadurch erklären, dass, gemessen am Variationskoeffizienten, beim Gesamtschaden $\widehat{S}$ ein größeres Risiko vorliegt als bei S.

(d) Beim Standardabweichungsprinzip mit einem beliebigen Parameter $\delta > 0$ ist der prozentuale Sicherheitszuschlag das Produkt aus dem Parameter und dem Variationskoeffizienten des Gesamtschadens. Es ist bekannt, dass der Variationskoeffizient des Gesamtschadens mit einer Erhöhung des Selbstbehalts monoton wächst.

(e) Der Effekt, dass eine höhere Selbstbeteiligung beim Versicherer zu einem höheren prozentualen Sicherheitszuschlag führt, ist beim Varianzprinzip nicht gewährleistet, denn in diesem Fall erhält man mit $\delta = 0.01$

$$\frac{\delta\,\mathrm{var}[S]}{E[S]} = \frac{0.01 \cdot 474.75}{5.5} = 86.32\%$$

und

$$\frac{\delta\,\mathrm{var}[\widehat{S}]}{E[\widehat{S}]} = \frac{0.01 \cdot 384.75}{4.5} = 85.50\%$$

Aufgabe 4 (Tarifierung)

Ein Versicherungsunternehmen (VU) mit einem inhomogenen Bestand gewährt seinen Versicherungsnehmern (VN) folgende Prämienreduktionen in Abhängigkeit der Anzahl der Jahre ununterbrochener Schadenfreiheit:

	Klasse 1	Klasse 2
Anzahl der Jahre ununterbrochener Schadenfreiheit	1 Jahr	2 Jahre
Rabatt auf die Basisprämie B	20%	40%

In jedem Jahr hat ein VN höchstens einen Schaden. Die Schadenhöhe ist deterministisch und beträgt 5000. Die Schäden eines VN in den verschiedenen Jahren treten unabhängig voneinander auf.

Der Bestand des VU besteht zu 60% aus VN des Typs I und zu 40% aus VN des Typs II. Sie unterscheiden sich durch ihre Schadeneintrittswahrscheinlichkeiten:

VN	Schadeneintrittswahrscheinlichkeit
Typ I	0.1
Typ II	0.2

(a) Die folgende Tabelle enthält die stationären Verteilungen der VN vom Typ I bzw. II auf die (Beitrags–)Klassen:

	Klasse 0	Klasse 1	Klasse 2
Prämie	B	$0.8\,B$	$0.6\,B$
Typ I	0.10	0.09	0.81
Typ II	0.20	0.16	0.64

Weisen Sie dies für VN des Typs I nach.

(b) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie (Erwartungswert des Schadens für einen VN) in der Klasse 0 im stationären Fall.

(c) Berechnen Sie die Basisprämie B für den stationären Fall nach dem Äquivalenzprinzip, also so, dass der Erwartungswert der Prämien eines beliebig herausgegriffenen Versicherungsnehmers gleich dem Erwartungswert seines Schadenaufkommens ist.

(d) Entspricht die Basisprämie B in der Klasse 0 einer risikogerechten Nettorisikoprämie? (Unterschiede sind gegebenenfalls zu begründen.)

Lösung:

(a) Für VN vom Typ I sind die Übergangsmatrix und die stationäre Verteilung durch

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.9 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.09 \\ 0.81 \end{pmatrix}$$

gegeben und es gilt

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.09 \\ 0.81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.09 \\ 0.81 \end{pmatrix}$$

(b) Die Nettorisikoprämie für einen VN vom Typ I beträgt

$$0.1 \cdot 5000 = 500$$

Die Nettorisikoprämie für einen VN vom Typ I beträgt

$$0.2 \cdot 5000 = 1000$$

Im stationären Fall beträgt die Nettorisikoprämie Π_0 für einen VN in der Klasse 0 daher

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{0.10 \cdot 0.60}{0.10 \cdot 0.60 + 0.20 \cdot 0.40} \cdot 500 + \frac{0.20 \cdot 0.40}{0.10 \cdot 0.60 + 0.20 \cdot 0.40} \cdot 1000 \\ &= 785.71 \end{aligned}$$

(c) Für $i \in \{0, 1, 2\}$ bezeichne ϑ_i die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter VN sich im stationären Fall in Klasse i befindet. Nach dem Äquivalenzprinzip ist die Basisprämie B so zu bestimmen, dass

$$(1 \cdot \vartheta_0 + 0.8 \cdot \vartheta_1 + 0.6 \cdot \vartheta_2) \cdot B = 500 \cdot 0.60 + 1000 \cdot 0.40 = 700$$

gilt. Es gilt

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= 0.10 \cdot 0.60 + 0.20 \cdot 0.40 = 0.140 \\ \vartheta_1 &= 0.09 \cdot 0.60 + 0.16 \cdot 0.40 = 0.118 \\ \vartheta_2 &= 0.81 \cdot 0.60 + 0.64 \cdot 0.40 = 0.742 \end{aligned}$$

und damit

$$1 \cdot \vartheta_0 + 0.8 \cdot \vartheta_1 + 0.6 \cdot \vartheta_2 = 1 \cdot 0.140 + 0.8 \cdot 0.118 + 0.6 \cdot 0.742 = 0.6796$$

Daraus ergibt sich $B = 700/0.6796 = 1030.02$.

(d) Die (risikogerechte) Nettorisikoprämie in der Klasse 0 orientiert sich an der Zusammensetzung der VN in dieser Klasse und gemäß (b) gilt $\Pi_0 = 785.71$. Die Nettorisikoprämie ist damit deutlich niedriger als die Basisprämie $B = 1030.02$. Der Grund hierfür liegt darin, dass die Basisprämie die Rabatte in den Klassen 1 und 2 finanzieren muss.

Aufgabe 5 (Reservierung)

Das folgende Abwicklungsdreieck für Zuwächse enthält für die Anfalljahre 2014 bis 2017 die Prämien und die Schadenzahlungen in den Abwicklungsjahren 0 bis 3:

Anfall-	**Abwicklungsjahr** k				**Prämie**
jahr i	0	1	2	3	π_i
2014	170	108	56	18	400
2015	190	112	52		400
2016	200	104			400
2017	160				400

Es wird angenommen, dass ein Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse vorliegt.

(a) Berechnen Sie die additiven Schadenquotenzuwächse und schätzen Sie die (für alle Anfalljahre identische) erwartete Endschadenquote.

(b) Schätzen Sie unter Verwendung der Prämien die Abwicklungsmuster für Anteile und für Quoten.

(c) Schätzen Sie mit dem additiven Verfahren die Reserve und den Endschadenstand für 2017.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\zeta_3^{\mathrm{AD}} &= \frac{18}{400} = 0.045 \\
\zeta_2^{\mathrm{AD}} &= \frac{56+52}{400+400} = 0.135 \\
\zeta_1^{\mathrm{AD}} &= \frac{108+112+104}{400+400+400} = 0.270 \\
\zeta_0^{\mathrm{AD}} &= \frac{170+190+200+160}{400+400+400+400} = 0.450
\end{aligned}$$

und damit

$$\kappa^{\mathrm{AD}} = \sum_{k=0}^{3} \zeta_k^{\mathrm{AD}} = 0.450+0.270+0.135+0.045 = 0.900$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\vartheta_0^{\mathrm{AD}} &= \frac{0.450}{0.900} = 0.50 \\
\vartheta_1^{\mathrm{AD}} &= \frac{0.270}{0.900} = 0.30 \\
\vartheta_2^{\mathrm{AD}} &= \frac{0.135}{0.900} = 0.15 \\
\vartheta_3^{\mathrm{AD}} &= \frac{0.045}{0.900} = 0.05
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\gamma_0^{\mathrm{AD}} &= 0.50 \\
\gamma_1^{\mathrm{AD}} &= 0.50+0.30 = 0.80 \\
\gamma_2^{\mathrm{AD}} &= 0.80+0.15 = 0.95 \\
\gamma_3^{\mathrm{AD}} &= 1
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
R_{2017}^{\mathrm{AD}} &= \sum_{k=1}^{3} Z_{2017,k}^{\mathrm{AD}} \\
&= \sum_{k=1}^{3} \pi_{2017}\, \zeta_k^{\mathrm{AD}} \\
&= \pi_{2017} \sum_{k=1}^{3} \zeta_k^{\mathrm{AD}} \\
&= 400 \cdot (0.270+0.135+0.045) \\
&= 180
\end{aligned}$$

und damit

$$S_{2017,3}^{\mathrm{AD}} \quad = \quad S_{2017,0} + R_{2017}^{\mathrm{AD}} \quad = \quad 160 + 180 \quad = \quad 340$$

Aufgabe 6 (Reservierung)

Dir folgende Tabelle enthält das Abwicklungsdreieck für Schadenstände der Anfalljahre 2014 bis 2017 sowie die Prämien der Anfalljahre 2014 bis 2017 und externe Schätzer für das Abwicklungsmuster für Quoten:

Anfall-jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2014				298	300
2015			285		320
2016		221			320
2017	168				340
γ_k^{extern}	0.60	0.85	0.95	1	

Es wird angenommen, dass nicht nur ein Abwicklungsmuster für Quoten sondern auch eine anfalljahrunabhängige erwartete Endschadenquote vorliegt.

(a) Schätzen Sie die Anfalljahrreserven mit dem Loss–Development Verfahren.

(b) Schätzen Sie die Anfalljahrreserven mit dem Cape–Cod Verfahren.

(c) Schätzen Sie die Anfalljahrreserven mit dem Bornhuetter–Ferguson Verfahren unter Verwendung der Prämien und des externen Schätzwertes $\kappa^{\text{extern}} = 0.819$ der erwarteten Endschadenquote.

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Loss–Development Endschadenstände $S_{i,3}^{\text{LD}}$ die Schätzer

$$\kappa_i^{\text{LD}} \quad := \quad \frac{S_{i,3}^{\text{LD}}}{\pi_i}$$

der Endschadenquote und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Cape–Cod Endschadenquote und dem Schätzwert κ^{extern}.

Lösung:

(a) Mit dem Loss–Development Verfahren erhält man die Endschadenstände

$$\begin{aligned} S^{\mathrm{LD}}_{2015,3} &= \frac{285}{0.95} = 300 \\ S^{\mathrm{LD}}_{2016,3} &= \frac{221}{0.85} = 260 \\ S^{\mathrm{LD}}_{2017,3} &= \frac{168}{0.60} = 280 \end{aligned}$$

und damit die Anfalljahrreserven

$$\begin{aligned} R^{\mathrm{LD}}_{2015} &= 300 - 285 = 15 \\ R^{\mathrm{LD}}_{2016} &= 260 - 221 = 39 \\ R^{\mathrm{LD}}_{2017} &= 280 - 168 = 112 \end{aligned}$$

(b) Für das Cape–Cod Verfahren wird die Cape–Cod Endschadenquote benötigt. Für die verbrauchten Prämien erhält man

Anfall-jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2014				300	300
2015			304		320
2016		272			320
2017	204				340
$\gamma_k^{\mathrm{extern}}$	0.60	0.85	0.95	1	

Daraus ergibt sich die Cape–Cod Endschadenquote

$$\kappa^{\mathrm{CC}} = \frac{168 + 221 + 285 + 298}{204 + 272 + 304 + 300} = 0.9$$

und für die a–priori Schätzer $\alpha_i^{\mathrm{CC}} := \kappa^{\mathrm{CC}} \pi_i$ der Endschadenstände erhält man

$$\begin{aligned} \alpha^{\mathrm{CC}}_{2015} &= 0.9 \cdot 320 = 288 \\ \alpha^{\mathrm{CC}}_{2016} &= 0.9 \cdot 320 = 288 \\ \alpha^{\mathrm{CC}}_{2017} &= 0.9 \cdot 340 = 306 \end{aligned}$$

Mit dem Cape–Cod Verfahren erhält man daher die Anfalljahrreserven

$$\begin{aligned} R^{\mathrm{CC}}_{2015} &= (1 - 0.95) \cdot 288 = 14.40 \\ R^{\mathrm{CC}}_{2016} &= (1 - 0.85) \cdot 288 = 43.20 \\ R^{\mathrm{CC}}_{2017} &= (1 - 0.60) \cdot 306 = 122.40 \end{aligned}$$

(c) Beim Bornhuetter–Ferguson Verfahren sind für die erwarteten Endschadenstände die a–priori Schätzer $\alpha_i^{\mathrm{extern}} := \kappa^{\mathrm{extern}} \pi_i$ zu verwenden. Wegen

$$\frac{\alpha_i^{\mathrm{extern}}}{\alpha_i^{\mathrm{CC}}} = \frac{\kappa^{\mathrm{extern}}}{\kappa^{\mathrm{CC}}} = \frac{0.819}{0.9} = 0.91$$

erhält man $R_i^{\mathrm{BF}} = 0.91\, R_i^{\mathrm{CC}}$ und damit

$$\begin{array}{rcccl} R_{2015}^{\mathrm{BF}} & = & 0.91 \cdot 14.4 & = & 13.10 \\ R_{2016}^{\mathrm{BF}} & = & 0.91 \cdot 43.2 & = & 39.31 \\ R_{2017}^{\mathrm{BF}} & = & 0.91 \cdot 122.4 & = & 111.38 \end{array}$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned} \kappa_{2014}^{\mathrm{LD}} &= \frac{298}{300} = 0.99 \\ \kappa_{2015}^{\mathrm{LD}} &= \frac{300}{320} = 0.94 \\ \kappa_{2016}^{\mathrm{LD}} &= \frac{260}{320} = 0.81 \\ \kappa_{2017}^{\mathrm{LD}} &= \frac{280}{340} = 0.82 \end{aligned}$$

Die Cape–Cod Endschadenquote $\kappa^{\mathrm{CC}} = 0.9$ ist ein gewichtetes Mittel dieser Werte und die letzten dieser Werte entsprechen dem Schätzwert $\kappa^{\mathrm{extern}} = 0.819$. Die großen Unterschiede zwischen den Schätzwerten κ_i^{LD} deuten darauf hin, dass die Annahme einer anfalljahrunabhängigen erwarteten Endschadenquote nicht gerechtfertigt ist oder dass Fehler in den Daten vorliegen.

Aufgabe 7 (Risikoteilung und Rückversicherung)

Ein Risiko X mit einer verschobenen Pareto–Verteilung mit der Dichtefunktion f mit

$$f(x) \;\;:=\;\; 2\,(1+x)^{-3}\,\chi_{(0,\infty)}(x)$$

wird so rückversichert, dass der Rückversicherer 70% des 1 übersteigenden Betrages übernimmt, höchstens jedoch 7. Der Anteil des Rückversicherers ist damit

$$X_R \;\;:=\;\; \min\Big\{\max\{0.7(X-1),0\},7\Big\}$$

(a) Welche Entschädigung zahlt der Erstversicherer, wenn $X > 10$ gilt?

(b) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für den Rückversicherungsvertrag.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P[X-X_R > 4]$?

Lösung:

(a) Im Fall $X > 11$ zahlt der Rückversicherer den Betrag 7 und der Erstversicherer zahlt den Rest $X - 7$.
Im Fall $X \leq 11$ zahlt der Rückversicherer den Betrag $0.7(X-1)$ und der Erstversicherer zahlt den Rest $X - 0.7(X-1) = 0.3X + 0.7$.
Daher gilt

$$(X - X_R)\,\chi_{\{10<X\}} \quad = \quad (0.3X + 0.7)\,\chi_{\{10<X\leq 11\}} + (X-7)\,\chi_{\{11<X\}}$$

(b) Unter Verwendung der Layer–Identität erhält man

$$\begin{aligned}
\min\Bigl\{\max\{0.7(X-1),0\},7\Bigr\} &= 0.7\,\min\Bigl\{\max\{X-1,0\},10\Bigr\} \\
&= 0.7\,\Bigl(\max\{X-1,0\} - \max\{X-11,0\}\Bigr)
\end{aligned}$$

Für die Nettorisikoprämie Π für den Rückversicherungsvertrag gilt daher

$$\begin{aligned}
\Pi &= E\Bigl[\min\Bigl\{\max\{0.7(X-1),0\},7\Bigr\}\Bigr] \\
&= 0.7\,\Bigl(E[\max\{X-1,0\}] - E[\max\{X-11,0\}]\Bigr)
\end{aligned}$$

Für die Verteilungsfunktion F von X gilt

$$F(x) \quad = \quad \Bigl(1 - (1+x)^{-2}\Bigr)\chi_{(0,\infty)}(x)$$

Für $c \in (0,\infty)$ gilt daher

$$\begin{aligned}
E[\max\{X-c,0\}] &= \int_c^\infty (1 - F(x))\,dx \\
&= \int_c^\infty (1+x)^{-2}\,dx \\
&= -\frac{1}{1+x}\Bigg|_c^\infty \\
&= \frac{1}{1+c}
\end{aligned}$$

ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
\Pi &= 0.7\,\Bigl(E[\max\{X-1,0\}] - E[\max\{X-11,0\}]\Bigr) \\
&= 0.7\left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+11}\right) \\
&= \frac{35}{120}
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\{X - X_R > 4\} &= \{X - X_R > 4\} \cap \{X > 11\} + \{X - X_R > 4\} \cap \{X \leq 11\} \\
&= \{X - 7 > 4\} \cap \{X > 11\} + \{0.3X + 0.7 > 4\} \cap \{X \leq 11\} \\
&= \{X > 11\} + \emptyset \\
&= \{X > 11\}
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
P[X - X_R > 4] &= P[X > 11] \\
&= 1 - F(11) \\
&= 1 - \Big(1 - (1+11)^{-2}\Big) \\
&= \frac{1}{144}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 (Risikoteilung und Rückversicherung)

Ein Versicherer hat einen Bestand, dessen Risiko S durch ein kollektives Modell mit Schadenzahl N und Schadenhöhen X_k modelliert wird. Die Verteilungen von N und X_k sind durch

n	0	1	2	3
$P[N = n]$	0.70	0.15	0.10	0.05

und

x	500	1000	5000
$P[X_k = x]$	0.70	0.20	0.10

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P[S \geq 5000]$.

(b) Bei einer Stop–Loss Rückversicherung mit Priorität 1500 zahlt der Rückversicherer bei einem Gesamtschaden S den Betrag

$$S_{SL} \;:=\; \max\{S - 1500, 0\}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P[S - S_{SL} \geq 2000]$.

(c) Bei einer Schadenexzedenten–Rückversicherung mit Priorität 1000 zahlt der Rückversicherer für jeden Schaden X_k den Betrag

$$\max\{X_k - 1000, 0\}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P[S - S_{XL} \geq 2500]$, wobei S_{XL} die gesamte Zahlung des Rückversicherers ist.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} P[S < 5000] &= P[N=0] \\ &\quad + P[N=1]\, P[X_1 < 5000] \\ &\quad + P[N=2]\, P[X_1 < 5000]\, P[X_2 < 5000] \\ &\quad + P[N=3]\, P[X_1 < 5000]\, P[X_2 < 5000]\, P[X_3 < 5000] \\ &= 0.70 + 0.15 \cdot 0.9 + 0.10 \cdot 0.9^2 + 0.05 \cdot 0.9^3 \\ &= 0.95245 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} P[S \geq 5000] &= 1 - P[S < 5000] \\ &= 1 - 0.95245 \\ &= 0.04755 \end{aligned}$$

(b) Wegen $S = \max\{S-1500, 0\} + \min\{S, 1500\}$ und $S_{SL} = \max\{S-1500, 0\}$ gilt

$$P[S - S_{SL} \geq 2000] = P[\min\{S, 1500\} \geq 2000] = 0$$

(c) Es gilt

$$S_{XL} = \sum_{k=1}^{N} \max\{X_k - 1000, 0\}$$

und damit

$$S - S_{XL} = \sum_{k=1}^{N} \min\{X_k, 1000\}$$

Die Verteilung der Zufallsvariablen $Y_k := \min\{X_k, 1000\}$ ist durch die Tabelle

y	500	1000
$P[Y_k = x]$	0.70	0.30

gegeben und für die Zufallsvariable $Z := S - S_{XL}$ gilt

$$Z = \sum_{k=1}^{N} Y_k$$

Außerdem gilt $Z \geq 2500$ genau dann, wenn $N = 3$ gilt und mindestens zwei der Zufallsvariablen Y_1, Y_2, Y_3 den Wert 1000 annehmen. Daher gilt

$$P[Z \geq 2500] = 0.05 \cdot (0.30^3 + 3 \cdot 0.30^2 \cdot 0.70) = 0.0108$$