Klausur 2015

Aufgabe 1 (30 Punkte)

a) Erläutern Sie die Unterschiede zwischen einer Periodentafel und einer Generationentafel (4 P)

b) Ergänzen Sie die folgende Tabelle um die Sterbewahrscheinlichkeiten für eine Periodentafel und eine Generationentafel. Hierbei gehen Sie von einer altersunabhängigen Verringerung der Sterbewahrscheinlichkeiten von 2% für jedes Jahr aus (traditionelles Modell). Die Basistafel ist auf das Jahr 1990 bezogen; die Periode der Periodentafel beträgt 30 Jahre; das Geburtsjahr für die Sterbewahrscheinlichkeiten der Generationentafel ist 1955. Das aktuelle Jahr ist das Jahr 2010

Alter	Basistafel	Periodentafel	Generationentafel
x	q_x^B	q_x^P	q_x^G
60	0,01		
70	0,02		
80	0,05		

(4 P)

c) Nehmen Sie an, dass der unterstellte Trend auch tatsächlich eintritt. Wie lange können Sie die Periodentafel und die Generationentafel anwenden?
Wovon hängt die Dauer der Anwendbarkeit ab? (5 P)

d) Vergleichen Sie algebraisch die Risikoergebnisse bei Anwendung einer Periodentafel und einer Generationentafel anhand der Rekursionsformel für die Deckungsrückstellung für einen Rentnerbestand von 1000 Rentnern im Alter x, wenn die tatsächliche Sterblichkeit rechnungsmäßig dem Trend folgt.

Zeigen Sie, dass das zu erwartende Risikoergebnis E_R dargestellt werden kann als

$$E_R = 1000 \cdot \left[v \cdot (q_x - q_x^S) \cdot a_{x+1}^S \right]$$

mit

$$v \;= Diskontfaktor\ für\ ein\ Jahr$$

$$S = \begin{cases} P\ für\ Periodentafel \\ G\ für\ Generationentafel \\ B\ für\ Basistafel \end{cases}$$

$$q_x = tatsächliche\ Sterblichkeit$$

$$q_x^S = Sterbewahrscheinlichkeit\ gemäß\ Tafel\ S$$

Die Deckungsrückstellung ist der Rentenbarwert (Rentenbetrag 1, jährlich vorschüssige Zahlungsweise); für den Rentenbarwert verwenden Sie die Schreibweise

$$a_x^S = 1 + \sum_{j=x}^{\omega} \prod_{l=x}^{j} (1 - q_l^S) \cdot v^{j-x+1}$$

mit

ω = Endalter der Tafel (12 P)

e) In welchem Jahr wird das Risikoergebnis bei Verwendung einer Periodentafel und bei rechnungsmäßigem Verlauf negativ? (2 P)

f) In welcher Relation stehen die mit Generationentafel und Periodentafel berechneten Deckungsrückstellungen ab dem in e) ermittelten Jahr zueinander? Kann diese Relation schon früher eintreten? (3 P)

Lösungsvorschlag Aufgabe 1

a)

Ausgangspunkt für beide Typen von Tafeln ist die Basistafel, die für das Jahr der Basistafel (Basisjahr) die gültigen Sterbewahrscheinlichkeiten (Ausscheidewahrscheinlichkeiten) für alle Alter angibt.

Die künftige Veränderung der Sterbewahrscheinlichkeiten wird bei Periodentafeln mit Hilfe eines altersabhängigen Reduktionsfaktors (< 1) berücksichtigt, der z.B. multiplikativ angewendet wird und in der Regel die jährliche Veränderungsrate für eine festgelegte Anzahl von Jahren beinhaltet. Bei einer Periodentafel ist die Anzahl der Jahre für alle Alter gleich.

Bei Generationentafeln wird die zukünftige Veränderung der Sterbewahrscheinlichkeiten unter Berücksichtigung der Zeitdauer zwischen dem Basisjahr und dem Jahr der Anwendung der Sterblichkeit auf Basis eines Jahresfaktors und der Anzahl der Jahre explizit berücksichtigt. Im Vergleich zur Periodentafel gibt deshalb die Generationentafel immer die jeweils erwartete Sterblichkeit wieder während dies für die Periodentafel nur in Ausnahmefällen gilt.

b)

Nach Aufgabenstellung gilt

Jahr der Basistafel (Basisjahr)	1990
aktuelles Jahr	2010
Faktor	0,98
Geburtsjahr	1955
Periodenlänge	30 Jahre

Damit gilt für die Sterbewahrscheinlichkeiten der Periodentafel:

$$q_{60}^{P} = q_{60}^{B} \cdot 0{,}98^{30} = 0{,}01 \cdot 0{,}98^{30} = 0{,}00545484$$

$$q_{70}^{P} = q_{70}^{B} \cdot 0{,}98^{30} = 0{,}02 \cdot 0{,}98^{30} = 0{,}01090969$$

$$q_{80}^{P} = q_{80}^{B} \cdot 0{,}98^{30} = 0{,}05 \cdot 0{,}98^{30} = 0{,}02727422$$

und für die Sterbewahrscheinlichkeiten der Generationentafel:

$$q_{60}^{G} = q_{60}^{B} \cdot 0{,}98^{2015-1990} = 0{,}01 \cdot 0{,}98^{25} = 0{,}00603465$$

$$q_{70}^{G} = q_{70}^{B} \cdot 0{,}98^{2025-1990} = 0{,}01 \cdot 0{,}98^{35} = 0{,}00986149$$

$$q_{80}^{G} = q_{80}^{B} \cdot 0{,}98^{2035-1990} = 0{,}01 \cdot 0{,}98^{45} = 0{,}02014389$$

Klausur 2015

Alter	Basistafel	Periodentafel	Generationentafel
x	q_x^B	q_x^P	q_x^G
60	0,01	0,00545484	0,00603465
70	0,02	0,01090969	0,00986149
80	0,05	0,02727422	0,02014389

c)

Entspricht der rechnungsmäßige Trend der Sterblichkeitsveränderung der Realität, so treffen die Sterbewahrscheinlichkeiten der Generationentafel auch in jedem künftigen Jahr zu. Die Generationentafel kann dann auf Dauer angewendet werden.

Auch wenn der rechnungsmäßige Trend in der Sterblichkeitsveränderung der Realität entspricht, so sind die in der Periodentafel berücksichtigten Veränderungen der Sterbewahrscheinlichkeiten (bei dieser Aufgabe 30 Jahre) nach Ablauf der Periode „aufgezehrt". Spätestens nach Ablauf der Periode kann die Periodentafel nicht mehr angewendet werden. Bei mit Periodentafel durchgeführten Bewertungen kann eine Anpassung der Tafel schon vor Ablauf der Periode erforderlich sein, da bei einer Barwertberechnung auch die weiter in der Zukunft liegenden Sterbewahrscheinlichkeiten verwendet werden und diese aus der Periodentafel entnommenen dann zu hoch sein werden.

Sollte der erwartete Trend nicht der tatsächlichen Entwicklung entsprechen, so sind beide - Periodentafel und Generationentafel - anzupassen.

d)

Die Rekursionsformel lautet für vorschüssige Zahlungsweise ganz allgemein (vgl. Skript Abschnitt 4.5)

$$V_0 = -P + R + v \cdot (1-q) \cdot V_1$$

mit

V_0	Deckungsrückstellung am Anfang des Versicherungsjahres
V_1	Deckungsrückstellung am Ende des Versicherungsjahres
P	Prämie, jährlich vorschüssig
R	Rente, fällig am Beginn des Versicherungsjahres
v	$= \frac{1}{1+z}$ Diskontfaktor (z = Zins)
q	Sterbewahrscheinlichkeit des Versicherten

und für eine Rentenversicherung mit Rente R=1 in der Rentenphase

$$a_x = 1 + v \cdot (1-q_x) \cdot a_{x+1}$$

Klausur 2015

Bei rechnungsmäßigem Verlauf ist das Risikoergebnis E_R für einen Bestand von 1.000 Versicherten im Alter x näherungsweise

$$E_R = 1000 \cdot \left[a_x^S - (1 + v \cdot (1 - q_x) \cdot a_{x+1}^S) \right]$$

Bei Verwendung von Periodentafeln

$$\begin{aligned}
E_R &= 1000 \cdot \left[a_x^P - (1 + v \cdot (1 - q_x) \cdot a_{x+1}^P) \right] \\
&= 1000 \cdot \left[1 + v \cdot (1 - q_x^P) \cdot a_{x+1}^P - (1 + v \cdot (1 - q_x) \cdot a_{x+1}^P) \right] \\
&= 1000 \cdot \left[1 + v \cdot (1 - q_x^P) \cdot a_{x+1}^P - 1 - v \cdot (1 - q_x) \cdot a_{x+1}^P) \right] \\
&= 1000 \cdot \left[v \cdot (q_x - q_x^P) \cdot a_{x+1}^P \right]
\end{aligned}$$

Hierbei ist q_x die in dem Jahr für das Alter x tatsächlich zutreffende Sterbewahrscheinlichkeit. Bei rechnungsmäßigem Verlauf gilt $q_x = q_x^G$.

Das Risikoergebnis bei Verwendung einer Periodentafel ist dann positiv, wenn $q_x^P < q_x^G$ gilt.

Bei Verwendung einer Generationentafel gilt analog (G statt P)

$$\begin{aligned}
E_R &= 1000 \cdot \left[a_x^G - (1 + v \cdot (1 - q_x) \cdot a_{x+1}^G) \right] \\
&= 1000 \cdot \left[v \cdot (q_x - q_x^G) \cdot a_{x+1}^G \right]
\end{aligned}$$

Bei rechnungsmäßigem Verlauf ist wegen $q_x = q_x^G$ das Risikoergebnis immer null.

e)
Bezeichne *n(G)* die Anzahl der Jahre, für die entsprechend der Generationentafel die Veränderung der Sterblichkeit im aktuellen Jahr wirksam ist.

Wegen

$$q_x^G = 0{,}98^{n(G)} \cdot q_x^B$$

und

$$q_x^P = 0{,}98^{30} \cdot q_x^B$$

ist das Risikoergebnis genau dann positiv, wenn $n(G) < 30$, d.h. wenn die Periode der Periodentafel (noch) größer ist als die Zeitdifferenz zwischen Basisjahr der Tafel und aktuellem Jahr.

Klausur 2015

f)

Nach Ablauf von 30 Jahren gilt $n(G) > 30$ und deshalb $q_x^P > q_x^G$. Daraus ergibt sich, dass jede mögliche künftige Rentenzahlung mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit fällig wird, wenn die Wahrscheinlichkeiten der Periodentafel und nicht die der Generationentafel verwendet werden. Der Barwert entsprechend Periodentafel ist dann kleiner als der der Generationentafel und führt zu einer Unterbewertung.

Eine Unterbewertung wird allerdings bereits vor Ablauf von 30 Jahren vorliegen, da der Barwert entsprechend der Periodentafel bereits dann geringer als der der Generationentafel sein kann, wenn die ersten Summanden des Barwerts noch größer sind als bei dem Barwert der Generationentafel.

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Die folgende Liste gibt die Zeitpunkte (Monat / Jahr) der letzten zehn Arztbesuche einer ausgewählten Person an:

11/2004, 2/2005, 8/2007, 1/2008, 7/2008, 12/2009, 2/2010, 3/2012, 9/2013, 7/2014

Anhand dieser Daten soll untersucht werden, ob die Zeitpunkte eines Arztbesuches durch einen homogenen Poisson-Prozess modelliert werden können. Zeitabstände sollen dabei in der Einheit Jahr (als Anzahl Monate geteilt durch 12) gemessen werden.

a) Auf welche (einparametrige) Verteilung ist die Zufallsvariable X = Zwischenankunftszeit zu testen, um die Annahme des Poisson-Prozesses zu untermauern?

b) Für den Parameter der Verteilung wird der Wert 0.8 unterstellt. Ermitteln Sie die Werte x_k, die X auf Basis der obigen Daten angenommen hat, und erstellen Sie aus diesen Werten, dem Schätzwert für den Parameter und der Verteilungsannahme aus a) einen P-P-Plot. Warum stützt dieser die Vermutung, dass es sich um einen Poisson-Prozess handelt?

c) Testen Sie mit Hilfe des Likelihood Quotiententests die Hypothese, dass der Parameter den Wert 0.8 hat, bei einem Niveau von 10%. Sie dürfen ohne Rechnung folgende Werte verwenden: Der ML-Schätzer des Parameters hat den Wert 0.93; $\chi^2_{1,0.9} = 2.71$. Zur Kontrolle: $\sum x_k = 9{,}67$.

d) Schätzen Sie auf Grundlage der bisherigen Ergebnisse und einem Parameterwert von 0.8 die Wahrscheinlichkeit, dass die Person innerhalb von zwei Jahren nicht zum Arzt geht.

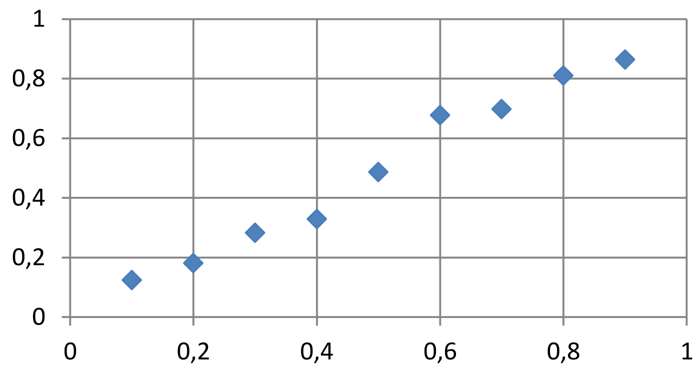
Lösung:

a) Die Zufallsvariable X = Zwischenankunftszeit = Zeitabstand zweier aufeinander folgender Arztbesuche ist im Falle eines homogenen Poisson-Prozesses exponentialverteilt. **(2 P)**

b) Bildet man die zeitlichen Differenzen der angegebenen Daten, erhält man die (n = 9) Werte

3/12, 30/12, 5/12, 6/12, 17/12, 2/12, 25/12, 18/12, 10/12

Bei einem P-P-Plot mit n Daten $x_1,\ldots,x_n$ werden die Punktepaare $(k/(n+1),F(x_{(k)}))$ geplottet, wobei $x_{(k)}$ den k-ten Datenpunkt in aufsteigender Reihenfolge bezeichnet und F die zu prüfende Verteilungsfunktion. Wir wählen die Exponentialverteilung Exp(λ) mit Parameter λ = 0.8, die die Verteilungsfunktion F(x) = 1 – exp(–0.8 · x) hat. Der P-P-Plot sieht dann wie folgt aus:



Da die Punkte näherungsweise auf der Winkelhalbierenden liegen, wird die Annahme einer Exponentialverteilung von X unterstützt. **(12 P)**

c) Beim Likelihood Quotiententest für einen eindimensionalen Parameter lautet die Testgröße

$$W(x_1,\ldots,x_n) = -2[l(x_1,\ldots,x_n;\lambda_0) - l(x_1,\ldots,x_n;\hat{\lambda})]$$

mit dem Hypothesenwert λ_0 und dem ML-Schätzer $\hat{\lambda}$ sowie der logarithmierten Likelihood l. Die Hypothese wird zum Niveau α genau dann verworfen wenn $W(x_1,\ldots,x_n) \geq \chi^2_{1,1-\alpha}$.
Im Fall der Exponentialverteilung mit Parameter λ und 9 Beobachtungswerten $x_1,\ldots,x_9$ lautet die logarithmierte Likelihoodfunktion

$$l(x_1,\ldots,x_9;\lambda) = 9\ln(\lambda) - \lambda\sum_{k=1}^{9} x_k$$

Daraus und den Vorgaben der Aufgabe berechnet man

$$W(x_1,\ldots,x_9) = (-2)\cdot(-9{,}744 - 9{,}646) = 0.197 < 2.71 = \chi^2_{1,0.9}$$

Die Hypothese kann zum Niveau 10% also nicht verworfen werden. **(12 P)**

d) Es ist die Wahrscheinlichkeit P(X > 2) zu berechnen. Wir verwenden für X eine Exponentialverteilung Exp(λ) mit λ = 0.8, also F(x) = 1 – exp(–0.8 · x):

P(X > 2) = 1 – P(X ≤ 2) = 1 – F(2) = 1 – (1 – exp(–0.8 · 2)) = exp(–1.6) ≈ 0.2019.

(4 P)

Aufgabe 3 (30 Punkte):

Sei $\beta > 0$ fest. Gegeben sei die Zufallsvariable X mit Dichte

$$f(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda\beta x^{\beta-1}e^{-\lambda x^{\beta}} & ,x > 0 \\ 0 & ,x \leq 0 \end{cases}$$

mit Parameter $\lambda > 0$.

a) i. Gehört f zu einer einparametrigen Exponentialfamilie? Geben Sie gegebenenfalls den natürlichen Parameter η und $b(\eta)$ an.

ii. Welche Größe wird mit $\frac{db}{d\eta}(\eta)$ bestimmt?

b) Bestimmen Sie die Informationsmatrix I in Abhängigkeit von λ.

c) Seien $X_1,\ldots, X_n$ unabhängig identisch wie X verteilt und $(x_1,\ldots, x_n)$ unabhängige Realisierungen von X. Ohne Beweis können Sie verwenden, dass $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\beta}}$ ein ML-Schätzer von λ ist.

i. Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung von $\hat{\lambda}$.

ii. Bestimmen Sie die relative Likelihood $\tilde{L}(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L(\hat{\lambda})}$.

d) ***Für diesen Aufgabenteil verwenden Sie bitte die beigefügten Graphiken. Bitte geben Sie diese mit der Prüfung ab.***

Für eine Stichprobe der Länge $n = 10$ ergibt sich die in den beigefügten Graphiken relative Likelihood $\tilde{L}$:

i. Bestimmen Sie aus der Graphik näherungsweise den ML-Schätzwert für λ und begründen Sie Ihre Antwort.

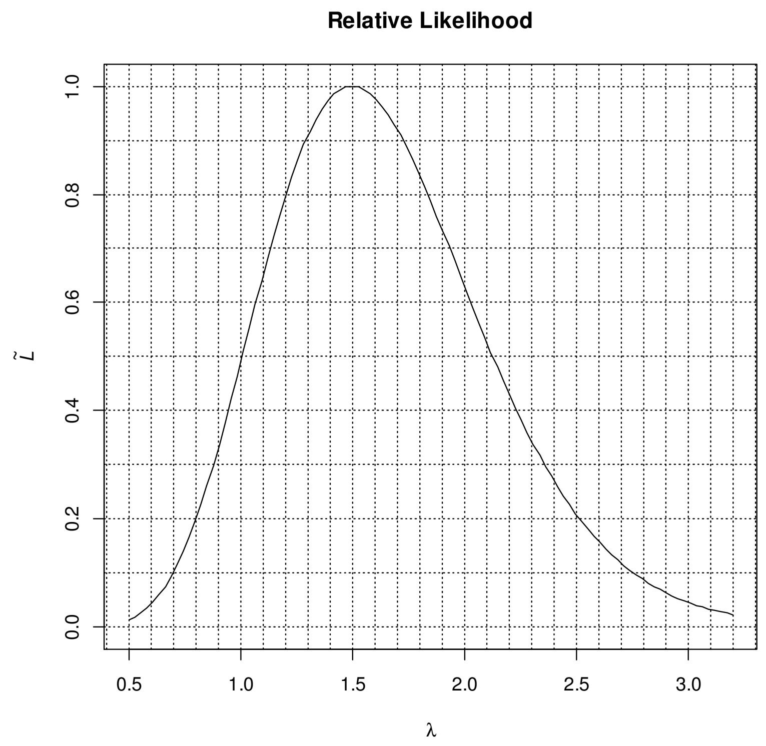
ii. Bestimmen Sie mit dem Schätzwert aus i. und c) i. ein asymptotisches Konfidenzintervall zum Niveau 90 % (also ein Konfidenzintervall beruhend auf der Normalverteilung). Für die Quantile der Standardnormalverteilung gilt $u_{0,9}$ = 1,28, $u_{0,95}$ = 1,64, $u_{0,975}$ = 1,96.

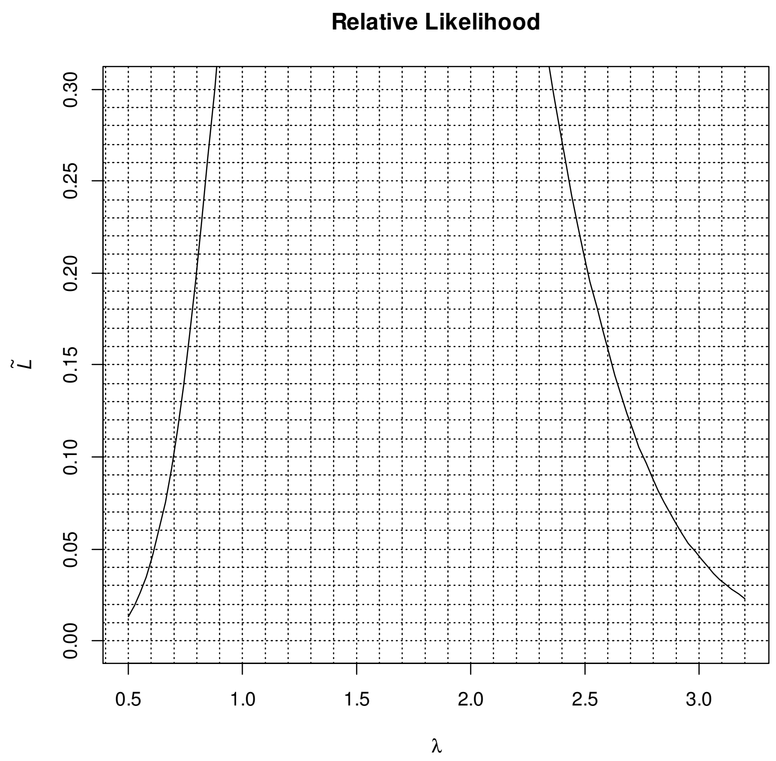
iii. Überprüfen Sie mit dem Likelihood-Quotiententest die Hypothese $H_0 : \lambda = 2$ zum Niveau $\alpha = 10$ %. Verwenden Sie die obere der beiden Graphiken. Die Quantile der Chi-Quadrat-Verteilungen sind

$$\chi^2_{1;0,9} = 2.71,\ \chi^2_{2;0,9} = 4.61,\ \chi^2_{9;0,9} = 14.68,\ \chi^2_{10;0,9} = 15.99 \text{ sowie}$$
$$\chi^2_{1;0,95} = 3{,}84,\ \chi^2_{2;0,95} = 5{,}99,\ \chi^2_{9;0,95} = 16{,}92,\ \chi^2_{10;0,95} = 18{,}31.$$

iv. Geben Sie mit Hilfe der relativen Likelihood ein Schätzintervall für λ zu einem Niveau von 90 % an. Verwenden Sie dazu folgende Graphik und Quantile aus iii. Erläutern Sie ihr Vorgehen!

Graphiken für Aufgabe 3 d), bitte mit der Prüfung abgeben





Lösungsvorschläge Aufgabe 3

a) i. Wegen $\lambda\beta x^{\beta-1}e^{-\lambda x^\beta} = \exp\left(-\lambda x^\beta + \ln\lambda + \ln\beta + \ln\left(x^{\beta-1}\right)\right)$ handelt es sich um eine Exponentialfamilie mit natürlichem Parameter $\eta = -\lambda$ und $b(\eta) = -\ln(-\eta)$ **(4P)**

ii. Man bestimmt $E\left(X^\beta\right)$. **(3P)**

b) Es gilt $I(\lambda) = E\left(-\ell''(\lambda)\right)$ mit

$$\ell(\lambda) = \ln L(\lambda) = \ln\lambda + \ln\beta + (\beta-1)\ln x - \lambda x^\beta$$

$$\ell'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - x^\beta$$

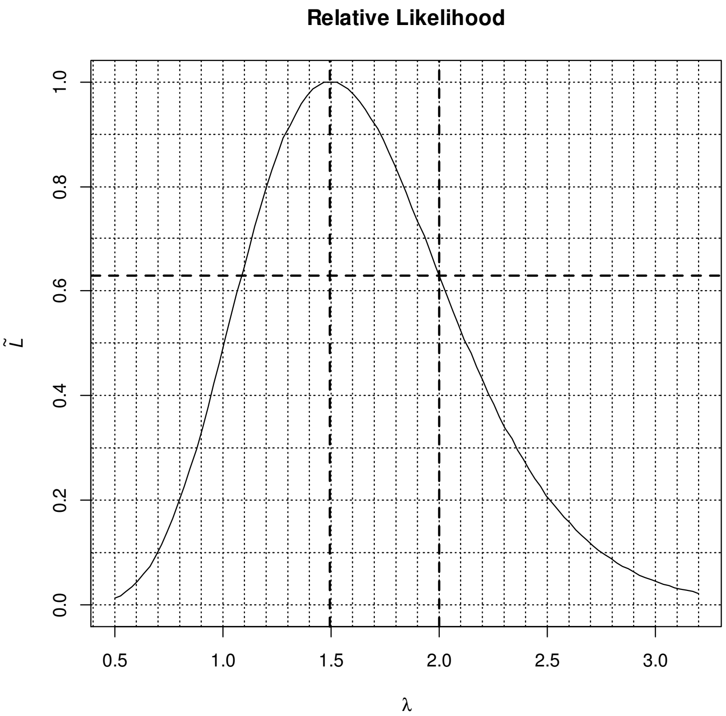
$$\ell''(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}$$

und damit folgt $I(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}$

c) i. Es gilt asymptotisch $\hat{\lambda} \sim N\left(\lambda, \frac{1}{nI(\lambda)}\right) = N\left(\lambda, \frac{\lambda^2}{n}\right)$ **(4P)**

ii. $\tilde{L}(\lambda) = \frac{\prod_{i=1}^n \lambda\beta x_i^{\beta-1}e^{-\lambda x_i^\beta}}{\prod_{i=1}^n \hat{\lambda}\beta x_i^{\beta-1}e^{-\hat{\lambda} x_i^\beta}} = \left(\frac{\lambda}{\hat{\lambda}}\right)^n e^{-\left(\lambda-\hat{\lambda}\right)\sum_{i=1}^n x_i^\beta} = \left(\frac{\lambda}{\hat{\lambda}}\right)^n \exp\left(n\left(1-\frac{\lambda}{\hat{\lambda}}\right)\right)$ **(3P)**

d) i. Der ML Schätzer ergibt sich aus der oberen Graphik als Maximum von $\tilde{L}$ also $\hat{\lambda} = 1{,}5$. **(3P)**



ii. Es ergibt sich das Konfidenzintervall

$$\left(\hat{\lambda}-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\lambda})}},\hat{\lambda}+u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\lambda})}}\right)=\left(\hat{\lambda}-u_{1-0,05}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}^2}{10}},\hat{\lambda}+u_{1-0,05}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}^2}{10}}\right)$$

$$=\left(1,5-1,64\frac{1,5}{\sqrt{10}},1,5+1,64\frac{1,5}{\sqrt{10}}\right)$$

$$=(0,72;2,28)$$

(4P)

iii. Aus der oberen Graphik entnimmt man $\tilde{L}(2)\approx 0,6$ (Alternativ kann man mit $\hat{\lambda}=1,5$ und c) (ii) $\tilde{L}(2)(4/3)^{10}\exp(10\cdot(1-4/3))\approx 0,63$ exakt berechnen). Die Nullhypothese $H_0:\lambda=\lambda_0$ wird nicht verworfen, da $\tilde{L}(\lambda_0)<\exp\left(-\frac{\chi^2_{1,1-\alpha}}{2}\right)=e^{-2,71/2}=0,26$ gilt. **(3P)**

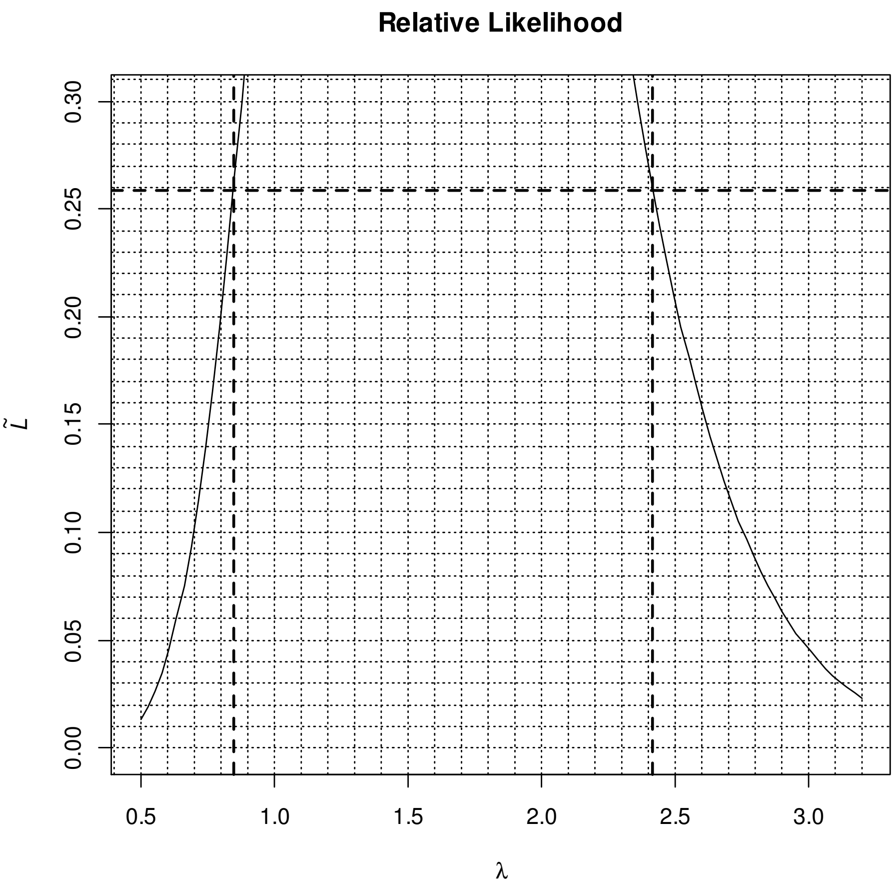
Alternative 1: Mit $W(2)=-2\ln\left(\tilde{L}(2)\right)\approx 0,91<2,71=\chi^2_{1,\frac{9}{10}}$ zum selben Ergebnis.

Alternative 2: Das in (iv) bestimmte Konfidenzintervall enthält den Wert 2, also kann die Nullhypothese nicht verworfen werden.

iv. Laut Folienskript ist das Konfidenzintervall gegeben durch **(3P)**

$\left\{\lambda \mid \tilde{L}(\lambda)>\exp\left(-\frac{\chi^2_{1,1-\alpha}}{2}\right)\right\}$. Es ergibt sich aus der unteren Graphik

(0,85;2,41) für das Niveau 90 % wegen $e^{-2,71/2}=0,26$.



Aufgabe 4 (30 Punkte):

Das Risikopotenzial eines Industrieobjekts wird in einem Credibility-Modell durch einen nicht direkt beobachtbaren, zufälligen Strukturparameter θ erfasst, der die Werte 0 oder 1 gemäß einer Binomialverteilung $B(1, p)$ annimmt.

Im Fall $\theta = 1$ handelt es sich um ein Industrieobjekt mit „erhöhtem Risikopotenzial", dessen Jahresgesamtschaden X einer Paretoverteilung mit Dichte $h(x) = \alpha \cdot (1+x)^{-(\alpha+1)}$ folgt. Im Fall $\theta = 0$ folgt der Jahresgesamtschaden X der „weniger gefährlichen" Exponentialverteilung mit Dichte $f(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda x)$ (jeweils für $x > 0$).

Aufgrund der Daten des Gesamtmarkts kann im Folgenden von einem Anteil $p = 20\%$ an Objekten mit erhöhtem Risikopotenzial ausgegangen werden, sowie von den Verteilungsparametern $\alpha = 3$ und $\lambda = 10$.

Gegeben seien zudem die (bei gegebenem $\theta = \vartheta$) unabhängigen Beobachtungen $X_1, X_2, \dots, X_n$ der Jahresgesamtschäden der letzten $n = 5$ Jahre, mit den Realisierungen

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0,05	0,20	0,40	0,10	0,50

a) **(15 Punkte)** Zeigen Sie, dass die gemeinsame Dichte der Schadenbeobachtungen und des Strukturparameters durch

$$g(x_1,\dots,x_n,\vartheta) = \begin{cases} (1-p)\cdot\lambda^n \cdot \exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^n x_i\right) & \text{für } \vartheta = 0 \\ p\cdot\alpha^n \cdot \left(\prod_{i=1}^n (1+x_i)\right)^{-(\alpha+1)} & \text{für } \vartheta = 1 \end{cases}$$

gegeben ist und berechnen Sie deren Wert für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 1$. Runden Sie das Endergebnis auf 4 Stellen.

b) **(6 Punkte)** Welche Werte nimmt die Dichte $f_\theta(\vartheta \mid X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ des Strukturparameters bei den gegebenen Schadenbeobachtungen an? Werten Sie das Ergebnis qualitativ hinsichtlich der Frage, ob es sich beim betrachteten Objekt um ein Objekt mit erhöhtem Risikopotenzial handeln könnte.

Kontrollergebnis: Gerundet gilt $f_\theta(0 \mid X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = 30{,}6\%$.

c) **(9 Punkte)** Berechnen Sie den Wert der Credibility-Prämie H^* für das Industrieobjekt.

Lösung:

a) Für die gemeinsame Dichte der Schadenbeobachtungen und des Strukturparameters gilt nach Lemma 1 aus Kapitel 8 des Skriptes $g(x_1,\ldots,x_n,\vartheta) = f_\theta(\vartheta)\cdot\prod_{i=1}^{n} f_X(x_i \mid \theta=\vartheta)$,

so dass

$$g(x_1,\ldots,x_n,0) = f_\theta(0)\cdot\prod_{i=1}^{n} f_X(x_i \mid \theta=0) = p^0(1-p)^{1-0}\cdot\prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$
$$= (1-p)\cdot\prod_{i=1}^{n}\lambda\cdot\exp(-\lambda x_i) = (1-p)\cdot\lambda^n\cdot\exp(-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i)$$

und

$$g(x_1,\ldots,x_n,1) = f_\theta(1)\cdot\prod_{i=1}^{n} f_X(x_i \mid \theta=1) = p^1(1-p)^{1-1}\cdot\prod_{i=1}^{n} h(x_i)$$
$$= p\cdot\prod_{i=1}^{n}\alpha\cdot(1+x_i)^{-(\alpha+1)} = p\cdot\alpha^n\cdot\left(\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\right)^{-(\alpha+1)}.$$

Für die gegebenen Werte ergibt sich

$g(x_1,\ldots,x_n,0) = (1-20\%)\cdot 10^5\cdot\exp(-10\cdot 1{,}25) = 0{,}2981$

und

$g(x_1,\ldots,x_n,1) = 20\%\cdot 3^5\cdot 2{,}9106^{-4} = 0{,}6772.$

b) Mit dem Ergebnis aus a) ergibt sich die a-posteriori-Dichte zu

$$f_\theta(0 \mid X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n) = \frac{0{,}2981}{0{,}2981+0{,}6772} = 30{,}6\%$$

bzw.

$$f_\theta(1 \mid X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n) = \frac{0{,}6772}{0{,}2981+0{,}6772} = 69{,}4\%.$$

Da $f_\theta(1 \mid X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n) > f_\theta(0 \mid X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n)$, liegt die Vermutung nahe, dass es sich beim konkreten Industrieobjekt um ein Objekt mit erhöhtem Risikopotenzial handelt.

c) Die Credibility-Prämie ist

$$H^* = E[H(\theta) \mid X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n] = \sum_{\vartheta=0}^{1} H(\vartheta)\cdot f_\theta(\vartheta \mid X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n)$$

mit

$$H(\vartheta) = E[X \mid \theta=\vartheta] = \begin{cases} 1/\lambda = 0{,}1 & \textit{für } \vartheta = 0 \ (\textit{Exponentialverteilung}) \\ 1/(\alpha-1) = 0{,}5 & \textit{für } \vartheta = 1 \ (\textit{Paretoverteilung}) \end{cases}$$

Mit dem Ergebnis aus b) ergibt sich als Credibility-Prämie

$$H^* = E[H(\theta) \mid X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n] = \sum_{\vartheta=0}^{1} H(\vartheta)\cdot f_\theta(\vartheta \mid X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n)$$
$$= 0{,}1\cdot 30{,}6\% + 0{,}5\cdot 69{,}4\% = 0{,}378.$$