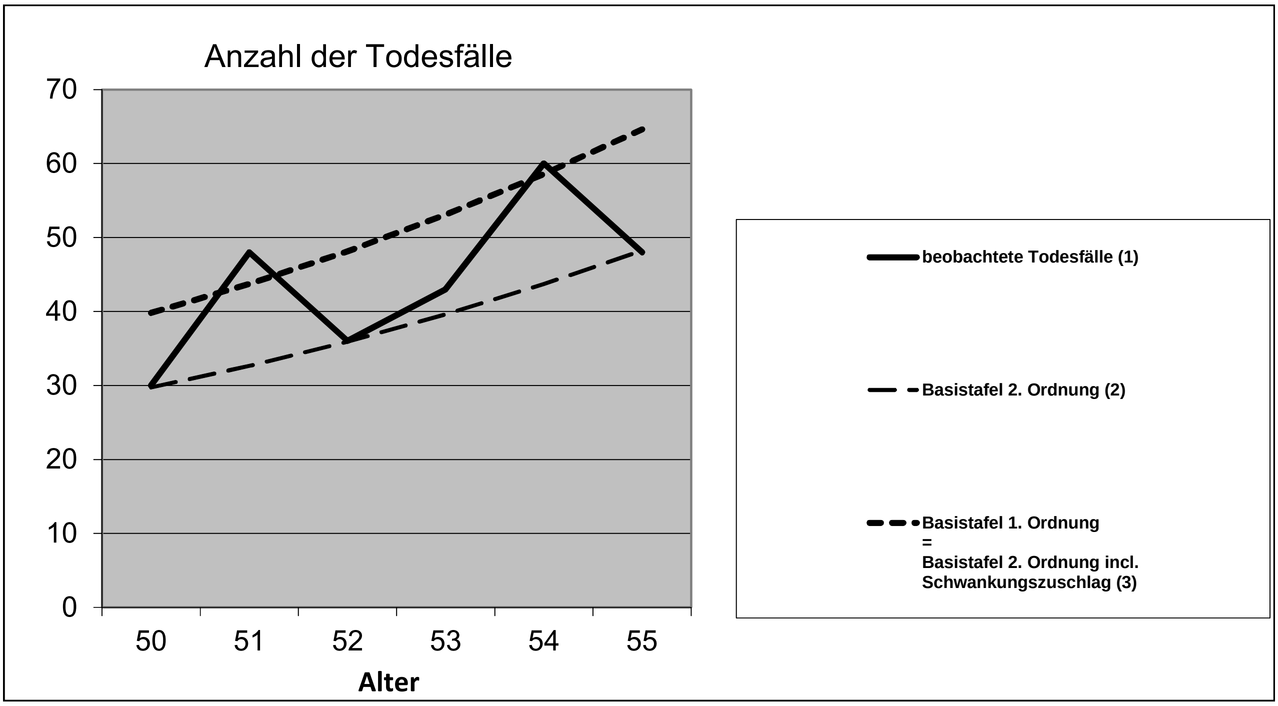
Aufgabe 1 (30 Punkte): Sie sind Verantwortlicher Aktuar einer Lebensversicherung und müssen die Angemessenheit der biometrischen Rechnungsgrundlagen für Männer in einem Bestand von Todesfallversicherungen in einem Tarif beurteilen. Für die Deckungsrückstellung wird die DAV-Sterbetafel 2008 T verwendet. Die beobachteten Todesfälle sowie die erforderlichen Werte aus der DAV-Tafel sind:

			Sterbewahrscheinlichkeiten nach DAV 2008 T	
Alter	Bestand	beobachtete Todesfälle	Basistafel 2. Ordnung	Basistafel 1. Ordnung = Basistafel 2. Ordnung incl. Schwankungszuschlag
		(1)	(2)	(3)
50	10000	30	0,00297	0,003981
51	10000	48	0,00326	0,004371
52	10000	36	0,00359	0,004812
53	10000	43	0,00396	0,005308
54	10000	60	0,00437	0,005857
55	10000	48	0,00482	0,006460

Tabelle 1



a) Überprüfen Sie, ob die Anwendung der biometrischen Rechnungsgrundlagen gerechtfertigt ist.
   i) Begründen Sie, mit welchen erwarteten Todesfällen die beobachteten Todesfälle verglichen werden.
   ii) Führen Sie die Überprüfung mit Hilfe dreier unterschiedlicher Testverfahren durch und interpretieren Sie Ihr Ergebnis. (Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$)

b) Die biometrischen Rechnungsgrundlagen enthalten einen Sicherheitszuschlag zur Berücksichtigung des Schwankungsrisikos.
   i) Stellen Sie einen Ansatz zur Herleitung des Schwankungszuschlags dar und ermitteln Sie den Schwankungszuschlag formelmäßig.
   ii) Welche Aussagen sind möglich, wenn Sie den Schwankungszuschlag in die Überprüfung einbeziehen?
   iii) Zu welchen Ergebnissen führen die Tests in diesem Fall? (Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$)

Lösungshinweise:

- Verteilungsfunktionen F(k) der Binomialverteilung:

Bin(4;0,5)

k	F(k)
0	0,12960
1	0,47520
2	0,82080
3	0,97440
4	1,00000

Bin(5;0,5)

k	F(k)
0	0,03125
1	0,18750
2	0,50000
3	0,81250
4	0,96875
5	1,00000

Bin(6;0,5)

k	F(k)
0	0,01563
1	0,10938
2	0,34375
3	0,65625
4	0,89063
5	0,98438
6	1,00000

- Quantile der χ^2-Verteilung:

Freiheitsgrade	**90%**	**92,5%**	**95%**	**97,5%**	**99%**	**99,5%**
1	2,70554	3,17005	3,84146	5,02389	6,63490	7,87944
2	4,60517	5,18053	5,99146	7,37776	9,21034	10,59663
3	6,25139	6,90464	7,81473	9,34840	11,34487	12,83816
4	7,77944	8,49628	9,48773	11,14329	13,27670	14,86026
5	9,23636	10,00831	11,07050	12,83250	15,08627	16,74960
6	10,64464	11,46595	12,59159	14,44938	16,81189	18,54758
7	12,01704	12,88343	14,06714	16,01276	18,47531	20,27774
8	13,36157	14,26974	15,50731	17,53455	20,09024	21,95495
9	14,68366	15,63094	16,91898	19,02277	21,66599	23,58935
10	15,98718	16,97137	18,30704	20,48318	23,20925	25,18818

- Die Teststatistiken für den χ^2-Test betragen für die Spalten (2) und (3) der Tabelle 1:

(2)	(3)
13,62	12,11

Lösung:

a) i)

Zur Überprüfung, ob die Anwendung der Rechnungsgrundlagen nicht mehr gerechtfertigt ist, stehen verschiedene statistische Testverfahren zur Verfügung. Hierbei werden die beobachteten Todesfälle mit den nach den verwendeten Rechnungsgrundlagen erwarteten Todesfällen im Beobachtungszeitrum miteinander verglichen.

Der Vergleich der beobachteten Todesfälle ist zunächst mit den erwarteten Todesfällen, die sich unter Verwendung der Basistafel 2. Ordnung ergeben, durchzuführen, da nur diese nach unserer Annahme die tatsächlichen Sterblichkeiten im Beobachtungszeitraum (d.h. ohne Sicherheiten bez. auf das statistische Schwankungs- und Irrtumsrisiko) darstellen.

Die Nullhypothese H_0 lautet also:

Die tatsächlichen Sterbewahrscheinlichkeiten stimmen mit denen der Basistafel 2. Ordnung überein.

ii)

Die Überprüfung wird mittels drei verschiedener Testverfahren durchgeführt:

1. Vorzeichentest
2. Iterationstest
3. χ^2-Test

Vorzeichentest:

Die Teststatistik T ergibt sich aus der Anzahl der positiven Differenzen zwischen den beobachteten und den erwarteten Todesfällen, d.h. $T = 5$.

Unter Gültigkeit der Nullhypothese ist T binomialverteilt mit Wahrscheinlichkeit ½ für jedes Vorzeichen, d.h. T ist $B\left(6, \frac{1}{2}\right)$-verteilt. Damit ist für das Signifikanzniveau von 5 % der Ablehnungsbereich gegeben durch die Menge $\{0,6\}$ wegen $P(\{0,6\}) = 0{,}03126 < 0{,}05$ und $P(\{0,1,5,6\}) = 0{,}21876 > 0{,}05$. Der Wert der Teststatistik ist mit $T = 5$ nicht im Ablehnungsbereich, d.h. es gilt $T \notin \{0,6\}$.

Bei einem Signifikanzniveau von 5 % wird die Nullhypothese daher nicht abgelehnt, die rechnungsmäßige Sterblichkeit unterscheidet sich nicht signifikant von der tatsächlichen.

Iterationstest:

Die Teststatistik ergibt sich aus der Anzahl der Vorzeichenwechsel, die sich bei den Differenzen zwischen den beobachteten und den rechnungsmäßig erwarteten Todesfällen ergeben, d.h. es ist $T = 1$.

Unter Gültigkeit der Nullhypothese ist T binomialverteilt mit Wahrscheinlichkeit ½ für jedes Vorzeichen, d.h. T ist $B\left(5, \frac{1}{2}\right)$-verteilt.

Damit folgt $P(T \le 1) = 0{,}1875 > 5\% = 0{,}05$.

Bei einem Signifikanzniveau von 5 % wird die Nullhypothese daher nicht abgelehnt, die rechnungsmäßige Sterblichkeit unterscheidet sich nicht signifikant von der tatsächlichen.

χ^2-Test:

Die Teststatistik lautet $T = \sum_{x=50}^{55} \frac{\left(Z_x - E_x\right)^2}{E_x}$,

wobei Z_x die Anzahl der beobachteten Todesfälle und E_x die Anzahl der rechnungsmäßig erwarteten Todesfälle bezeichne.

Der Wert der Teststatistik ist in der Aufgabenstellung angegeben mit 13,62.

Die Teststatistik ist unter der Nullhypothese näherungsweise χ^2-verteilt mit 6 Freiheitsgraden.

Das 95%-Quantil der χ^2-Verteilung mit 6 Freiheitsgraden ist 12,59 (vgl. Tabelle).

Da der Wert der Teststatistik das 95%-Quantil überschreitet, wird die Nullhypothese nach diesem Test abgelehnt.

Interpretation der Ergebnisse:

Der Vorzeichentest und der χ^2-Test lehnen die Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von 5% ab. Dies heißt aber nicht zwingend, dass die verwendeten Rechnungsgrundlagen nicht der Realität entsprechen, da diese Entscheidung nur mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von 5% gilt. Vielmehr kann dieses Ergebnis auch Folge einer zufallsbedingten Schwankung sein.

b) i)

Bei Todesfallversicherungen wird im Todesfall eine Leistung ausgezahlt, die größer als das zu diesem Zeitpunkt vorhandene Deckungskapital ist. Das Versicherungsunternehmen trägt ein Todesfallrisiko.

Ziel ist es, einen prozentualen Schwankungszuschlag s_x^α auf die Sterbewahrscheinlichkeit q_x so zu ermitteln, dass der unter Einhaltung des Sicherheitsniveaus $1-\alpha$ maximal zulässige Schaden, der durch eine größere Anzahl von Todesfällen als rechnungsmäßig erwartet entsteht, ausgeglichen werden kann.

Es bezeichne	L_x^M	die Anzahl der im Modellbestand vorhandenen Lebenden des Alters x
	T_x^M	die Anzahl der im Modellbestand erwarteten Toten des Alters x

Wird mit einer Sterbewahrscheinlichkeit q_x kalkuliert, so geht man davon aus, dass im Durchschnitt $q_x \cdot L_x^M$ Todesfälle eintreten. Der Schwankungszuschlag muss also so gewählt werden, dass mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ die erwarteten Todesfälle im Modellbestand

$\sum_x T_x^M$ höchstens so groß wie die mit den Sterbewahrscheinlichkeiten $q_x + s_x^\alpha$ berechneten erwarteten Todesfälle sind, d.h. es muss gelten:

$$\mathrm{P}\left(\sum_x T_x^M \le \sum_x \left(q_x + s_x^\alpha\right) L_x^M\right) \overset{!}{=} 1-\alpha.$$

Wir können nach dem Zentralen Grenzwertsatz annehmen, dass $Z := \sum_x T_x^M$ näherungsweise eine normalverteilte Zufallsvariable ist mit Erwartungswert $\mathrm{E}(Z) = \sum_x q_x L_x^M$ und Varianz $\mathrm{Var}(Z) = \sum_x q_x (1-q_x) L_x^M$.

Mit diesen Bezeichnungen sowie der Vorgabe $s_x^\alpha = s^\alpha q_x$ mit $0 < s^\alpha < 1$ ergibt sich aus obiger Bedingung analog die äquivalente Darstellung

$$\mathrm{P}\left(Z \le (1+s^\alpha)\mathrm{E}(Z)\right) \overset{!}{=} 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \qquad \mathrm{P}\left(\frac{Z-\mathrm{E}(Z)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}} \le s^\alpha \frac{\mathrm{E}(Z)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}}\right) \overset{!}{=} 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \qquad s^\alpha = u_{1-\alpha} \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}}{\mathrm{E}(Z)} = u_{1-\alpha} \frac{\sqrt{\sum_x q_x (1-q_x) L_x^M}}{\sum_x q_x L_x^M}.$$

ii)

Haben die Tests gegen die Basistafel 2. Ordnung ergeben, dass die Nullhypothese zu dem vorgegebenen Niveau abgelehnt wird, kann noch überprüft werden, ob sich bei Tests gegen die Basistafel 2. Ordnung mit Schwankungszuschlag das gleiche Ergebnis einstellt. Ergibt sich auch hier eine Ablehnung der Nullhypothese, kann dies ein Hinweis darauf sein, dass die in den Rechnungsgrundlagen enthaltenen Sicherheiten „aufgebraucht“ wurden. In diesem Fall ist eventuell eine Anpassung der Rechnungsgrundlagen geboten.

iii)

Vorzeichentest:

Die Teststatistik T ergibt sich aus der Anzahl der positiven Differenzen zwischen den beobachteten und den erwarteten Todesfällen, d.h. $T = 2$.

Unter Gültigkeit der Nullhypothese ist T binomialverteilt mit Wahrscheinlichkeit ½ für jedes Vorzeichen, d.h. T ist $B\left(6, \frac{1}{2}\right)$-verteilt. Damit ist für das Signifikanzniveau von 5 % der Ablehnungsbereich gegeben durch die Menge $\{0,6\}$ wegen $P(\{0,6\}) = 0{,}03126 < 0{,}05$ und

$P(\{0,1,5,6\}) = 0{,}21876 > 0{,}05$. Der Wert der Teststatistik ist mit $T = 2$ nicht im Ablehnungsbereich, d.h. es gilt $T \notin \{0,6\}$.
Bei einem Signifikanzniveau von 5 % kann die Nullhypothese daher nicht abgelehnt werden.

Iterationstest:

Die Teststatistik ergibt sich aus der Anzahl der Vorzeichenwechsel, die sich bei den Differenzen zwischen den beobachteten und den rechnungsmäßig erwarteten Todesfällen ergeben, d.h. es ist $T = 4$.
Unter Gültigkeit der Nullhypothese ist T binomialverteilt mit Wahrscheinlichkeit ½ für jedes Vorzeichen, d.h. T ist $B\left(5,\frac{1}{2}\right)$-verteilt.
Damit folgt

$P(T \le 4) = 0{,}96875$, d.h. $P(T \le 4) > 5\% = 0{,}05$.

Bei einem Signifikanzniveau von 5 % kann die Nullhypothese daher nicht abgelehnt werden.

χ^2**-Test:**

Die Teststatistik lautet

$$T = \sum_{x=50}^{55} \frac{(Z_x - E_x)^2}{E_x},$$

wobei Z_x die Anzahl der beobachteten Todesfälle und E_x die Anzahl der rechnungsmäßig erwarteten Todesfälle bezeichne.

Der Wert der Teststatistik ist in der Aufgabenstellung angegeben mit 12,11.

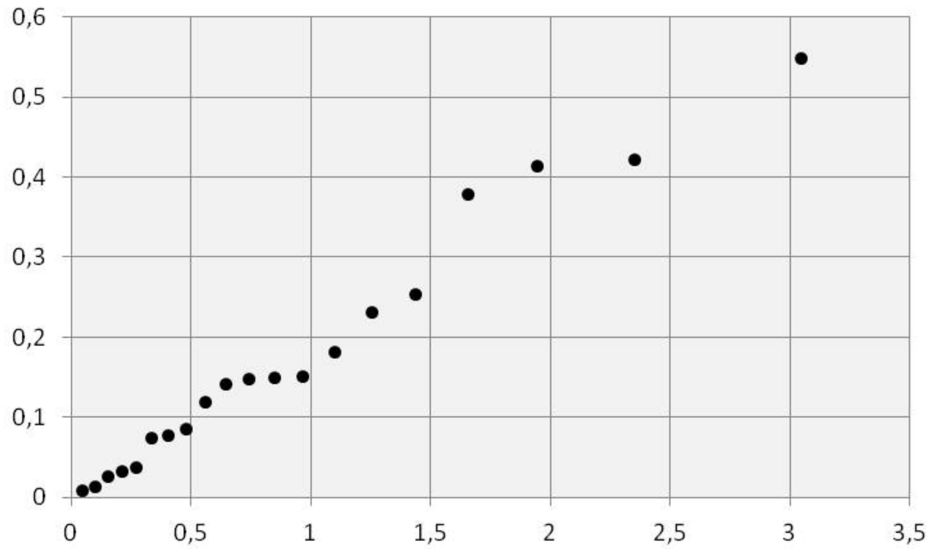
Die Teststatistik ist unter der Nullhypothese näherungsweise χ^2-verteilt mit 6 Freiheitsgraden.

Das 95%-Quantil der χ^2-Verteilung mit 6 Freiheitsgraden ist 12,59 (vgl. Tabelle).

Da der Wert der Teststatistik dieses Quantil nicht überschreitet, wird die Nullhypothese auch nach diesem Test nicht abgelehnt.

Alle drei durchgeführten Tests lehnen die Nullhypothese nicht ab. Es ergibt sich deshalb kein Hinweis darauf, dass die Basistafel 1. Ordnung nicht mehr anwendbar wäre. Allerdings bedeutet dies nicht, dass die ursprünglich beabsichtigte Sicherheit in den biometrischen Rechnungsgrundlagen noch enthalten ist.

Aufgabe 2 (30 Punkte): Der Aktuar eines Schadenversicherers möchte untersuchen, ob die Schadenhöhen eines Haftpflicht-Segmentes einer Gamma-Verteilung $\Gamma(\alpha;\lambda)$ genügen. Dazu ermittelt er die Jahresgesamtschäden der letzten 20 Jahre (in Mio. €) und erhält folgenden Q-Q-Plot, bei dem die empirischen Quantile gegen die Quantile einer $\Gamma(1;1)$-verteilten Referenzvariablen *Z* geplottet sind:



a) Erstellen Sie ein Histogramm der Schadenhöhen mit den Klassengrenzen 0, 0,1, 0,2, 0,4 und 0,6.
b) Warum stützt der Q-Q-Plot die Hypothese einer Gamma-Verteilung?
c) Der Parameter α sei nun bereits durch Expertenmeinung festgelegt worden. Das ML-Verfahren ergab für λ den Schätzer $\hat{\lambda} = 5$. Passt dieser Wert zum Q-Q-Plot? Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise. Für eine evtl. notwendige Zeichnung verwenden Sie bitte die obige Graphik. (Hinweis: Welche Eigenschaft hat die Familie der Gamma-Verteilungen bei festem α?)
d) Es sei nun $\hat{\alpha} = 1$ und $\hat{\lambda}$ wie in (c). Bestimmen Sie damit Schätzer für den Value at Risk und den Expected Shortfall (ES) des Jahresschadens zum Risiko-Niveau 0,5%. Welche anschauliche Bedeutung hat der ES-Wert? Welche Beziehung besteht zum Tail Value at Risk? (Hinweis: Welche spezielle Verteilung ist $\Gamma(1;\lambda)$?)
e) Für den obigen Q-Q-Plot wurden in EXCEL Zufallszahlen mit folgender Formel erzeugt:

−1/5 * LN(1 − ZUFALLSZAHL())

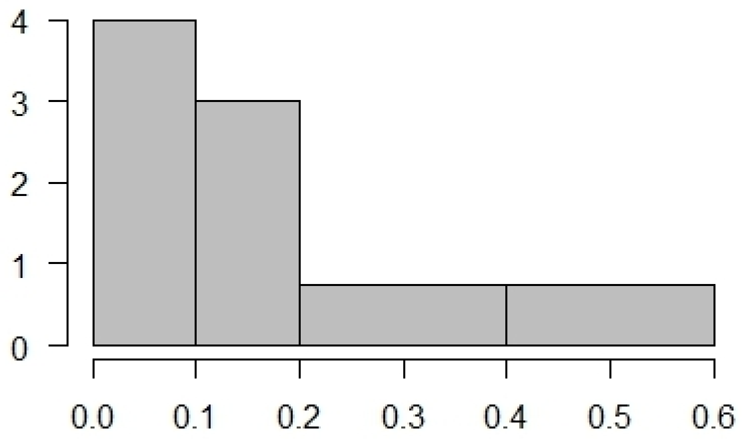
Dabei liefert ZUFALLSZAHL() auf [0;1] gleichverteilte Zufallszahlen. Erläutern Sie dieses Vorgehen.

Lösung:

a) Die Kenngrößen des Histogramms sind

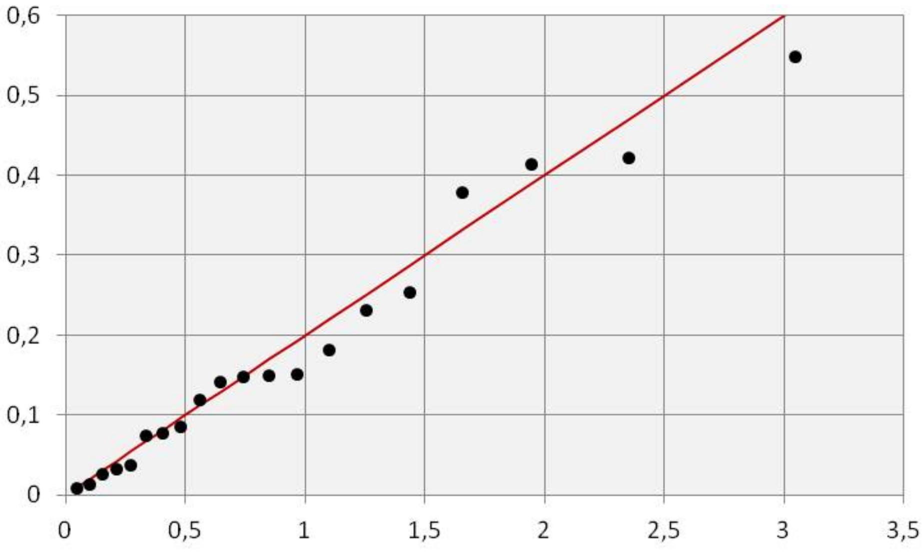
Klassen		$[0; 0{,}1]$	$(0{,}1; 0{,}2]$	$(0{,}2; 0{,}4]$	$[0{,}4; 0{,}6]$
Intervallbreite		0,1	0,1	0,2	0,2
rel. Häufigkeit		8/20	6/20	3/20	3/20
Höhe Rechteck		4	3	0,75	0,75

Die relativen Häufigkeiten liest man an der Lage der *y*-Komponenten der Punkte im Plot ab. Das Histogramm sieht dann wie folgt aus:



b) Die Punkte liegen annähernd auf einer Geraden, so dass die Annahme einer Gamma-Verteilung durch den Plot unterstützt wird.

c) Bei festem α ist die Familie der Gamma-Verteilungen eine reine Skalenfamilie. Bei einer solchen ist die Quantil-Quantil-Funktion eine Ursprungsgerade. Die Steigung σ der Geraden ist in diesem Fall der Kehrwert des Parameters λ. Zeichnet man eine Ursprungsgerade mit Steigung 1/5 ein, erhält man



Diese Gerade ist nach Augenmaß eine gute Annäherung an die Regressionsgerade durch den Nullpunkt. Daher passt der ML-Schätzer zum Q-Q-Plot.

d) Eine Gamma-Verteilung $\Gamma(\alpha;\lambda)$ mit $\alpha = 1$ ist eine Exponentialverteilung $\mathcal{E}(\lambda)$ mit Parameter λ. Diese hat die Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ für $x \geq 0$. Der VaR zum Risiko-Niveau 0,5% ist das 99,5%-Quantil, das hier den Wert

$$F^{-1}(0{,}995) = -\frac{1}{5}\ln(1 - 0{,}995) = 1{,}0597$$

hat. Mit 99,5% Wahrscheinlichkeit wird also ein Jahresschaden von 1,0597 Mio. € nicht überschritten. Der ES einer Exponentialverteilung mit Parameter λ berechnet sich nach der Formel

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = E\left(X \mid X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)\right) = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \frac{1}{\lambda} = 1{,}0597 + \frac{1}{5} = 1{,}2597.$$

Der erwartete Jahresschaden im Fall einer Überschreitung des VaR ist also 1,2597 Mio. €. Der ES und der TVaR sind hier identisch, da es sich um eine stetige Verteilungsfunktion handelt.

e) Es wurden damit zufällige Zahlen erzeugt, die einer $\mathcal{E}(5)$-Verteilung genügen. Eine Methode zur Erzeugung von Zufallszahlen mit vorgegebener Verteilung F ist die Inversionsmethode. Sie basiert auf der Tatsache, dass die Zufallsvariable $F^{-1}(X)$ die Verteilungsfunktion F hat, wenn $X \quad U[0;1]$ verteilt und F invertierbar ist. Für die Exponential-Verteilung gilt (wie in (d))

$$F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\cdot\ln(1 - x) \text{ für } 0 < x < 1.$$

Damit wird das Problem reduziert auf die Erzeugung von auf dem Intervall $[0;1]$ gleichverteilten Zufallszahlen. Dies leistet aber die Excel-Funktion ZUFALLSZAHL().

Aufgabe 3 (30 Punkte): Das Risiko X sei $\mathcal{LN}\left(\mu,\sigma^2\right)$ -lognormalverteilt, mit den Momenten $\alpha := E(X)$ und $\beta := Var(X)$.

a) Bestimmen Sie die Fisher-Information $I\left(\mu,\sigma^2\right)$ von X.

b) Für eine stochastisch unabhängige $\mathcal{LN}\left(\mu,\sigma^2\right)$ -verteilte Stichprobe $X_1,\ldots,X_n$ wird α mit $\hat{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ geschätzt.

i) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von $\hat{\alpha}$.

ii) Welche asymptotische Verteilung besitzt $\hat{\alpha}$ nach dem zentralen Grenzwertsatz?

Im Folgenden sei $\sigma^2 > 0$ fest, es ist nur der Parameter μ unbekannt. Ohne Beweis können Sie verwenden, dass dann $I(\mu) = \frac{1}{\sigma^2}$ die Informationsmatrix von X ist und $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(X_i\right)$ ein ML-Schätzer von μ ist.

c) Begründen Sie, dass $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$ die asymptotische Verteilung von $\sqrt{n}\left(\hat{\mu} - \mu\right)$ ist und dass sogar $\mathcal{N}\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ die exakte Verteilung von $\hat{\mu}$ ist.

d) Begründen Sie, dass $\hat{\alpha}^{ML} := e^{\hat{\mu}+\sigma^2/2}$ ein ML Schätzer von α ist.

e) Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung von $\sqrt{n}\left(\hat{\alpha}^{ML} - \alpha\right)$.

f) Ohne Beweis können Sie verwenden: $e^x - 1 > x$ für alle $x > 0$. Vergleichen Sie die asymptotischen Verteilungen von $\hat{\alpha}$ aus b) und $\hat{\alpha}^{ML}$ aus d). Welchem Schätzer würden Sie den Vorrang geben?

Lösung:

a) Die Dichte f von X ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\sigma^2}}\varphi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right),\ x > 0$$

wobei $\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right), y \in \mathbb{R}$ die Dichte der Standardnormalverteilung ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\ell(\mu,\sigma^2) &= \ln f(x) = -\ln x - \frac{1}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2 \\
\ell_{\mu}(\mu,\sigma^2) &= \frac{1}{\sigma^2}(\ln x - \mu) \\
\ell_{\sigma^2}(\mu,\sigma^2) &= -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(\ln x - \mu)^2 \\
\ell_{\mu\mu}(\mu,\sigma^2) &= -\frac{1}{\sigma^2} \\
\ell_{\mu\sigma^2}(\mu,\sigma^2) &= -\frac{1}{\sigma^4}(\ln x - \mu) \\
\ell_{\sigma^2\sigma^2}(\mu,\sigma^2) &= \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}(\ln x - \mu)^2
\end{aligned}$$

Nach Definition gilt $I(\mu,\sigma^2) = E(-H_\ell)$, wobei H_ℓ die Hessematrix von ℓ ist. Somit folgt aus $E(\ln X - \mu) = E(\ln X) - \mu = 0$ und $E\left((\ln X - \mu)^2\right) = Var(\ln X) = \sigma^2$ schließlich

$$I(\mu,\sigma^2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

b) i) $E(\hat{\alpha}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}n\alpha = \alpha$, $Var(\hat{\alpha}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{\beta}{n}$.

ii) Nach dem ZGWS ist $\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha)$ asymptotisch $\mathcal{N}(0,\beta)$-verteilt, also ist $\hat{\alpha}$ näherungsweise

$\mathcal{N}\left(e^{\mu+\sigma^2/2}, \frac{e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)}{n}\right)$-verteilt.

c) Es gilt nach Folienskript $\sqrt{n}\left(\hat{\mu}-\mu\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,I\left(\mu\right)^{-1}\right)=\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$. Die Verteilung ist auch exakt, denn die $\ln\left(X_i\right)$ sind stochastisch unabhängig und identisch $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$-verteilt für $i=1,\ldots,n$. Somit ist $\hat{\mu}$ als Summe normalverteilter Zufallsvariablen normalverteilt mit $E\left(\hat{\mu}\right)=\mu$ und $Var\left(\hat{\mu}\right)=\frac{\sigma^2}{n}$, analog zu b) i).

d) Die Funktion $h\left(x\right):=e^{x+\sigma^2/2}$ ist wegen $h'\left(x\right)=h(x)>0$ offensichtlich streng monoton steigend, also ist $\hat{\alpha}^{ML}=h\left(\hat{\mu}\right)$ als Transformation eines ML-Schätzers ein ML-Schätzer von $h\left(\mu\right)$.

e) Für die Parametertransformation $\alpha=h\left(\mu\right)$ ist $\frac{I(\mu)}{h'\left(\mu\right)^2}=\frac{1}{\sigma^2h'\left(\mu\right)^2}$ die Informationsmatrix und es folgt $\sqrt{n}\left(\hat{\alpha}^{ML}-\alpha\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,e^{2\mu+\sigma^2}\sigma^2\right)$.

f) Wegen $e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)>e^{2\mu+\sigma^2}\sigma^2$ ist die asymptotische Varianz von $\hat{\alpha}$ größer als die asymptotische Varianz von $\hat{\alpha}^{ML}$, deshalb würde man wegen der kleineren Varianz $\hat{\alpha}^{ML}$ den Vorzug geben.

Aufgabe 4 (30 Punkte): Der Strukturparameter Θ in einem Credibility-Modell folge einer diskreten Verteilung mit $P(\Theta = j) = p_j$ für $j = 1, 2, \cdots, k$. Des Weiteren sei jeder Einzelschaden X bei gegebenem Strukturparameter $\Theta = j$ gemäß $\mathcal{E}(\lambda_j)$ exponentialverteilt ($\lambda_j > 0$ sei bekannt).

a) Berechnen Sie auf Basis der (bei gegebenem Θ bedingt unabhängigen) Beobachtungen der Einzelschäden $X_1, \cdots, X_n$ die a-posteriori-Verteilung von Θ bei gegebenen Schadenbeobachtungen. Zeigen Sie dabei, dass es für die Berechnung der a-posteriori-Verteilung genügt, anstelle der einzelnen X_i nur deren empirischen Mittelwert $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ zu kennen.

b) Zeigen Sie, dass für die Credibility-Prämie $H^* = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} p_j \cdot \lambda_j^{n-1} \cdot \exp\left(-\lambda_j \cdot n \cdot \bar{X}\right)}{\sum_{j=1}^{k} p_j \cdot \lambda_j^{n} \cdot \exp\left(-\lambda_j \cdot n \cdot \bar{X}\right)}$ gilt.

c) Folgende Werte seien nun gegeben:

j	1	2
$P(\Theta = j) = p_j$	80%	20%
λ_j	0,1	0,05

i) Zeigen Sie, dass sich mit diesen Werten $E(X) = 12$ und $E(Var[X \mid \Theta]) = 160$ ergibt.

ii) Außerdem liegen $n = 4$ Schadenbeobachtungen mit einem empirischen Mittel von $\bar{X} = 15$ vor. Welche Werte ergeben sich für den "Credibility-Faktor" z_n und die zugehörige linearisierte Credibility-Prämie $H^{**} = z_n \cdot \bar{X} + (1 - z_n) \cdot E(X)$ (ohne nachzurechnen können Sie dabei verwenden, dass $Var(E[X \mid \Theta]) = 16$ gilt)?

Lösung:

a) Nach Lemma 1 aus Kapitel 8 gilt mit dem Vektor der Schadenbeobachtungen $\mathbf{X}=(X_1,...,X_n)$ bzw. deren Realisierungen $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$

$$P(\Theta=j\,|\,\mathbf{X}=\mathbf{x})=\frac{P(\Theta=j)\prod_{i=1}^{n}f(x_i\,|\,\Theta=j)}{\sum_{j=1}^{k}P(\Theta=j)\prod_{i=1}^{n}f(x_i\,|\,\Theta=j)}=\frac{p_j\cdot\prod_{i=1}^{n}f(x_i\,|\,\Theta=j)}{\sum_{j=1}^{k}p_j\cdot\prod_{i=1}^{n}f(x_i\,|\,\Theta=j)}.$$

Darin ist

$$\prod_{i=1}^{n}f(x_i\,|\,\Theta=j)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_j\cdot\exp(-\lambda_j x_i)=\lambda_j^n\cdot\exp\left(-\lambda_j\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\lambda_j^n\cdot\exp\left(-\lambda_j\cdot n\cdot\overline{x}\right)$$

mit dem empirischen Mittel $\overline{x}$. Damit ergibt sich für die a-posteriori-Verteilung

$$P(\Theta=j\,|\,\mathbf{X}=\mathbf{x})=\frac{p_j\cdot\lambda_j^n\cdot\exp\left(-\lambda_j\cdot n\cdot\overline{x}\right)}{\sum_{j=1}^{k}p_j\cdot\lambda_j^n\cdot\exp\left(-\lambda_j\cdot n\cdot\overline{x}\right)},$$

welche hinsichtlich der Schadenbeobachtungen lediglich von $\overline{x}$ abhängt.

b) Für die Credibility-Prämie H^* gilt $H^*=E[H(\Theta)\,|\,\mathbf{X}]=\sum_{j=1}^{k}H(j)\cdot P(\Theta=j\,|\,\mathbf{X})$ mit $H(j)=E[X\,|\,\Theta=j]=1/\lambda_j$. Daraus ergibt sich

$$H^*=\frac{\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\lambda_j}\cdot p_j\cdot\lambda_j^n\cdot\exp\left(-\lambda_j\cdot n\cdot\overline{X}\right)}{\sum_{j=1}^{k}p_j\cdot\lambda_j^n\cdot\exp\left(-\lambda_j\cdot n\cdot\overline{X}\right)}=\frac{\sum_{j=1}^{k}p_j\cdot\lambda_j^{n-1}\cdot\exp\left(-\lambda_j\cdot n\cdot\overline{X}\right)}{\sum_{j=1}^{k}p_j\cdot\lambda_j^n\cdot\exp\left(-\lambda_j\cdot n\cdot\overline{X}\right)}.$$

c) Es gilt

$$E(X)=E(E[X\,|\,\Theta])=\sum_{j=1}^{k}P(\Theta=j)\cdot E(X\,|\,\Theta=j)=\sum_{j=1}^{k}p_j\cdot\frac{1}{\lambda_j}=80\%\cdot 10+20\%\cdot 20=12$$

und

$$E(Var[X\,|\,\Theta])=\sum_{j=1}^{k}P(\Theta=j)\cdot Var(X\,|\,\Theta=j)=\sum_{j=1}^{k}p_j\cdot\frac{1}{\lambda_j^2}=80\%\cdot 100+20\%\cdot 400=160.$$

Mit dem Hinweis ergibt sich

$$z_n=\frac{Var(E[X\,|\,\Theta])}{Var(E[X\,|\,\Theta])+\frac{1}{n}E(Var[X\,|\,\Theta])}=\frac{16}{16+\frac{1}{4}\cdot 160}=\frac{16}{56}=0{,}2857.$$

Damit ergibt sich eine linearisierte Credibility-Prämie von

$$H^{**}=z_n\cdot\overline{X}+(1-z_n)\cdot E(X)=0{,}2857\cdot 15+0{,}7143\cdot 12=12{,}86\,.$$

Aufgabe 1:

(a) - 18 Punkte
(b) - 12

Aufgabe 2:

(a) - 6 Punkte
(b) - 2
(c) - 7
(d) - 10
(e) – 5

Aufgabe 3:

(a) - 12 Punkte
(b) – (i) 3 (ii) 3
(c) - 3
(d) - 3
(e) – 3
(f) – 3

Aufgabe 4:

(a) - 10
(b) - 5
(c) - 15