Klausur zu „Stochastische Risikomodellierung und statistische Methoden“ (Mai 2008)

Aufgabe 1 (32 Punkte): Ein Lebensversicherungsunternehmen entwickelt einen Tarif für eine gemischte Versicherung (d. h. die Versicherungssumme 1 wird in gleicher Höhe im Todes- und Erlebensfall fällig) gegen Einmalbeitrag. Das Unternehmen möchte in Hinblick auf das Schwankungsrisiko eine Sicherheit von 95 % erreichen. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Versicherungen nur im Alter 20 abgeschlossen werden können, eine Laufzeit von 4 Jahren haben und die versicherten Risiken unabhängig voneinander sind.

Das Versicherungsunternehmen geht von den folgenden Sterbewahrscheinlichkeiten aus:

x	q_x
20	0,005
21	0,010
22	0,015
23	0,020

a) Ermitteln Sie einen relativen Zu- bzw. Abschlag, der auf die Ausscheidewahrscheinlichkeiten anzuwenden ist, um die geforderte Sicherheit

   (i) für jedes der Alter 20 bis 23

   (ii) für die Alter 20 bis 23 insgesamt

   zu erreichen bei einer Bestandsgröße von 400 Versicherten für jedes Alter. (95 % - Quantil der Standard-Normalverteilung: $u_{95\%}$ = 1,65).

b) Verallgemeinern Sie den Ansatz unter a), indem Sie die Risikoleistung des Versicherungsunternehmens einbeziehen. (Ansatz: Einmalbeitrag in Höhe von 80 % der Versicherungssumme, keine Kosten, linearer Anstieg des Deckungskapitals)

c) Welche Änderungen ergeben sich für die Ergebnisse unter a) und b), wenn sich der Bestand verdoppelt?

d) Erläutern Sie den Begriff des Solvenzkapitals. Wie kann das Solvenzkapital bei einer geforderten Sicherheit von 95% ermittelt werden, wenn keine Modifikation der Ausscheidewahrscheinlichkeiten vorgenommen wird (Betrachtung nur für Verträge am Beginn der Versicherung, d.h. für $L_{20} = 400, L_{21} = L_{22} = L_{23} = 0$). Stellen Sie hierzu drei Ansätze dar, skizzieren und vergleichen Sie die Vorgehensweisen. Erläutern Sie bei einer der Vorgehensweisen, welche Änderung sich für das Solvenzkapital ergibt, wenn sich der Bestand verdoppelt.

Lösung:

zu a):

(i) Für den Lebensversicherer besteht in den Altern 20 bis 23 ein Todesfallrisiko, da die Todesfallsumme in den ersten Versicherungsjahren höher als die bis dahin angesammelte Deckungsrückstellung ist. Um bzgl. des Schwankungsrisikos die geforderte Sicherheit von $1-\alpha = 0,95$ zu erreichen, muss daher für jedes Alter x ein relativer Zuschlag $s_x^\alpha \geq 0$ auf die Sterbewahrscheinlichkeit q_x ermittelt werden, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Toten kleiner gleich als die erwartete Anzahl von Toten ist, 95% beträgt.

Für alle Alter x=20,…,23 muss also gelten:

$$P\left(T_x \le L_x \cdot q_x \cdot (1+s_x^\alpha)\right) \overset{!}{=} 0{,}95\,, \qquad (*)$$

mit

L_x Anzahl der Lebenden im Alter x,

T_x Anzahl der Toten im Alter x,

s_x^α rel. Zuschlag im Alter x.

Die Anzahl der Toten T_x lässt sich auch darstellen als Summe von unabhängigen Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen X_i, i=1,…, L_x, d.h.

$$T_x = \sum_{i=1}^{L_x} X_i \text{ mit } X_i \sim B(1;q_x)\,.$$

Daher gilt $T_x \sim \mathrm{Bin}(L_x;q_x)$ mit $ET_x = L_x q_x$ und $\mathrm{Var}(T_x) = L_x q_x (1-q_x)$.

Gleichung (*) ist damit äquivalent zu

$$P\left(\frac{T_x - ET_x}{\sqrt{\mathrm{Var}(T_x)}} \le \frac{L_x q_x (1+s_x^\alpha) - L_x q_x}{\sqrt{\mathrm{Var}(T_x)}}\right) = P\left(\frac{T_x - ET_x}{\sqrt{\mathrm{Var}(T_x)}} \le \frac{L_x q_x s_x^\alpha}{\sqrt{L_x q_x (1-q_x)}}\right) \overset{!}{=} 0{,}95$$

Da die Zufallsvariable $Z := \frac{T_x - ET_x}{\sqrt{\mathrm{Var}(T_x)}}$ näherungsweise normalverteilt ist, folgt

$$\frac{L_x q_x s_x^\alpha}{\sqrt{L_x q_x (1-q_x)}} \overset{!}{=} u_{0,95} \approx 1{,}65$$

und damit

$$\boxed{s_x^\alpha = 1{,}65 \cdot \frac{\sqrt{L_x q_x (1-q_x)}}{L_x q_x} = \frac{1{,}65}{20} \cdot \frac{\sqrt{1-q_x}}{\sqrt{q_x}}, \quad \text{für } x = 20,...,23.}$$

[Nicht in der Aufgabe gefordert: In unserem Beispiel ergibt sich daher

x	L_x	q_x	s_x^α	$\tilde{q}_x$
20	400	0,005	**1,1638**	0,0108
21	400	0,010	**0,8209**	0,0182
22	400	0,015	**0,6685**	0,0250
23	400	0,020	**0,5775**	0,0316

]

(ii) Soll die Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% für alle Alter insgesamt eingehalten werden, ergibt sich der Ansatz

$$P\left(\sum_{x=20}^{23} T_x \le \sum_{x=20}^{23} L_x \cdot q_x \cdot (1+s^\alpha)\right) \overset{!}{=} 0,95$$

Mit denselben Überlegungen wie oben ergibt sich die Äquivalenz

$$P\left(\frac{\sum_{x=20}^{23} T_x - E\left(\sum_{x=20}^{23} T_x\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(\sum_{x=20}^{23} T_x\right)}} \le \frac{\sum_{x=20}^{23} L_x \cdot q_x \cdot (1+s^\alpha) - \sum_{x=20}^{23} L_x \cdot q_x}{\sqrt{\sum_{x=20}^{23} L_x \cdot q_x \cdot (1-q_x)}}\right) \overset{!}{=} 0,95$$

und damit

$$\frac{\sum_{x=20}^{23} L_x \cdot q_x \cdot s^\alpha}{\sqrt{\sum_{x=20}^{23} L_x \cdot q_x \cdot (1-q_x)}} = u_{0,95} \approx 1,65$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad s^\alpha = 1,65 \cdot \frac{\sqrt{\sum_{x=20}^{23} L_x \cdot q_x \cdot (1-q_x)}}{\sum_{x=20}^{23} L_x \cdot q_x} = \frac{1,65}{20} \cdot \frac{\sqrt{\sum_{x=20}^{23} q_x \cdot (1-q_x)}}{\sum_{x=20}^{23} q_x} \approx 0,3662}$$

[In unserem Beispiel ergibt sich damit

x	L_x	q_x	$\tilde{q}_x$
20	400	0,005	0,0068
21	400	0,010	0,0137
22	400	0,015	0,0205
23	400	0,020	0,0273

]

zu b):
Die Risikoleistung des Versicherungsunternehmens hängt vom Alter x des Versicherten bei Tod ab. Stirbt der Versicherte im Alter 20, so hat das Unternehmen erst 80% der Versicherungssumme – nämlich den Einmalbeitrag bei Versicherungsbeginn im Alter 20 – als Deckungskapital angespart und muss daher 20% der Versicherungssumme als Risikoleistung erbringen, bei Tod im Alter 21 15% usw.

Sei K_x das riskierte Kapital (=Risikoleistung) im Alter x mit

$K_{20} = 0,20$

$K_{21} = 0,15$

$K_{22} = 0,10$

$K_{23} = 0,05$

Der verallgemeinerte Ansatz von Aufgabenteil a) (i) ergibt sich dann zu

$$P\left(T_x \cdot K_x \le L_x \cdot q_x \cdot (1+s_x^\alpha) \cdot K_x\right) \overset{!}{=} 0{,}95 \text{ für alle } x=20,\ldots,23.$$

Da der Faktor K_x auf beiden Seiten herausgekürzt werden kann, ergeben sich bei diesem Ansatz dieselben altersabhängigen Faktoren wie unter a) (i):

$$\boxed{s_x^\alpha = 1{,}65 \cdot \frac{\sqrt{L_x q_x (1-q_x)}}{L_x q_x} = \frac{1{,}65}{20} \cdot \frac{\sqrt{1-q_x}}{\sqrt{q_x}}, \quad \text{für } x = 20,\ldots,23.}$$

Der verallgemeinerte Ansatz von Aufgabenteil a) (ii) ergibt sich zu

$$P\left(\sum_{x=20}^{23} T_x \cdot K_x \le \sum_{x=20}^{23} L_x \cdot q_x \cdot K_x \cdot (1+s^\alpha)\right) \overset{!}{=} 0{,}95,$$

Analog zu a) (ii) erhält man damit:

$$\boxed{\Leftrightarrow s^\alpha = 1{,}65 \cdot \frac{\sqrt{\sum_{x=20}^{23} L_x \cdot q_x \cdot (1-q_x) \cdot K_x}}{\sum_{x=20}^{23} L_x \cdot q_x \cdot K_x} = \frac{1{,}65}{20} \cdot \frac{\sqrt{\sum_{x=20}^{23} q_x \cdot (1-q_x) \cdot K_x}}{\sum_{x=20}^{23} q_x \cdot K_x}}$$

zu c):

Die relativen Zuschläge verringern sich um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

Ergebnisse unter a):

i) $$s_x^\alpha = 1{,}65 \cdot \frac{\sqrt{L_x q_x (1-q_x)}}{L_x q_x} = \frac{1{,}65}{20 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1-q_x}}{\sqrt{q_x}}, \ (x = 20, 21, 22, 23)$$

ii) $$s^\alpha = 1{,}65 \cdot \frac{\sqrt{\sum_{x=20}^{23} L_x \cdot q_x \cdot (1-q_x)}}{\sum_{x=20}^{23} L_x \cdot q_x} = \frac{1{,}65}{20\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\sum_{x=20}^{23} q_x \cdot (1-q_x)}}{\sum_{x=20}^{23} q_x}$$

Ergebnisse unter b):

i) $$s_x^\alpha = 1{,}65 \cdot \frac{\sqrt{L_x q_x (1-q_x)}}{L_x q_x} = \frac{1{,}65}{20 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1-q_x}}{\sqrt{L_x q_x}},$$

ii) $$s^{\alpha} = 1{,}65 \cdot \frac{\sqrt{\sum_{x=20}^{23} L_x \cdot q_x \cdot (1-q_x) \cdot K_x}}{\sum_{x=20}^{23} L_x \cdot q_x \cdot K_x} = \frac{1{,}65}{20\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\sum_{x=20}^{23} q_x \cdot (1-q_x) \cdot K_x}}{\sum_{x=20}^{23} q_x \cdot K_x}$$

zu d):

Unter Solvenzkapital versteht man das Kapital, das ein Versicherungsunternehmen zusätzlich zum erwarteten Gesamtschaden bereithalten muss, um mit 95%iger Wahrscheinlichkeit die Ansprüche aller Versicherten erfüllen zu können. Bezeichnet S_n den Gesamtschaden des Versicherungsunternehmens, dann ergibt sich das Solvenzkapital also als Differenz zwischen dem 95%-Quantil der Gesamtschadenverteilung und dem Erwartungswert $E(S_n)$. Zur Bestimmung des Solvenzkapitals muss daher zunächst die Gesamtschadenverteilung von S_n berechnet werden.

Allgemein ergibt sich der Gesamtschaden S_n des Versicherungsunternehmens als Summe der Einzelschäden

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \, ,$$

wobei X_i, i=1,…,n, nichtnegative unabhängige Zufallsvariablen seien.

Es gilt dann $ES_n = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ und wegen der Unabhängigkeit der X_i auch $Var(S_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$.

In unserem Fall bezeichne X_i (i=1,…,400) den „Schaden“ des Lebensversicherungsunternehmens, wenn ein 20-Jähriger stirbt. Da im ersten Versicherungsjahr erst 80% der Versicherungssumme 1 vorliegen, beträgt die Höhe des Schadens für das Versicherungsunternehmen 0,2. d.h. $\frac{X_i}{0{,}2} \sim B(1; q_{20})$.

Zur Berechnung der Gesamtschadenverteilung gibt es verschiedene Ansätze:

1) *Berechnung der Gesamtschadenverteilung durch Faltung*

Da die Verteilungen der Einzelschäden bekannt sind, kann die Gesamtschadenverteilung durch Faltung bestimmt werden.

In unserem Fall ist die Verteilung von $S_{400} = \sum_{i=1}^{400} X_i$ einfach zu bestimmen, da die Faltung von unabhängigen, identisch verteilten Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen binomialverteilt ist. Es gilt daher $\frac{S_{400}}{0{,}2} \sim Bin(400; q_{20})$. Als Verteilungsfunktion für S_{400} erhält man damit

$$P\left(S_{400} \le x\right) = P\left(5 \cdot S_{400} \le 5 \cdot x\right) = \sum_{k=0}^{[5x]} \binom{400}{k} q_{20}{}^{k} \cdot (1-q_{20})^{400-k} \qquad \left(x \ge 0\right)$$

und als Erwartungswert

$$ES_n = 0,2 \cdot 400 \cdot q_{20} = 0,2 \cdot 400 \cdot 0,005 = 0,4$$

Hat man das 95%-Quantil $v_{0,95}$ der Gesamtschadenverteilung bestimmt, dann ergibt sich das Solvenzkapital zu $v_{0,95} - ES_n = v_{0,95} - 0,4.$

2) *Approximation der Gesamtschadenverteilung durch eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung*

Im kollektiven Modell wird der Gesamtschaden S als Summe von N Einzelschäden der Schadenhöhe Y_j dargestellt:

$$S = \sum_{j=1}^{N} Y_j\,,$$

wobei die Y_j nicht-negativ, unabhängig und identisch verteilt sind, N Poisson-verteilt mit Rate λ und unabhängig von den Y_j ist.

In unserem Fall kann Y_j nur den Wert 0,2 annehmen. N sei die Anzahl der auftretenden Versicherungsfälle, also Anzahl der auftretenden Todesfälle bei den 20jährigen Versicherten. Als Erwartungswert von N ergibt sich

$$\lambda = E(N) = \sum_{i=1}^{400} P(X_i > 0) = 400 q_{20} = 2$$

und

$$S = 0,2 \cdot N$$

Die Verteilung des Gesamtschadens ergibt sich dann für x > 0 zu

$$P(S = x) = P(0,2 \cdot N = x) = P(N = \frac{x}{0,2}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\frac{x}{0,2}}}{\left(\frac{x}{0,2}\right)!} = e^{-2} \frac{2^{5x}}{(5x)!}$$

mit

$$ES = 0,2 \cdot EN = 0,4$$

Hat man das 95%-Quantil $v_{0,95}$ der Gesamtschadenverteilung bestimmt, dann ergibt sich das Solvenzkapital zu $v_{0,95} - ES = v_{0,95} - 0,4$.

3) *Approximation der Gesamtschadenverteilung durch Normalverteilung*

Da die Einzelschäden X_i in unserem Fall unabhängig und identisch verteilt sind mit $\frac{X_i}{0,2} \sim B(1;q_{20})$, folgt mit dem Zentralen Grenzwertsatz, dass der Gesamtschaden $S_{400} = \sum_{i=1}^{400} X_i$ asymptotisch normalverteilt ist mit Erwartungswert

$$E(S_{400}) = 0,2 \cdot 400 \cdot q_{20} = 0,4$$

und Varianz

$$Var(S_{400}) = 0,2^2 \cdot 400 \cdot q_{20} \cdot (1-q_{20}) = 0,0796,$$

d.h. $S_{400} \sim N(0,4;0,0796)$.

Da das 95%-Quantil $u_{95\%}$ der Standardnormalverteilung 1,65 beträgt, ergibt sich das 95%-Quantil der Gesamtschadenverteilung zu $\sqrt{Var(S_{400})} \cdot 1,65 + ES_{400}$. Als Solvenzkapital erhält man daher $\sqrt{Var(S_{400})} \cdot 1,65 = 0,4655$.

Vergleich der Methoden:

Bei der Bestimmung der Gesamtschadenverteilung ist nur die Methode der Faltung exakt. Die Berechnung ist aber bei größeren Beständen mit sehr viel Aufwand verbunden. Alternativ bietet die Poisson-Approximation bei großen Beständen eine gute Näherung. Die Normal-Approximation kann zu einer Unterschätzung des Risikos führen.

Verdopplung des Bestandes:

Bei der Normalapproximation ergibt sich das 95%-Quantil der Gesamtschadenverteilung bei einem Bestand von n Versicherten zu $\sqrt{Var(S_n)} \cdot 1,65 + ES_n$ und das Solvenzkapital zu $\sqrt{Var(S_n)} \cdot 1,65$. Verdoppelt man nun die Bestandsgröße, so ergibt sich $ES_{2n} = 2 \cdot ES_n$ und wegen der Unabhängigkeit der versicherten Risiken $Var(S_{2n}) = 2 \cdot Var(S_n)$. Als 95%-Quantil ergibt sich also $\sqrt{2}\sqrt{Var(S_n)} \cdot 1,65 + 2 \cdot ES_n$ und als Solvenzkapital $\sqrt{2}\sqrt{Var(S_n)} \cdot 1,65$. Verdoppelt man den Bestand, so erhöht sich das Solvenzkapital um den Faktor $\sqrt{2}$.

Aufgabe 2 (36 Punkte): Die folgende Tabelle enthält die Ereignis-Sturmschäden einer Gebäudeversicherung der letzten 5 Jahre in Mio. €:

Jahr	1. Schaden	2.Schaden	3. Schaden
2003	5,4		
2004	38,9	2,1	
2005	2,6	1,2	2,1
2006	11,5		
2007	8,4	12,4	

a) Es wird angenommen, dass die Sturmfrequenz pro Jahr Poisson-verteilt ist. Schätzen Sie aus den Daten den zugehörigen Parameter $\lambda > 0$ mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode. (6 Punkte)

b) Überprüfen Sie mit Hilfe eines Q-Q-Plots, ob die Annahme einer Fréchet-Verteilung für die Einzelschadenhöhen gerechtfertigt ist. Transformieren Sie dazu die Daten so, dass Sie anschließend eine Anpassung an eine geeignete Lagen-Skalen-Familie vornehmen können (welche?). (10 Punkte)

c) Zeichnen Sie in den Q-Q-Plot eine Ausgleichsgerade, die durch die beiden Extrempunkte der Datenwolke verläuft, und schätzen Sie damit die Parameter der angenommenen Fréchet-Verteilung. (10 Punkte)

d) Geben Sie die zugehörige OEP-Kurve an und ermitteln Sie damit rechnerisch den Value at Risk zum Sicherheitsniveau von 99,5% für den Ereignisschaden [Solvency II-Standard]. (10 Punkte)

Lösung:

a) Tabelle der Sturmfrequenzen:

Jahr i	2003	2004	2005	2006	2007
Anzahl Stürme N_i	1	2	3	1	2

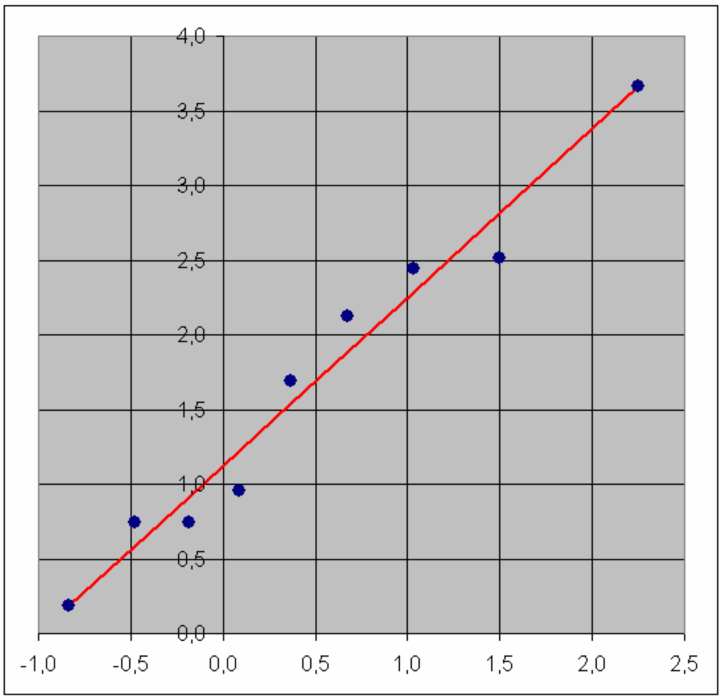
ML-Methode: $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N_i = \frac{9}{5} = 1{,}8$ mit $n = 5$ 6 P.

b) Transformation mit ln führt von einem Fréchet-verteilten Risiko zu einem Gumbel-verteilten Risiko. Wertetabelle für den Q-Q-Plot (nach Sortierung):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$-\ln\left(-\ln\frac{i}{10}\right)$	$-0{,}83$	$-0{,}48$	$-0{,}19$	$0{,}09$	$0{,}37$	$0{,}67$	$1{,}03$	$1{,}50$	$2{,}25$
$\ln\left(x_{(i)}\right)$	0,18	0,74	0,74	0,96	1,69	2,13	2,44	2,52	3,66

5 P.

Skizze mit der verlangten Ausgleichsgeraden:



5 P.

c) Berechnung von Steigung und Achsenabschnitt: Gerade durch die Punkte $(-0{,}83|0{,}18)$ und $(2{,}25|3{,}66)$:

Steigung: $\sigma = \dfrac{3{,}66-0{,}18}{2{,}25+0{,}83} = \dfrac{3{,}48}{3{,}08} = 1{,}129$

Achsenabschnitt: $\mu = 3{,}66 - 2{,}25\sigma = 1{,}120$ 5 P.

Verteilungsfunktion für die zugehörige Fréchet-Verteilung:

$$F(x) = P(X \le x) = P(\ln X \le \ln x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{(\ln x)-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$= \exp\left(-e^{\mu/\sigma} x^{-1/\sigma}\right) = \exp\left(-2{,}697\, x^{-0{,}886}\right)$$ 5 P.

für $x > 0$.

d) $\mathrm{OEP}(x) = 1-\varphi_N\left(F(x)\right) = 1-\exp\left(-\lambda\left(1-F(x)\right)\right) = 1-\exp\left(-1{,}8\cdot\left(1-\exp\left(-2{,}697\, x^{-0{,}886}\right)\right)\right)$

5 P.

Bestimmung des VaR(0,005): Löse $\mathrm{OEP}(x) = 0{,}005$; Ergebnis:

$$\mathrm{VaR}(0{,}005) = \left(-\frac{\ln\left(1+\dfrac{\ln 0{,}995}{1{,}8}\right)}{2{,}697}\right)^{-1/0{,}886} = 2342{,}22.$$ 5 P.

Aufgabe 3 (20 Punkte): Es sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ eine geometrische Brown’sche Bewegung mit Drift $\mu \in \mathbb{R}$, Volatilität $\sigma > 0$ und Anfangswert $X_0 > 0$. Zeigen Sie, dass der durch $Y_t := \frac{1}{X_t},\ t \geq 0$ definierte Prozess ebenfalls eine geometrische Brown’sche Bewegung ist, und geben Sie hierfür die Drift und die Volatilität an. Unter welchen Bedingungen an die Parameter sind die Prozesse $\{X_t\}_{t\geq 0}$ und $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ statistisch nicht zu unterscheiden?

Lösung: Je nach Ansatz für die geometrische Brown’sche Bewegung gibt es zwei Lösungsmöglichkeiten:

1. Lösungsweg:

Der Prozess besitzt die Darstellung

$$X_t = X_0 \cdot \exp(\mu t + \sigma B_t),\ t \geq 0$$

mit einem Standard-Wiener-Prozess $\{B_t\}_{t\geq 0}$. 5 P.

Dieser ist auf Grund der Symmetrie der Normalverteilung genau so verteilt wie $\{-B_t\}_{t\geq 0}$, d.h. $\{B_t\}_{t\geq 0}$ und $\{-B_t\}_{t\geq 0}$ sind statistisch nicht unterscheidbar. 5 P.
Ferner gilt:

$$Y_t = \frac{1}{X_t} = \frac{1}{X_0} \cdot \exp\left(-\mu t + \sigma\left(-B_t\right)\right),\ t \geq 0,$$

d.h. $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ ist ebenfalls eine geometrische Brown’sche Bewegung mit Drift $-\mu$, Volatitiltät $\sigma > 0$ und Anfangswert $\frac{1}{X_0}$. 5 P.

Damit $\{X_t\}_{t\geq 0}$ und $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ also statistisch nicht zu unterscheiden sind, muss gelten

$$X_0 = \frac{1}{X_0} \text{ und } \mu = -\mu, \text{ also } X_0 = 1 \text{ und } \mu = 0. \qquad 5 \text{ P.}$$

2. Lösungsweg:

Der Prozess erfüllt die stochastische Differenzialgleichung

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu\, dt + \sigma\, dB_t$$

mit einem Standard-Wiener-Prozess $\{B_t\}_{t\geq 0}$ und der Lösung

$$X_t = X_0 \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right),\ t > 0. \qquad 5\text{P.}$$

Auf Grund der Symmetrie der Normalverteilung ist $\{-B_t\}_{t\geq 0}$ genau so verteilt wie $\{B_t\}_{t\geq 0}$, d.h. $\{B_t\}_{t\geq 0}$ und $\{-B_t\}_{t\geq 0}$ sind statistisch nicht unterscheidbar. 5 P.

Ferner gilt:

$$Y_t = \frac{1}{X_t} = \frac{1}{X_0} \cdot \exp\left(-\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\left(-B_t\right)\right),\ t \geq 0,$$

d.h. $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ ist ebenfalls eine geometrische Brown’sche Bewegung mit Drift $\sigma^2 - \mu$ (!), Volatitiltät $\sigma > 0$ und Anfangswert $\frac{1}{X_0}$. 5 P.

Damit $\{X_t\}_{t\geq 0}$ und $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ also statistisch nicht zu unterscheiden sind, muss gelten

$$X_0 = \frac{1}{X_0},\ \text{also}\ X_0 = 1\ \text{und}\ \ \mu = \frac{\sigma^2}{2}\ (!).$$ 5 P.

Klausur zu „Stochastische Risikomodellierung und statistische Methoden“ (Mai 2008)

Aufgabe 4 (32 Punkte): Gegeben seien: Schadenhöhen von jeweils 3 Schäden, gruppiert nach jeweils 2 Gebäude-Klassen und Gebäudealters-Gruppen:

		Schaden 1	Schaden 2	Schaden 3
Geb.-Kl. 1	Alters-Gr. 1	200	150	250
Geb.-Kl. 1	Alters-Gr. 2	42	128	130
Geb.-Kl. 2	Alters-Gr. 1	390	455	355
Geb.-Kl. 2	Alters-Gr. 2	280	264	356

Ziel ist, die Schadenhöhen mit einem geeigneten GLM zu fitten.

a) Man entscheide sich anhand eines geeigneten Scatter-Plots für eine Varianz-Funktion
(6 Punkte)

b) Welche Verteilung aus der Exponentialfamilie führt zu dieser Varianzfunktion?
(2 Punkte)

c) Wie lautet die kanonische Link-Funktion dieser Verteilung?
(2 Punkte)

d) Man zeichne die möglichen Mittelwert-Plots.
(4 Punkte)

e) Welche Beobachtung führt auf eine sinnvolle Design-Matrix? Man schreibe die Design-Matrix auf und nenne einen sinnvollen Parameter-Vektor und beschreibe die Rolle der Regressoren!
Welchen Schluss lässt die o.a. Beobachtung hinsichtlich der kanonischen Link-Funktion zu (kurze Begründung!)?
(6 Punkte)

f) Man formuliere die Log-Likelihood für die Parameter!
(4 Punkte)

g) Man formuliere die notwendigen Bedingungen für die Lösung der Parameterschätzung!
(4 P unkte)

h) Man leite für die Poisson-Verteilung (unabhängig von der ggf. in den vorigen Aufgaben verwendeten Verteilung!) aus der Darstellung

$$f(y) = \exp\left\{\frac{w}{\Psi}\left[y\vartheta - b(\vartheta)\right] + c\left(y, \frac{\psi}{w}\right)\right\}$$

durch Einsetzen der Funktionen und Größen unter Ausführung aller Teilschritte die übliche Darstellung

$$P(y) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^y}{y!}$$

her!
(4 Punkte)

Lösung

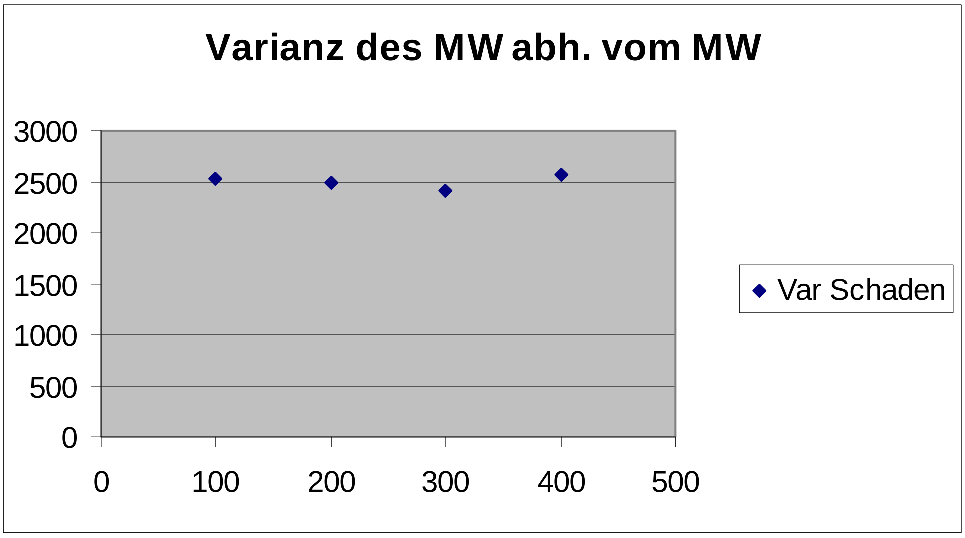
a)

		Schätzer für MW	Varianz d. Schadens
Geb.-Kl. 1	Alters.Gr. 1	200	2500
Geb.-Kl. 1	Alters.Gr. 2	100	2524
Geb.-Kl. 2	Alters.Gr. 1	400	2575
Geb.-Kl. 2	Alters.Gr. 2	300	2416

(Jeweils Volumen 1 je Schaden!)

2 P.

Scatter-Plot Varianz der Mittelwerte gegen Mittelwert in den Zellen 2 P.



Konstante Varianz-Funktion 2 P.

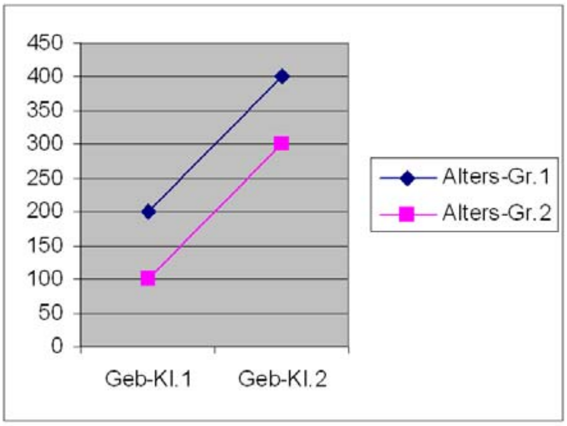
b)

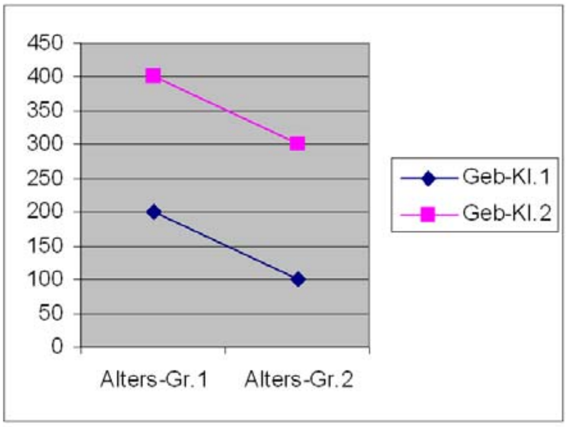
Konstante Varianz-Funktion ==> Normalverteilung 2 P.

c)

Kanonische Link-Funktion der Normalverteilung: Identität 2 P.

d)





4 P.

e)

Parallelität der MW-Plots ==> Keine Wechselwirkungen. Deshalb Design-Matrix

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 P.

Parameter-Vektor $\beta = (a_1, a_2, b_1, b_2)^T$, wobei die a_i die Regressoren für die Effekte der Gebäude-Klassen und die b_j die Regressoren für die Effekte der Gebäude-Altersklassen sind.

2 P.

Die genaue Parallelität (im Unterschied z.B. zu einer Ähnlichkeit) der MW-Plots bestätigt die konstante Link-Funktion.

2 P.

f) Mit n_{ij} = 3 Anzahl der beobachteten Schäden in Zelle ij, $\overline{Y}_{ij}$ Mittelwert der in Zelle ij beobachteten Schäden:

$$l(\beta) = \ln\left(\prod_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\sigma/\sqrt{n_{ij}}\right)}\cdot\exp\left(-\frac{\left(\overline{Y}_{ij}-(a_i+b_j)\right)^2}{2\sigma^2/n_{ij}}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_{ij}\cdot\left(\overline{Y}_{ij}-(a_i+b_j)\right)^2 + const$$

4 P.

g) Notwendige Bedingungen für Maximalität:

$$\frac{dl(\beta)}{da_i} = 0 \qquad \text{für alle i}$$

$$\frac{dl(\beta)}{db_j} = 0 \qquad \text{für alle j , also (bis auf Konstanten)}$$

$$\sum_{j=1}^{2} \overline{Y}_{ij} - (a_i + b_j) = 0 \qquad \text{für alle i}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \overline{Y}_{ij} - (a_i + b_j) = 0 \qquad \text{für alle j}$$

4 P.

h)

Mit $\frac{\Psi}{w} = 1$, $b(\vartheta) = e^{\vartheta}$, $c\left(y, \frac{\Psi}{w}\right) = -\ln(y!)$ gilt:

$$f(y) = \exp\left\{\frac{w}{\Psi}\left[y\vartheta - b(\vartheta)\right] + c\left(y, \frac{\psi}{w}\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{1 \cdot \left[y\vartheta - e^{\vartheta}\right] - \ln(y!)\right\} = \qquad \text{mit } \mu(\vartheta) = e^{\vartheta}\text{, also } \vartheta = \ln(\mu):$$

$$= \exp\{y \cdot \ln(\mu) - \mu - \ln(y!)\} =$$

$$= \{\exp[\ln(\mu)]\}^{y} \cdot \exp(-\mu) \cdot \exp[-\ln(y!)] =$$

$$= e^{-\mu} \frac{\mu^{y}}{y!}$$

4 P.