Aufgabe 1 (30 Punkte)

Gegeben seien folgender Bestand, Todesfälle und Sterbewahrscheinlichkeiten für die Alter 60 bis 64

Alter	Bestand	beobachtete Todesfälle	$q_{1,x}$	$q_{2,x}$
		(1)	(2)	(3)
60	10000	198	0,020	0,015
61	10000	149	0,020	0,015
62	10000	154	0,020	0,015
63	10000	132	0,020	0,015
64	10000	187	0,020	0,015

a) Überprüfen Sie anhand des Vorzeichentests und des Iterationstests auf dem 10%-Niveau, ob die Wahrscheinlichkeiten $q_{1,x}$ und $q_{2,x}$ nicht mehr angemessen sind.
Für die Binomialverteilung gelten folgende Quantile:

Binomialverteilung

Bin(3;0,5)

k	F(k)
0	0,12500
1	0,50000
2	0,87500
3	1,00000

Bin(4;0,5)

k	F(k)
0	0,06250
1	0,31250
2	0,68750
3	0,93750
4	1,00000

Bin(5;0,5)

k	F(k)
0	0,03125
1	0,18750
2	0,50000
3	0,81250
4	0,96875
5	1,00000

Bin(6;0,5)

k	F(k)
0	0,01563
1	0,10938
2	0,34375
3	0,65625
4	0,89063
5	0,98438
6	1,00000

20 Punkte

b) Ein Lebensversicherer bietet eine Rentenversicherung gegen Einmalbeitrag mit Kapitalwahlrecht bei Rentenbeginn nach Vollendung des 65. Lebensjahres an. Die Kapitalleistung bei Rentenbeginn beträgt 1.000€. Bei Tod während der Anwartschaft erlischt jeder Anspruch.
Der Rechnungszins beträgt 1% und die Sterbewahrscheinlichkeiten ergeben sich aus der obigen Tabelle.

Zeigen Sie, dass der Einmalbeitrag im Alter 60 für die Wahrscheinlichkeiten
   i. in Spalte 2 860,01€
   ii. in Spalte 3 882,22€
beträgt.

5 Punkte

c) Nehmen Sie an, dass zusätzlich zu den Versicherungsleistungen unter b) bei Tod die am Ende des Versicherungsjahres ohne Tod zu bildende Deckungsrückstellung ausgezahlt wird.
Zeigen Sie mit Hilfe der Rekursionsformel, dass unabhängig von den Sterbewahrscheinlichkeiten der Einmalbeitrag 951,50 € beträgt.

5 Punkte

Lösungsvorschlag Aufgabe 1

Teilaufgabe a)

Hypothese (H_0) und Alternative (H_1) lauten:

H_0:	Die tatsächlichen und die rechnungsmäßig unterstellten Sterbewahrscheinlichkeiten stimmen überein.
H_1:	Die tatsächlichen und die rechnungsmäßig unterstellten Sterbewahrscheinlichkeiten sind verschieden.

Vorzeichentest:

Bezeichne

Z_x die Anzahl der tatsächlichen Todesfälle im Alter x

E_x die Anzahl der erwarteten Todesfälle im Alter x

Die Teststatistik lautet $T = \sum_{x=60}^{64} 1_{\{Z_x > E_x\}}$.

Unter der Nullhypothese gilt $T \sim Bin(5, \frac{1}{2})$. Als kritischer Wert ergibt sich daher mithilfe der Bedingung

$$2 \cdot P(T < n_\alpha) = 2 \cdot \sum_{j=0}^{n_\alpha - 1} \binom{5}{j} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-j} \overset{!}{\leq} 0{,}1$$

$n_\alpha = 1$ und damit der Verwerfungsbereich $B = \{0\} \cup \{5\}$.

Fall $q_{1,x}$ (Spalte 2)

Wie man der Tabelle entnehmen kann, ergibt sich hier 0 als Wert der Teststatistik.

Da $0 \in B$ wird die Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von α = 10 % abgelehnt.

Fall $q_{2,x}$ (Spalte 3)

Wie man der Tabelle entnehmen kann, ergibt sich hier 3 als Wert der Teststatistik.

Da $3 \notin B$ ist, kann die Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von α = 10 % nicht abgelehnt werden.

Iterationstest:

Die Teststatistik lautet $T = \sum_{x=61}^{64} 1_{\{Sign(Z_x - E_x) \neq Sign(Z_{x-1} - E_{x-1})\}}$, unter Gültigkeit der Nullhypothese gilt $T \sim Bin(4, \frac{1}{2})$.

Aus der Bedingung

$$P(T < n_\alpha) = \sum_{j=0}^{n_\alpha - 1} \binom{4}{j} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-j} \overset{!}{\leq} 0{,}1$$

erhalten wir als kritischen Wert $n_\alpha = 1$ und damit als Verwerfungsbereich $B = \{0\}$.

Fall $q_{1,x}$ (Spalte 2)

Wie man der Tabelle entnehmen kann, ergibt sich hier 0 als Wert der Teststatistik.

Da $0 \in B$ ist, wird die Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von α = 10 % abgelehnt.

Fall $q_{2,x}$ (Spalte 3)

Wie man der Tabelle entnehmen kann, ergibt sich hier 4 als Wert der Teststatistik.

Da $4 \notin B$ kann die Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von α = 10 % nicht abgelehnt werden.

Teilaufgabe b)

Da bei Tod vor Vollendung des Alters 65 keine Leistung fällig wird, ist der Einmalbeitrag als Erwartungswert der Kapitalsumme von 1000€ mit Abzinsung zu ermitteln.

Die Wahrscheinlichkeit w, das Alter 65 zu vollenden, ist die Überlebenswahrscheinlichkeit eines 60-Jährigen bis zum Alter 65:

$$w = \prod_{k=60}^{64} (1 - q_k)$$

Der Faktor f für die Abzinsung mit Rechnungszins i auf den Versicherungsbeginn beträgt mit der Schreibweise $v = \frac{1}{1+i}$

$$f = v^{65-60}$$

Dann beträgt der Einmalbeitrag B

$$B = 1000 \cdot w \cdot f$$

i. **Wahrscheinlichkeiten $q_{1,x}$ gem. Spalte 2**

$$B_1 = v^5 \cdot \prod_{k=60}^{64} (1 - q_{1,k}) \cdot 1000 = 0{,}9515 \cdot (1 - 0{,}02)^5 \cdot 1000 = 0{,}9515 \cdot 0{,}9039 \cdot 1000$$
$$B_1 = 860{,}01$$

ii. **Wahrscheinlichkeiten $q_{2,x}$ gem. Spalte 3**

$$B_2 = v^5 \cdot \prod_{k=60}^{64} (1 - q_{2,k}) \cdot 1000 = 0{,}9515 \cdot (1 - 0{,}015)^5 \cdot 1000 = 0{,}9515 \cdot 0{,}9272 \cdot 1000$$
$$B_2 = 882{,}23$$

Teilaufgabe c)

Nach der Rekursionsformel für die Deckungsrückstellung gilt

$$V_x = -P_x + v \cdot R \cdot q_x + v \cdot V_{x+1} \cdot (1 - q_x)$$

hierbei bezeichnen

V_x	Deckungsrückstellung am Anfang des Versicherungsjahres (Alter x)
V_{x+1}	Deckungsrückstellung am Ende des Versicherungsjahres (Alter x+1)
P_x	Prämie, jährlich vorschüssig
R_x	Versicherungsleistung, fällig am Ende des Versicherungsjahres
v	$= \frac{1}{1+i}$ Diskontfaktor
q_x	Sterbewahrscheinlichkeit des Versicherten

Da es sich um eine Versicherung gegen Einmalbeitrag handelt, ist $P_x = 0$ für $x>60$.

Bei Tod des Versicherten im Alter x in der Anwartschaftsphase wird die Deckungsrückstellung V_{x+1} am Ende des Versicherungsjahres ausgezahlt. Es gilt also $R_x = V_{x+1}$.

Dann gilt

$$V_x = v \cdot V_{x+1} \cdot q_x + v \cdot V_{x+1} \cdot (1 - q_x) = v \cdot V_{x+1}$$

Da für V_{x+1} und V_{x+2} derselbe Zusammenhang gilt, folgt mit $V_{65} = 1000$:

$$B = V_{60} = v^{(65-60)} \cdot V_{65} = v^{(65-60)} \cdot 1000 = 0{,}9515 \cdot 1000 = 951{,}50$$

Der Einmalbeitrag ist also unabhängig von den Sterbewahrscheinlichkeiten in der Anwartschaftsphase.

Aufgabe 2 (30 Punkte)
In einem Sachversicherungstarif gebe es drei Rabatt-Stufen S_1, S_2 und S_3. Der Verbleib eines Risikos in einer Stufe bzw. der Übergang von einer Stufe in eine andere bemesse sich nach der Anzahl der gemeldeten Jahresschäden des abgelaufenen Jahres, die Neueinstufung finde jeweils zum Jahresende statt. Die Eingangsstufe sei S_1. Die Wahrscheinlichkeiten $P(S_i \to S_j)$ der Übergänge von Stufe S_i nach Stufe S_j seien unabhängig vom Kalenderjahr und der Versicherungsdauer. Es gelte

$$P(S_1 \to S_1) = 0{,}8,\ P(S_1 \to S_2) = 0{,}2,\ P(S_2 \to S_1) = 0{,}1,$$
$$P(S_2 \to S_2) = 0{,}5,\ P(S_3 \to S_1) = 0,\ P(S_3 \to S_2) = 0{,}2.$$

a. Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne X_k die Zugehörigkeit eines Risikos zu einer der Rabatt-Stufen im Jahr k. Begründen Sie, warum es sich bei $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ um eine homogene Markov-Kette vom Typ I handelt. **(2 P)**
b. Stellen Sie die zugehörige Übergangsmatrix Π auf. **(3 P)**
c. Untersuchen Sie das Langzeitverhalten der Markov-Kette $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Welche anschauliche Bedeutung hat dieses Verhalten? **(15 P)**
d. Die Anzahl der Schäden pro Jahr eines Risikos in dem betrachteten Tarif sei ein homogener Poisson-Prozess. In den vergangenen 5 Jahren wurden die Schadenanzahlen 5, 7, 10, 4 und 5 registriert. Bestimmen Sie daraus einen Schätzwert für den Parameter λ des Poisson-Prozesses. **(2 P)**
e. Der Poisson-Prozess mit dem geschätzten Parameter aus Teil d. soll mit der Monte-Carlo-Methode simuliert werden. Dazu werden die Zwischenankunftszeiten zwischen aufeinander folgenden Schadenereignissen simuliert. Welcher Verteilung genügen diese Zwischenankunftszeiten? Geben Sie einen einfachen Simulationsalgorithmus an. Wie heißt die von Ihnen genannte Methode? **(5 P)**
f. Welche simulierten Schadenzeitpunkte ergeben sich auf Basis der Methode aus Teil e., wenn die folgenden 5 Zufallszahlen aus einer U(0,1)-Verteilung gegeben sind? **(3 P)**

0,059 0,354 0,422 0,493 0,886

Lösungsvorschlag Aufgabe 2

a. Laut Aufgabentext hängen die Wahrscheinlichkeiten der Übergänge nur an den Schadenzahlen des aktuellen Jahres und der aktuellen Rabatt-Stufe. Die Zahlen bzw. die belegten Stufen der Vorjahre spielen keine Rolle. Damit ist die Gedächtnislosigkeit gegeben. Da die Wahrscheinlichkeiten für jedes Jahr gleich sind, ist die Kette zeitunabhängig und daher homogen. Der Zustandsraum ist $S = \{S_1, S_2, S_3\}$, also abzählbar, somit ist die Kette vom Typ I.
b. Die Matrix besteht aus den Übergangswahrscheinlichkeiten. In der i-ten Zeile stehen die $P(S_i \to S_j)$. Die fehlenden Werte müssen so gewählt werden, dass jede Zeilensumme gleich Eins ergibt:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

c. Es sind die Eigenwerte der Matrix Π zu bestimmen. Mit der Regel von Sarrus ergibt sich für das charakteristische Polynom

$$\det\begin{pmatrix} 0{,}8-\lambda & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5-\lambda & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (0{,}8-\lambda)^2 \cdot (0{,}5-\lambda) - 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot (0{,}8-\lambda) - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot (0{,}8-\lambda)$$
$$= (0{,}8-\lambda) \cdot \big((0{,}8-\lambda) \cdot (0{,}5-\lambda) - 0{,}1\big)$$

Eine Nullstelle ist 0,8, die anderen ergeben sich aus der quadratischen Gleichung

$$(0{,}8-\lambda) \cdot (0{,}5-\lambda) - 0{,}1 = 0,$$

und lauten 0,3 und 1. Die Voraussetzungen des Konvergenzsatzes (Kapitel 9.1 im Skript) sind damit erfüllt (nur ein Eigenwert mit Betrag 1 und alle Eigenwerte verschieden). Daher konvergiert die Folge Π^k bei $k \to \infty$ und die Markov-Kette damit gegen einen stationären Zustand, unabhängig vom Anfangszustand. Anschaulich bedeutet das, dass auf lange Sicht die Verteilung der Risiken des Bestandes auf die drei Rabatt-Stufen konstant ist.

d. Da der Parameter λ den Erwartungswert der Anzahl der Schäden eines Jahres angibt, ist ein Schätzer durch das arithmetische Mittel der beobachteten Schadenzahlen gegeben, also

$$\hat{\lambda} = \frac{5+7+10+4+5}{5} = 6{,}2.$$

e. Die Zwischenankunftszeiten Z folgen einer Exponentialverteilung $Exp(\lambda)$ mit dem Parameter λ des Poisson-Prozesses. Eine Exponentialverteilung kann mittels der Inversionsmethode simuliert werden: Ist F die Verteilungsfunktion von Z, dann ist $F^{-1}(U)$ verteilt wie Z. Der Algorithmus lautet also:

   i. Erzeuge eine $U(0{,}1)$-verteilte Zufallszahl u
   ii. Berechne $x = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(u)$

f. Für u werden die fünf gegebenen Zufallszahlen in den Algorithmus eingesetzt, für λ der Schätzwert 6,2 aus Teil d. Es ergibt sich

$$x_1 = 0{,}456, \quad x_2 = 0{,}167, \quad x_3 = 0{,}139, \quad x_4 = 0{,}114, \quad x_5 = 0{,}02$$

Aufgabe 3

Es sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f(x) = \alpha(1+x)^{-(1+\alpha)}, x > 0$ und Parameter $\alpha > 0$.

a) Zeigen Sie, dass $Y := \ln(1+X)$ exponentialverteilt $\mathcal{E}(\alpha)$ ist und bestimmen Sie *E(Y)*.

b)

i. Gehört *X* zu einer Exponentialfamilie? Begründen Sie Ihre Antwort.

ii. Bestimmen Sie gegebenenfalls den natürlichen Parameter η und $b(\eta)$.

iii. Geben Sie mit Begründung die Zufallsvariable an, deren Erwartungswert mit $b'(\eta)$ bestimmt wird.

c) Gegeben sei eine Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ aus unabhängigen Realisierungen von *X* mit *n*=21 und $\ln(\prod_{i=1}^n (1+x_i)) = 8{,}4$. Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\hat{\alpha} = \frac{n}{\ln(\prod_{i=1}^n (1+X_i))}$ ein ML-Schätzer für α ist.

i. Überprüfen Sie rechnerisch mit Hilfe des Likelihood-Quotiententests (LQT) die Hypothese $H_0: \alpha = 2$ zum Signifikanzniveau von 5 %.

ii. Bestimmen Sie mit Hilfe des LQT näherungsweise (verwenden Sie hierfür nur die folgende Abbildung) ein Schätzintervall zum Niveau von 95 % für α. Begründen Sie weshalb die Abbildung verwendet werden kann!

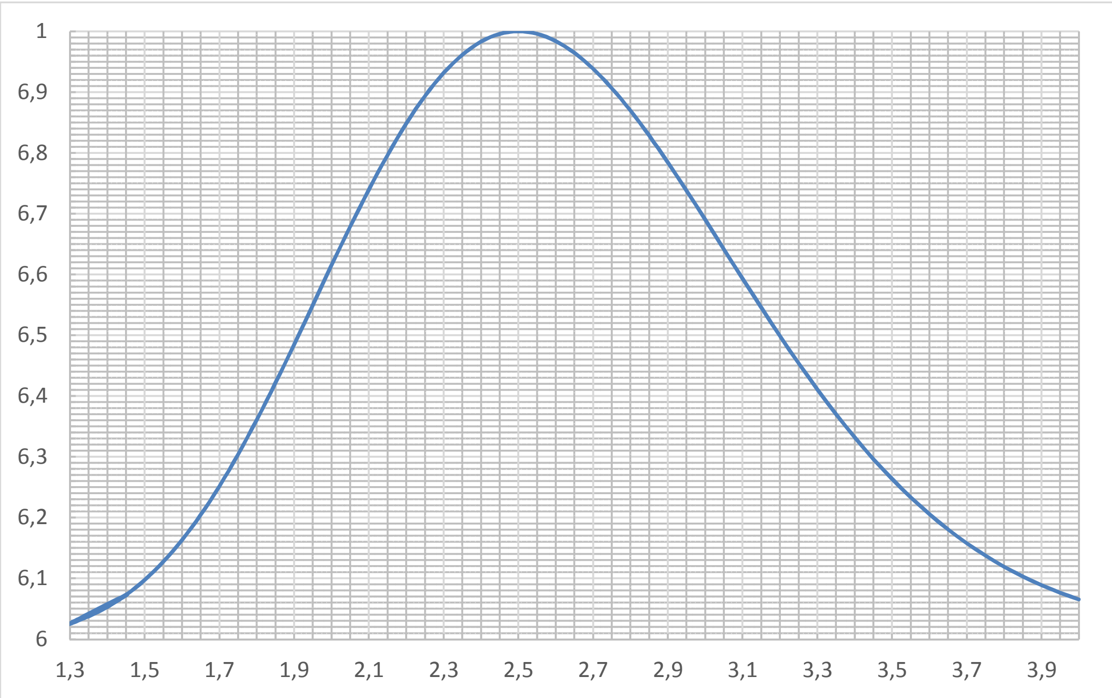

Abbildung der Fuktion $x \mapsto \left(\frac{x}{2{,}5}\right)^{21} \cdot 4447{,}07^{2{,}5-x}$

d)

i. Bestimmen Sie die Informationsmatrix $I(\alpha)$ von *X*.

ii. Bestimmen Sie mit Hilfe der asymptotischen Normalverteilung für den ML-Schätzer $\hat{\alpha}$ ein Schätzintervall für α zum Niveau von 95 % mit den Daten aus c).

Quantile der χ^2_n-Verteilung

p	0,9	0,95	0,975	0,99
1	2,71	3,84	5,02	6,64
2	4,60	5,99	7,38	9,21
20	28,41	31,41	34,17	37,57
21	29,62	32,67	35,48	38,93

Quantile von N(0,1)

0,9	0,95	0,975	0,99
1,28	1,64	1,96	2,33

ii.

Lösungsvorschlag Aufgabe 3

a) Die Verteilungsfunktion F von X ist gegeben durch $F(x) = 1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^{\alpha}, x > 0$. Damit gilt $P(Y \le y) = P(\ln(X+1) \le y) = P(X \le -1 + \exp y) = 1 - \left(\frac{1}{\exp y}\right)^{\alpha} = 1 - e^{-\alpha y}$ und somit folgt die Behauptung.

b) Zu i. und ii. Durch Umformung der Dichte f ergibt sich

$$f(x) = \exp(\ln \alpha - (1+\alpha)\ln(1+x)) = \exp(-\alpha \ln(1+x) - (-\ln \alpha) - \ln(1+x)).$$

Damit gehört X zu einer Exponentialfamilie mit natürlichem Parameter $\eta := -\alpha < 0$, $b(\eta) := -\ln(-\eta)$ und $t(x) = \ln(1+x)$.

Zu iii. Es gilt $b'(\eta) = -\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\alpha} = E\big(t(X)\big) = E(\ln(1+X))$, das Ergebnis passt zu a).

c) Zu i. Nach Folienskript ergibt sich für $x := (x_1, \dots, x_n), \alpha_0 := 2$ und $\hat{\alpha} = \frac{21}{8{,}4} = 2{,}5$

$$\lambda(x) = \frac{L(\alpha_0, x)}{L(\hat{\alpha}, x)} = \frac{\alpha_0^n \prod(1+x_i)^{-1-\alpha_0}}{\hat{\alpha}^n \prod(1+x_i)^{-1-\hat{\alpha}}} = \left(\frac{\alpha_0}{\hat{\alpha}}\right)^n \left(\prod(1+x_i)\right)^{\hat{\alpha}-\alpha_0} = \left(\frac{2}{2{,}5}\right)^{21} (e^{8{,}5})^{0{,}5}$$
$$= 0{,}646\,.$$

Wegen $\exp\left(-\frac{\chi^2_{1,\frac{95}{100}}}{2}\right) = \exp\left(-\frac{3{,}84}{2}\right) = 0{,}146 < 0{,}646$ wird die Nullhypothese nicht verworfen.

Zu ii. In der Graphik dargestellt ist die relative Likelihood, denn es gilt:

$$\tilde{L}(\alpha) = \frac{L(\alpha, x)}{L(\hat{\alpha}, x)} = \frac{\alpha^n \prod(1+x_i)^{-1-\alpha}}{\hat{\alpha}^n \prod(1+x_i)^{-1-\hat{\alpha}}} = \left(\frac{\alpha}{2{,}5}\right)^n \left(\prod(1+x_i)\right)^{2{,}5-\alpha} = \left(\frac{\alpha}{2{,}5}\right)^{21} (e^{8{,}5})^{2{,}5-\alpha}$$
$$= \left(\frac{\alpha}{2{,}5}\right)^{21} 4447{,}07^{2{,}5-\alpha}$$

Die Schnittpunkte von $y = 0{,}146$ mit dem Graphen ergeben in etwa das Schätzintervall [1,55 ; 3,72].

d) Zu i. Mit $\ell(\alpha) := \ell(\alpha, X) := \ln(\alpha(1+X)^{-(1+\alpha)}) = \ln\alpha - (1+\alpha)\ln(1+X)$ folgt $\ell'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \ln(1+X)$, $\ell''(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2}$ und somit $I(\alpha) = E\big(-\ell''(\alpha, X)\big) = \frac{1}{\alpha^2}$.

Zu ii. Es gilt asymptotisch $\hat{\alpha} \sim N\left(\alpha, \frac{1}{nI(\alpha)}\right) = N\left(\alpha, \frac{\alpha^2}{n}\right)$. Hier ist $n = 21$. Wenn man $\hat{\alpha} = 2{,}5$ für α einsetzt ergib sich mit dem 97,5 %-Quantil der Standardnormalverteilung $u_{0{,}975} = 1{,}96$ das approximative Schätzintervall $\left[2{,}5 - 1{,}96 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{21}}, 2{,}5 + 1{,}96 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{21}}\right] = [1{,}43; 3{,}57]$. Im Gegensatz zu c) ist es symmetrisch aber ähnlich breit.

Aufgabe 4:

In einem Kollektiv von Haftpflichtversicherten mit den Tarifmerkmalen Region (1 oder 2) und Alter wurden Schadenbeobachtungen gemacht, die in folgender Tabelle angedruckt sind:

Versicherungsnehmer	Region	Alter	Jahresgesamtschaden
1	1	35	0,2
2	2	40	0,5
3	2	25	0,1
4	1	50	0,6
…	…	…	…

Der Jahresgesamtschaden X jedes Versicherungsnehmers (gemessen in 1.000 EUR) folge dabei einer Exponentialverteilung mit Dichte $f_X(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda x)$ und einem von den Tarifmerkmalen des jeweiligen Versicherungsnehmers abhängigen Strukturparameter $\lambda > 0$.

a) Zeigen Sie, dass man die Exponentialverteilung innerhalb der Familie der verallgemeinerten linearen Modelle

$$f(x) = \exp\left(\frac{w}{\psi}\big(x\theta - b(\theta)\big) + c(x, \psi/w)\right)$$

mit $b(\theta) = -\ln(-\theta)$ sowie $\theta = -\lambda$ und $w = \psi = 1$ erhält.

b) Berechnen Sie aus $b(\cdot)$ die zugehörige kanonische Linkfunktion $g(\mu) = \pm(b')^{-1}(\mu)$. Das Vorzeichen soll dabei so gewählt werden, dass $g(\mu) > 0$.

c) Der Aktuar passt mit Hilfe einer statistischen Software ein verallgemeinertes lineares Modell an und erhält folgendes Ergebnis.

<table>
<tr><td><u>Modellspezifikation</u>
Verteilung: Exponential
Linkfunktion: kanonisch</td><td><u>Beobachtungen</u>
$\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}6 \\ \vdots \end{pmatrix}$</td><td><u>Designmatrix</u>
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 35 \\ 1 & 1 & 40 \\ 1 & 1 & 25 \\ 1 & 0 & 50 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="3"><u>Schätzergebnis Regressionsparameter</u>
Achsenabschnitt $\beta_1 = 0{,}50000$
Region (diskret) $\beta_2 = 0{,}75000$
Alter (stetig) $\beta_3 = 0{,}01875$</td></tr>
</table>

Berechnen Sie den sich daraus ergebenden Schätzer für den Erwartungswert $E(X)$ des Jahresgesamtschadens für einen 80-jährigen Versicherungsnehmer aus Region 1.

d) In den folgenden Teilaufgaben wird das Segment der 80-jährigen Versicherungsnehmer aus Region 1 betrachtet. Bei der Anpassung des verallgemeinerten linearen Modells lagen in diesem Segment noch keine Beobachtungsdaten vor. Um der daraus resultierenden Unsicherheit Rechnung zu tragen, betrachtet der Aktuar ein Credibility-Modell, bei dem der Strukturparameter λ im betrachteten Segment Realisierung einer Zufallsvariable Λ mit Dichte $f_\Lambda(\lambda) = a \cdot \lambda^{-2}$ für $\lambda \geq a$ ist.

Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X) = E(E(X|\Lambda))$ des Jahresgesamtschadens und bestimmten Sie den Parameter a so, dass sich für $E(X)$ der Wert aus Aufgabenteil c) ergibt.

e) Zwischenzeitlich wurden im betrachteten Segment die unabhängigen Realisierungen $x_1 = 0{,}2; x_2 = 0{,}1; x_3 = 0{,}6$ und $x_4 = 0{,}1$ von X beobachtet. Berechnen Sie mit diesen Beobachtungen und mit dem oben ermittelten Wert von a die Dichte $f_\Lambda(\lambda \mid \mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n))$ der Verteilung des Strukturparameters bei gegebenen Beobachtungswerten.
Hinweis: Ohne Beweis können Sie verwenden, dass $\int_a^\infty x^2 \cdot \exp(-x)\, dx = (a^2 + 2a + 2) \cdot \exp(-a)$.

f) Ermitteln Sie die zugehörige (allgemeine) Credibility-Prämie H^*.

Hinweis: Ohne Beweis können Sie verwenden, dass $\int_a^\infty x \cdot \exp(-x)\, dx = (a + 1) \cdot \exp(-a)$.

Lösungsvorschlag Aufgabe 4

a) Durch Einsetzen der gegebenen Werte ergibt sich mit $c := 0$ die Dichte der Exponentialverteilung:
$$\exp\left(\frac{w}{\psi}\big(x\theta - b(\theta)\big) + c(x, \psi/w)\right) = \exp\Big(\big(-x\lambda + \ln(\lambda)\big) + 0\Big) = \lambda \cdot \exp(-\lambda x).$$

(3 Punkte)

b) Aus der Gleichung $b'(\theta) = -\frac{1}{\theta} = \mu$ ergibt sich $g(\mu) = \mp\frac{1}{\mu}$. Das Vorzeichen wird dabei so gewählt, dass $g(\mu) = \frac{1}{\mu} > 0$.

(3 Punkte)

c) Der lineare Prädiktor ist $0{,}5 \cdot 1 + 0{,}01875 \cdot 80 = 2$. Somit schätzt man den Erwartungswert durch $E(X) = g^{-1}(2) = 1/2$.

(3 Punkte)

d) Wegen der Exponentialverteilung ist $E(X|\Lambda) = \frac{1}{\Lambda}$, und es gilt
$$E(X) = E(E(X|\Lambda)) = E\left(\frac{1}{\Lambda}\right) = \int_a^\infty \frac{1}{\lambda} f_\Lambda(\lambda) d\lambda = a \int_a^\infty \lambda^{-3} d\lambda = a \cdot \frac{a^{-2}}{2} = \frac{1}{2a}.$$

Für $a = 1$ ergibt sich der Wert $E(X) = 1/2$, wie im Aufgabenteil b).

(5 Punkte)

e) Für den Zähler der a-posteriori Dichte gilt
$$f_\Lambda(\lambda) \cdot \prod_{i=1}^n f_X(x_i|\Lambda = \lambda) = a \cdot \lambda^{-2} \cdot \lambda^n \cdot \exp\left(-\lambda \cdot \sum_{i=1}^n x_i\right)$$

$= a \cdot \lambda^{n-2} \cdot \exp(-\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i) = 1 \cdot \lambda^{4-2} \cdot \exp(-\lambda \cdot 1) = \lambda^2 \cdot \exp(-\lambda)$

für $\lambda \geq 1$. Den Nenner berechnet man aus

$$\int_1^\infty \lambda^2 \cdot exp(-\lambda) d\lambda = 5 \cdot \exp(-1).$$

Insgesamt ergibt sich

$$f_\Lambda(\lambda \mid \mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)) = \frac{\exp(1)}{5} \cdot \lambda^2 \cdot \exp(-\lambda).$$

(9 Punkte)

f) Es ist $H(\lambda) = E(X|\Lambda = \lambda) = 1/\lambda$, so dass

$$H^* = E(H(\Lambda)|\mathbf{X}) = E(\Lambda^{-1}|\mathbf{X}) = \int_1^\infty \frac{1}{\lambda} f_\Lambda(\lambda \mid \mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n))\, d\lambda$$

$$= \frac{\exp(1)}{5} \int_1^\infty \lambda \cdot \exp(-\lambda)\, d\lambda = \frac{\exp(1)}{5} \cdot 2 \exp(-1) = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

(7 Punkte)