Prüfung Finanzmathematik und Investmentmanagement 2014

Aufgabe 1: (24 Minuten)

a) Gegeben seien zwei Aktien mit zugehörigen Einperiodenrenditen R_1 und R_2. Es gelte $-1 < \rho(R_1, R_2) < 1$. Welchen Wert muss $\mathrm{Cov}(R_1, R_2)$ annehmen, damit für das (global) varianzminimale Portfolio $(x_0, 1 - x_0)$ aus den beiden Aktien $x_0 = 1/3$ gilt? (8 min)

b) Gegeben seien drei Aktien A, B und C. Man fixiere den Erwartungswert der Portfoliorendite R_P, d.h. es gilt $E(R_P) = r$. Auf der Basis einer Lagrange-Optimierung ergeben sich die folgenden Investmentgewichte des korrespondierenden (lokal) varianzminimalen Portfolios:

$$x_A = 1/3,\ x_B = 4/3 - 5r,\ x_C = 5r - 2/3.$$

Für welche Werte von r ist der Ausschluss von Leerverkäufen (Nichtnegativitätsbedingung) gewährleistet? (4 min)

c) Nehmen Sie an, dass R lognormalverteilt ist, $\ln R \sim N(\mu, \sigma^2)$. Bestimmen Sie die zu der Shortfallrestriktion

$$P(R \le z) = \varepsilon$$

äquivalente Shortfallgerade, wobei μ als Funktion von σ darzustellen ist. (5 min)

Hinweis: $N_\varepsilon = -N_{1-\varepsilon}$, wobei $N_{1-\varepsilon}$ das (1–ε)-Quantil der Standardnormalverteilung bezeichne.

d) Der effiziente Rand bei Existenz einer sicheren Anlage lautet allgemein

$$\mu = r_0 + \sqrt{h + SR_{MVP}^2} \cdot \sigma .$$

Dabei bezeichne r_0 die sichere Verzinsung und SR_{MVP} die Sharpe Ratio des varianzminimalen Portfolios.

Gehen Sie aus von einer Mindestrendite $z < r_0$ und bestimmen Sie für die vorliegende Konstellation das optimale Portfolio unter der Shortfallrestriktion $(0 < \alpha < 1)$

$$P(R_P \le z) = \alpha \ .$$

Dabei bezeichne R_P die einperiodige Portfoliorendite eines rein riskanten Portfolios. R_P sei normalverteilt, d.h. $R_P \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Fertigen Sie eine Skizze der Situation im (σ,μ)-Raum an! Unter welcher Bedingung existiert ein optimales Portfolio? Bestimmen Sie die Rendite-Standardabweichung des optimalen Portfolios sowie dessen erwartete Rendite! (7 min)

Lösungsskizze:

a) Es bezeichne $R = x\,R_1 + (1-x)\,R_2$ die Rendite eines beliebigen Portefeuilles. Es bezeichnen ferner $\sigma^2 = \mathrm{Var}(R)$, $\sigma_1^2 = \mathrm{Var}(R_1)$, $\sigma_2^2 = \mathrm{Var}(R_2)$. Es gilt damit:

$$\sigma^2 = \sigma^2(x) = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\mathrm{Cov}(R_1,R_2).$$

i) Bestimmung der varianzminimalen Position:

$$0 = \frac{d\sigma^2}{dx} = 2x\sigma_1^2 - 2(1-x)\sigma_2^2 + 2\mathrm{Cov}(R_1,R_2) - 4x\mathrm{Cov}(R_1,R_2)$$

Es folgt:

$$2x\sigma_1^2 + 2x\sigma_2^2 - 4x\mathrm{Cov}(R_1,R_2) = 2\sigma_2^2 - 2\mathrm{Cov}(R_1,R_2)$$

und damit:

$$x_0 = \frac{\sigma_2^2 - \mathrm{Cov}(R_1,R_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mathrm{Cov}(R_1,R_2)} \;.$$

Aus der Vorgabe $x_0 = 1/3$ resultiert hieraus

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mathrm{Cov}(R_1,R_2) = 3\sigma_2^2 - 3\mathrm{Cov}(R_1,R_2)$$

und damit

$$\mathrm{Cov}(R_1,R_2) = 2\sigma_2^2 - \sigma_1^2$$

b) Es muss gelten $x_A \geq 0,\ x_B \geq 0$ sowie $x_C \geq 0$.

Für x_A ist dies erfüllt. Weiter gilt:

$$x_B \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad r \leq 4/15$$

$$x_C \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad r \geq 2/15.$$

Damit ist die Nichtnegativitätsbedingung für $2/15 \leq r \leq 4/15$ gewährleistet.

c) Annahme : $\ln R \sim N(\mu,\sigma^2)$

Hieraus folgt :

$$\varepsilon = P(R \leq z) = P(\ln R \leq \ln z)$$
$$= P\left(\frac{\ln R - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln z - \mu}{\sigma}\right)$$

Es gilt damit :

$$\frac{\ln z - \mu}{\sigma} = N_{\varepsilon} = -N_{1-\varepsilon}$$

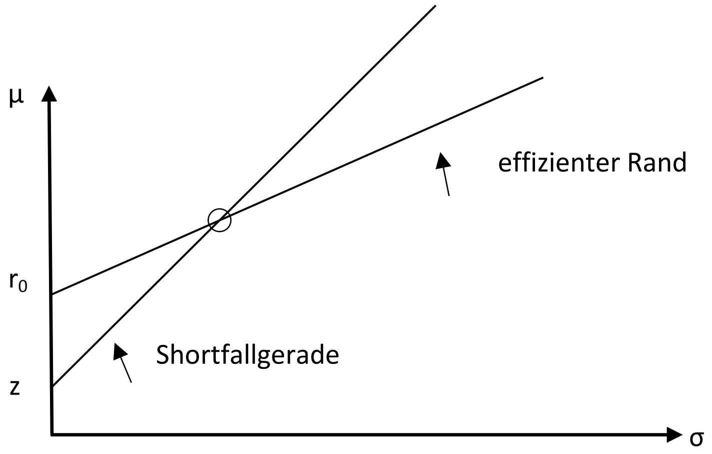
bzw.

$$\ln z - \mu = -N_{1-\varepsilon}\sigma$$

und damit insgesamt

$$\mu = \ln z + N_{1-\varepsilon}\sigma.$$

d) Skizze der Situation



Der effiziente Rand ist gegeben durch

$$\mu = r_0 + \sqrt{h + SR_{MVP}^2} \cdot \sigma \ .$$

Die Shortfallgerade ist gegeben durch

$$\mu = z + N_{1-\alpha}\,\sigma \ .$$

<u>Geometrischer Ansatz für die Existenz einer Lösung:</u>

Da $z < r_0$ vorausgesetzt ist, existiert ein Schnittpunkt nur, wenn die Steigung der Shortfallgeraden höher ist als die Steigung des effizienten Randes, d.h. die Bedingung

$$\sqrt{h + SR_{MVP}^2} < N_{1-\alpha}$$

bzw.

$$h + SR_{MVP}^2 < N_{1-\alpha}^2$$

erfüllt ist.

Es gilt dann

$$z + N_{1-\alpha}\sigma = r_0 + \sqrt{h + SR_{MVP}^2} \cdot \sigma$$

und damit

$$(N_{1-\alpha} - \sqrt{h + SR^2_{MVP}})\,\sigma = r_0 - z \ .$$

Für die Standardabweichung σ_{OPT} des optimalen Portfolios ergibt sich somit

$$\sigma_{OPT} = \frac{r_0 - z}{N_{1-\alpha} - \sqrt{h + SR^2_{MVP}}}$$

und die erwartete Rendite μ_{OPT} des optimalen Portfolios ist gegeben durch

$$\mu_{OPT} = r_0 + \sqrt{h + SR^2_{MVP}}\,\sigma_{OPT}$$

bzw. äquivalent durch

$$\mu_{OPT} = z + N_{1-\alpha}\sigma_{OPT} \ .$$

<u>Analytischer Ansatz für die Existenz einer Lösung:</u>

Es muss gelten $\sigma_{OPT} > 0$; da $z < r_0$ ist dies äquivalent zu

$$N_{1-\alpha} - \sqrt{h + SR^2_{MVP}} > 0$$

bzw. zu

$$N_{1-\alpha} > \sqrt{h + SR^2_{MVP}} \ .$$

<u>Aufgabe 2:</u> (26 Minuten)

a) Betrachten Sie den stochastischen Prozess $(t \geq 0, n \in N)$

$$V_t = S_t^n,$$

wobei S_t einer Geometrischen Brownschen Bewegung folgt.

Wie lautet die stochastische Differentialgleichung dieses Prozesses in kanonischer Form (d.h. Darstellung von Drift und Diffusion als Funktionen von V_t)? (8 min)

b) Gegeben seien eine Aktie, deren Kursprozess einer Geometrischen Brownschen Bewegung $\{S_t\}$ folgt sowie eine sichere Anlage mit Wertentwicklung exp(rt). Betrachten Sie nun einen Call auf diese Aktie, dessen Wertentwicklung der funktionalen Beziehung $C_t = F(t, S_t)$ genügt.

i) Wie lautet in diesem Falle das Black/Scholes-Hedgeportfolio?
ii) Bestimmen Sie die Drift sowie die Diffusion des Hedgeportfolios!
iii) Unter welcher Bedingung erreicht man, dass das Hedgeportfolio eine momentane Variation (Diffusion) in Höhe von null aufweist? Welche Rolle spielt hierbei das Call-Delta? (12 min)

c) Betrachten Sie den stochastischen Prozess

$$X_t = \frac{1}{2}\left(W_t^2 - t\right),$$

wobei W_t den Standard-Wienerprozess bezeichne.

Wie lautet die stochastische Differentialgleichung von $\{X_t\}$? (6 min)

<u>Hinweis:</u> Eine Darstellung in kanonischer Form ist hier nicht erforderlich.

<u>Lösungsskizze:</u>

a) Transformationsfunktion: $F(x) = x^n$

$F_t = 0, \quad F_x = nx^{n-1}, \quad F_{xx} = n(n-1)x^{n-2}$

Ito:

$$\mu_V = F_t + F_x\mu_S + \frac{1}{2}F_{xx}\sigma_S^2$$

$$\sigma_V = F_x\sigma_S\,,$$

wobei für die Geometrische Brownsche Bewegung

$\mu_S = \mu x$ und $\sigma_S = \sigma x$

gilt.

Damit:

$$\mu_V = n\,x^{n-1}\mu\,x + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}\sigma^2 x^2$$

$$= n\left[\mu + \frac{1}{2}(n-1)\,\sigma^2\right]x^n$$

$$\sigma_V = n\,x^{n-1}\sigma\,x = n\,\sigma\,x^n$$

Korrespondierende stochastische Differentialgleichung in kanonischer Form:

$$dV_t = n\left[\mu + \frac{1}{2}(n-1)\sigma^2\right]V_t\,dt + n\,\sigma\,V_t\,dW_t$$

b)

i) Hedgeportfolio:

$$V_t = S_t + q(t)C_t = S_t + q(t)\,F(t,S_t)$$

ii) Korrespondierende Transformationsfunktion:

$$H(t,x) = x + q(t)\,F(t,x)$$

Partielle Ableitungen $(q'(t) := dq(t)/dt)$

$$H_t = q(t)F_t + q'F$$

$$H_x = 1 + q(t)F_x$$

$$H_{xx} = q(t)F_{xx}$$

Ito für Drift:

$$\mu_V = H_t + H_x\sigma_S + \frac{1}{2}H_{xx}\sigma_S^2$$
$$= qF_t + q'F + (1+qF_x)\mu x + \frac{1}{2}qF_{xx}\sigma^2 x^2$$

Ito für Diffusion:

$$\sigma_V = H_x\sigma_S = H_x\sigma x$$

iii) Es gilt $\sigma_V^2 = 0$ genau dann, wenn $H_x = 0$, d.h.

$$q(t) = -\frac{1}{F_x}$$

Für das Call-Delta gilt $\partial C / \partial S_t$, d.h.

$$q(t) = -\frac{1}{\text{Call-Delta}}$$

c) Transformationsfunktion:

$$F(t,x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}t$$

Partielle Ableitungen:

$$F_t = -\frac{1}{2}, \quad F_x = x, \quad F_{xx} = 1$$

Ito:

$$\mu_X = -\frac{1}{2} + F_x \cdot 0 + \frac{1}{2}F_{xx} \cdot 1 = 0$$
$$\sigma_X = F_x \cdot 1 = x$$

Damit:

$$dX_t = W_t\, dW_t.$$

Aufgabe 3: (18 Minuten)

Der Wert eines Basisobjekts (Aktie) betrage per 01.01.2010 EUR 1 000. Ein Investor kann das Basisobjekt per 01.01.2010 auf der Basis eines Kreditkaufs zu einem marktkonformen Kreditzins von 5% erwerben.

a) Wie hoch ist der Gewinn bzw. Verlust des Investors am Ende des Folgejahres (31.12.2011), wenn er das Basisobjekt per Kredit erwirbt und den Kredit per 31.12.2011 inklusive akkumulierter Zinszahlung tilgt? Unterscheiden Sie dabei den Fall, dass das Basisobjekt im betrachteten Zeitraum keine Dividende abwirft und den Fall, dass das Basisobjekt per 31.12.2010 eine Dividende in Höhe von EUR 200 abwirft, die zur teilweisen Tilgung des aufgenommenen Kredits verwendet werden kann. (5 min)

b) Betrachtet werde nun ein Future auf eine Einheit des Basisobjekts mit zweijähriger Restlaufzeit. Wie hoch ist in beiden vorstehenden Fällen (einkommensfreies Basisobjekt bzw. Basisobjekt mit Einkommen) der Preis F(0,2) des Futures per 01.01.2010? Unterstellen Sie dabei arbitragefreie Märkte und vernachlässigen Sie die Margin-Problematik. (2 min)

c) Charakterisieren Sie in beiden vorstehende Fällen den Preis des Futures in Termen des Vorzeichens der Cost of Carry. (1 min)

d) Bestimmen Sie den (zufallsabhängigen) Preis F(1,2) des Futures per 01.01.2011. (1 min)

e) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten zwischen F(1,2) und dem (zufallsabhängigen) Kurs K_1 des Basisobjekts per 01.01.2011! (3 min)

f) Berechnen Sie für den Fall des einkommensfreien Basisobjekts die Anzahl der zu verkaufenden Futures-Kontrakte, die in t = 0 (01.01.2010) benötigt werden, damit in t = 1 (01.01.2011) eine varianzminimale Hedgeposition entsteht (explizite Überlegung!). (6 min)

Lösungsskizze:

$K_0 = 1000$, $r = 0.05$, $D = 200$

a) Gewinn/Verlust G_2 der Position zum 31.12.2010?

Es sei K_2 der Wert des Underlying zum 31.12.2010.

i) Einkommensfreies Basisobjekt

$$G_2 = K_2 - K_0\,(1.05)^2 \qquad = K_2 - 1102.50$$

ii) Basisobjekt mit Einkommen

Kreditverlauf:

$t = 0$	1000
$t = 1$	$1000(1.05) – 200 = 850$
$t = 2$	$850(1.05) = 892.50$

$G_2 = K_2 – 892.50$

b) Gewinn/Verlust-Position in $t = 2$ bei Erwerb Basis-Objekt über Future:

$$G_2 = K_2 – F(0,2),$$

wobei $F(0,2)$ der Preis des Futures mit Restlaufzeit 2 Jahre in $t = 0$ sei.

Folgerung: (Identität der Positionen bei arbitragefreien Märkten)

i) $F(0,2) = 1102.50$

ii) $F(0,2) = 892.50$

c) i) positive Cost-of-Carry

ii) negative Cost-of-Carry

d) $F(1.2) = 1.05\, K_1$

e) $\rho\, [F(1,2), K_1]$

$$= \frac{Cov[F(1,2), K_1]}{\sigma[F(1,2)]\sigma(K_1)}$$

$$= \frac{Cov[1.05K_1, K_1]}{\sigma(1.05K_1)\sigma(K_1)} = \frac{1.05Cov(K_1, K_1)}{1.05\sigma(K_1)\sigma(K_1)}$$

$$= \frac{Var(K_1)}{Var(K_1)} = 1$$

f) Hedge-Position in $t = 1$:

$G = (K_1 - K_0) – x\, [F(1,2) – F(0,2)],$

wobei x die Zahl der zu verkaufenden Futures-Kontrakte sei.

$G = (K_1-1000) – x\, [F(1,2) – 1102.50],$

$= K_1 – x\, F(1,2) + 102.50,$

da $F(1,2) = 1.05K_1$ gilt weiter:

$G = K_1(1–1.05x) + 102.50$

$$Var(G) = (1–1.05x)^2\, Var(K_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{1.05} = 0.9524$$

Aufgabe 4: (22 Minuten)

a) Gegeben sei eine fünfjährige Aktienanleihe ohne Zinszahlungen mit einem Nennwert in Höhe von N = 5 000. Alternativ kann der Emittent der Anleihe 200 Maurer-Aktien liefern.

i) Wie lautet das Zahlungsprofil der Aktienanleihe in t = 5?

ii) Geben Sie zwei alternative Duplikationspositionen für dieses Zahlungsprofil an und identifizieren Sie die hierbei eingehenden Teilpositionen!

iii) Welches alternative strukturierte Produkt entspricht dem Zahlungsprofil in t = 5? (8 min)

b) Sie haben die Möglichkeit, zu einem Preis von EUR 10 000 ein strukturiertes Produkt mit einer einjährigen Laufzeit zu erwerben, welches die folgenden Modalitäten aufweist.

Von dem Betrag von EUR 10 000 werden EUR 500 zur Deckung von Garantie- und Sicherungskosten verwendet. Auf den restlichen Betrag wird eine garantierte Mindestverzinsung von 4% gewährt. Alternativ kommt im Falle einer **negativen** DAX-Entwicklung eine 50%-ige DAX-Partizipation zum Zuge, bezogen auf einen Investitionsbetrag von EUR 9 500 – jedoch nur, wenn dies zu einer höheren Auszahlung führt.

Sollten Sie dieses Produkt erwerben, wenn in t = 0 ein sicherer Zins von 5 % herrscht, der DAX bei 4 750 steht und einjährige DAX-Puts mit einem Ausübungspreis von 4 370 eine Optionsprämie in Höhe von EUR 600 aufweisen? Welches ist der faire Wert des Produkts in t = 0? (9 min)

c) Die Black/Scholes-Formel für einen (dividendenlosen) Europäischen Put auf eine Aktie mit Wertentwicklung $\{S_t; t \geq 0\}$ lautet

$$P_t = X \exp[-r(T-t)]\, N[-d_2(t)] - N[-d_1(t)]\, S_t .$$

Die Put-Position lässt sich damit zu jedem Zeitpunkt durch eine äquivalente Position im Basistitel sowie der sicheren Anlage darstellen („synthetischer“ Put).

Stellen Sie entsprechend die Wertposition eines 1:1 Put-Hedges durch eine Position im Basistitel und der sicheren Anlage dar. (5 min)

<u>Hinweis:</u> $1 - N(-x) = N(x)$

Lösungsskizze:

a)

i) $L_5 = \min(N, n\, S_5) = \min(5000, 200\, S_2)$

ii) α) Duplikation 1:

$\min(5000, 200\, S_5) = 5000 + \min(200\, S_5 - 5000, 0)$

$= 5000 + 200 \min(S_5 - 25, 0)$
$= 5000 - 200 \max(25 - S_5, 0)$.
Position:
Fünfjähriger Zerobond mit Rückzahlung 5000 plus Short-Position in 200 fünfjährigen Puts auf die Maurer-Aktie mit Ausübungspreis X = 25.

β) Duplikation 2:
$\min(5000, 200\, S_5) = 200\, S_5 + \min(5000 - 200\, S_5, 0)$
$= 200\, S_5 + 200 \min(25 - S_5, 0)$
$= 200\, S_5 - 200 \max(S_5 - 25)$.
Position:
200 Maurer-Aktien plus Short-Position in 200 fünfjährigen Calls auf die Maurer-Aktie mit X = 25.

iii) Die letzte Position ist äquivalent zu der Position eines Covered Short Call bei Besitz von 200 Maurer-Aktien bzw. zu einem Diskont-Zertifikat mit Cap 5 000/200 = 25.

b) Rückzahlungsprofil in t = 1:

$$L_1 = \max\left(1.04 \cdot 9500,\ 9500 - 9500 \cdot 0.5 \cdot \frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)}\right)$$

Zerlegung des Rückzahlungsprofils:

$$\begin{aligned}
L_1 &= 9500 + \max\left(0.04 \cdot 9500\,,\ \frac{0.5 \cdot 9500}{4750}\,(DAX(0) - DAX(1))\right) \\
&= 9500 + \max\left(380\,,\ 4750 - DAX(1)\right) \\
&= 9500 + \max\left(4750 - DAX(1) - 380, 0\right) + 380 \\
&= 9880 + \max\left(4370 - DAX(1), 0\right)
\end{aligned}$$

Fairer Wert L_0 in t = 0:

$$L_0 = 9880\,(1.05)^{-1} + 600 = 9409.52 + 600$$

$$= 10\,009.52\ .$$

Der Erwerb des Produkts zu EUR 10 000 ist damit vorteilhaft.

c)
$$\begin{aligned}
S_t + P_t &= S_t + X \exp[-r(T-t)]\, N[-d_2(t)] - N[-d_1(t)] S_t \\
&= (1 - N[-d_1(t)]) S_t + X \exp[-r(T-t)]\, N[-d_2(t)] \\
&= N[d_1(t)] S_t + X \exp[-r(T-t)]\, N[-d_2(t)].
\end{aligned}$$