Prüfung Finanzmathematik und Investmentmanagement 2016

<u>Aufgabe 1:</u> (18 Minuten)

a) Gegeben seien drei Aktien mit den folgenden Werten für die zugehörigen Einperiodenrenditen R_1, R_2 und R_3:

$$E(R_1) = 0.2,\ E(R_2) = 0.1,\ E(R_3) = 0.4$$
$$Var(R_1) = Var(R_2) = Var(R_3) = 0.2$$
$$\rho(R_1, R_2) = \rho(R_1, R_3) = \rho(R_2, R_3) = 0$$

Die Investmentgewichte x, y und z seien nicht auf den Wertebereich $0 \le x, y, z \le 1$ beschränkt, sondern können – unter Beachtung der Restriktion $x + y + z = 1$ – beliebig variieren.
Bestimmen Sie unter diesen Voraussetzungen die <u>Investmentgewichte</u> der lokal (d.h. bei fixiertem Erwartungswert) varianzminimalen Portfolios! (7 min)

b) Der effiziente Rand bei einem rein riskanten Anlagespektrum besitze die Form

$$\mu = 0.05 + \sqrt{0.6(\sigma^2 - 0.01)}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Portfolio-Rendite geringer als -10% ausfällt, soll höchstens 5% betragen. Gehen Sie aus von normalverteilten Renditen. Wie lautet die aus der Shortfallrestriktion resultierende Shortfallgerade (das 95%-Quantil der Standardnormalverteilung beträgt $N_{0.95} = 1.645$)? Bestimmen Sie auf dieser Grundlage die (μ, σ)-Position des optimalen Portfolios, d.h. des Portfolios mit maximaler erwarteter Rendite! (5 min)

c) Gegeben sei nun ein Portfolio aus zwei Aktien, deren Renditen R_1 und R_2 perfekt positiv korreliert sind, d.h. für den Korrelationskoeffizient gilt $\rho = 1$. Es sei weiterhin $E(R_1) = \mu_1$, $E(R_2) = \mu_2$, $\sigma(R_1) = \sigma_1$ und $\sigma(R_2) = \sigma_2$. Unterstellen Sie, dass $\mu_1 < \mu_2$ und $\sigma_1 < \sigma_2$ gilt. Leerverkäufe bei der Portfoliobildung sind erlaubt.

i) Welche <u>Investmentgewichte</u> weist das global varianzminimale Portfolio in diesem Fall auf? Sind Leerverkäufe erforderlich?
<u>Hinweis:</u> Im Fall, dass Leerverkäufe zulässig sind, kann eine Portfoliovarianz in Höhe von null erreicht werden.

ii) Es existiere nun eine Anlage mit einer sicheren Verzinsung in Höhe von r_0. Welche Rendite weist dann das varianzminimale Portfolio aus Aufgabenteil i) auf? Begründen Sie Ihre Aussage!

(6 min)

<u>Lösungsskizzen:</u>

<u>Lösung 1a:</u>

Lagrange-Funktion:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}(0.2x_1^2 + 0.2x_2^2 + 0.2x_3^2)$$

$$-\lambda_1(0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.4x_3 - \mu) - \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$$

Aufstellung Lagrange-Gleichungen:

(1) $L_{x_1} = 0.2x_1 - 0.2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \lambda_1 + 5\lambda_2$

(2) $L_{x_2} = 0.2x_2 - 0.1\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0.5\lambda_1 + 5\lambda_2$

(3) $L_{x_3} = 0.2x_3 - 0.4\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 2\lambda_1 + 5\lambda_2$

(4) $L_{\lambda_1} = 0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.4x_3 - \mu = 0$

(5) $L_{\lambda_2} = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$

Einsetzen von (1) - (3) in (4) und (5):

$$10.5\lambda_1 + 35\lambda_2 = 10\mu$$

$$3.5\lambda_1 + 15\lambda_2 = 1$$

Hieraus folgt $\lambda_1 = \frac{30}{7}\mu - 1$ sowie $\lambda_2 = \frac{3}{10} - \mu$. Dies führt zu

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{7}\mu,\ x_2 = 1 - \frac{20}{7}\mu,\ x_3 = \frac{25}{7}\mu - \frac{1}{2}.$$

Lösung 1b:

Shortfall-Gerade:

$$\mu = -0.1 + 1.645\sigma$$

Gleichsetzen Shortfall-Gerade und effizienter Rand

$$0.05 + \sqrt{0.6(\sigma^2 - 0.01)} = -0.1 + 1.645\sigma$$

Hieraus folgt:

$$0.6(\sigma^2 - 0.01) = (-0.15 + 1.645\sigma)^2$$

$$= 0.0225 - 0.4935\sigma + 2.706\sigma^2$$

sowie

$$2.106\sigma^2 - 0.4935\sigma + 0.0285 = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$\sigma_1 = 0.1032, \quad \sigma_2 = 0.1311$$

σ_2 entspricht der Standardabweichung σ_{OPT} des optimalen Portfolios. Zugehörige erwartete Rendite:

$$\mu_{OPT} = -0.1 + 1.645(0.1311) = 0.1157.$$

Lösung 1c:

i) Die Portfoliovarianz σ_P^2 lautet im Falle $\rho = 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= x\sigma_1^2 + (1-x)\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2 \\ &= (x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2)^2 \end{aligned}$$

Nach Hinweis ist die varianzminimale Position gegeben durch $\sigma_P^2 = 0$. Hieraus folgt:

$$x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 = 0$$

und somit:

$$x = \frac{-\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

$$1 - x = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

Fazit: Die Aktie 2 ist leer zu verkaufen.

Alternativ: Bestimmung des varianzminimalen Portfolios über

$$0 = \frac{d\sigma^2}{dx} = 2x\sigma_1^2 - 2(1-x)\sigma_2^2 + 2\mathrm{Cov}(R_1, R_2) - 4x\mathrm{Cov}(R_1, R_2).$$

Mit $\rho = 1$ folgt hieraus

$$x = \frac{\sigma_2^2 - \mathrm{Cov}(R_1, R_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mathrm{Cov}(R_1, R_2)} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1}.$$

ii) Das varianzminimale Portfolio aus i) weist eine Renditevarianz von null auf. Damit ist das varianzminimale Portfolio eine sichere Anlage. Dessen Rendite muss der sicheren Verzinsung r_0 entsprechen, denn aus Gründen der Arbitragefreiheit (Law of One Price) ist die sichere Verzinsung eine eindeutig bestimmte Größe.

<u>Aufgabe 2:</u> (27 Minuten)

a) Bestimmen Sie die stochastische Differentialgleichung des Prozesses

$$X_t = \exp\,[-(mt+\sigma W_t)],$$

wobei W_t den Standard-Wienerprozess bezeichne, in kanonischer Form!

(5 min)

b) Betrachten Sie den stochastischen Prozess

$$X_t = \frac{1}{2}(W_t^2 - t),$$

wobei $\{W_t\}$ den Standard-Wienerprozess bezeichne.

i) Bestimmen Sie die stochastische Differentialgleichung dieses Prozesses!

ii) Bestimmen Sie auf der Basis von b i) explizit die Lösung des stochastischen Integrals

$$\int_0^t W_s \, dW_s.$$

<u>Hinweis:</u> Stammfunktion!

(8 min)

c) Betrachten Sie ein selbstfinanzierendes Portfolio aus $x(t)$ Einheiten einer Aktie mit Kursprozess $\{S_t\}$ und $y(t)$ Einheiten eines Einheits-Zerobonds mit Wertentwicklung $B_t = \exp[-r(T-t)]$. Für die Wertentwicklung $V(t)$ dieses Portfolio gilt

$$dV_t = x(t)\, dS_t + y(t)\, dB_t.$$

i) Bestimmen Sie die Differentialgleichung für die Wertentwicklung $\{B_t\}$!

ii) Die Wertentwicklung von $\{S_t\}$ folge einer geometrischen Brownschen Bewegung mit Drift μ und Diffusion σ. Wie lautet (unter Berücksichtigung von Aufgabenteil c i)) die stochastische Differentialgleichung für V_t?

iii) Welcher stochastischen Differentialgleichung folgt die Wertenwicklung $C(t, S_t)$ eines Calls auf die Aktie mit Wertentwicklung $\{S_t\}$?

iv) Wir wollen das selbstfinanzierende Portfolio mit Wertentwicklung $\{V_t\}$ nun so gestalten, dass es die Wertentwicklung von $\{C(t, S_t)\}$ dupliziert. Welchen Wert muss dann $x(t)$ annehmen? Interpretieren Sie die gefundene Lösung!
<u>Hinweis:</u> Führen Sie einen Koeffizientenvergleich durch!

(14 min)

Lösungsskizzen:

Lösung 2 a:

Ito's Lemma mit F(t, x) = exp(-mt-σx).
Zunächst gilt: $F_t = -mF, F_x = -\sigma F, F_{xx} = \sigma^2 F$.

Ito: $\mu_X = F_t + F_x\,\mu_W + \frac{F_{xx}\,\sigma_W^2}{2}$; $\sigma_X = F_x\,\sigma_W$

Mit $\mu_W = 0$ und $\sigma_W = 1$ (Standard-Wienerprozess) folgt:

$$\mu_X = -mF + \frac{\sigma 2}{2} F \;;\; \sigma_X = -\sigma F$$

Damit gilt für die stochastische Differentialgleichung in kanonischer Form:

$$dX_t = \left(\frac{\sigma 2}{2} - m\right) X_t\, dt - \sigma X_t\, dW_t$$

Lösung 2 b:

i) Ito's Lemma mit $F(t,x) = \frac{1}{2}(x^2 - t)$.
Zunächst gilt: $F_t = -1/2, F_x = x, F_{xx} = 1$.

Ito: $\mu_X = F_t + F_x\,\mu_W + \frac{F_{xx}\,\sigma_W^2}{2}$; $\sigma_X = F_x\,\sigma_W$

Mit $\mu_W = 0$ und $\sigma_W = 1$ (Standard-Wienerprozess) folgt:

$$\mu_X = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \;;\; \sigma_X = x$$

Damit gilt für die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = W_t\, dW_t$$

bzw. in kanonischer Form

$$dX_t = \sqrt{2X_t + t}\, dW_t.$$

ii) Gemäß i) ist $X_t = \frac{1}{2}(W_t^2 - t)$ die Lösung des stochastischen Integrals $\int W_s\, dW_s$, d.h. es gilt mit $W_0 = 0$

$$\int_0^t W_s\, dW_s = \frac{1}{2}(W_s^2 - s)\Big|_0^t$$
$$= \frac{1}{2}(W_t^2 - t) = X_t.$$

Lösung 2c:

i) Es gilt

$$B_t = \exp[-r(T-t)].$$

Hieraus folgt

$$dB_t/dt = r\exp[-r(T-t)] = rB_t$$

bzw.

$$dB_t = rB_t dt.$$

ii) Mit $dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$ und $dB_t = rB_t\, dt$ gilt:

$$\begin{aligned} dV_t &= x(t)[\mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t] + y(t) r B_t dt \\ &= [\mu x(t) S_t + r\, y(t) B_t]\, dt + \sigma x(t) S_t\, dW_t \end{aligned}$$

iii) Nach Ito’s Lemma folgt:

$$dC_t = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma S\right) dt + \frac{\partial C}{\partial S}\sigma S\, dW_t$$

iv) Koeffizientenvergleich:

$$\sigma x(t) S\, dW_t = \frac{\partial C}{\partial S}\sigma S\, dW_t$$

Hieraus folgt:

$$x(t) = \partial C/\partial S$$

Die Funktion $x(t)$ entspricht dem Call-Delta.

Aufgabe 3: (24 Minuten)

a) Gegeben sei ein einkommensfreies Basisobjekt mit Wertentwicklung $\{K_t, 0 \le t \le T\}$. Ferner betrachten wir in T fällig werdende Futurekontrakte, jeweils bezogen auf eine Einheit des Basisobjekts. Das Marking-to-Market von Futures blenden wir aus. Des Weiteren bestehe die Möglichkeit einer Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme zum sicheren (zeitdiskreten) Einperiodenzinssatz r.

i) Bestimmen Sie den Cost of Carry-Preis $F(t, T)$ des Futures in $t < T$. Explizieren Sie dabei die Arbitrageüberlegung, die der Ableitung des Cost of Carry-Preises zugrunde liegt!

ii) Weisen Sie nach, dass zu jedem Zeitpunkt t der Cost of Carry-Preis F_t aus Aufgabenteil a i) perfekt mit dem Wert K_t des Basistitels korreliert ist!

(7 min)

b) i) Zum Zeitpunkt τ = t-1 halten Sie ein Portfolio aus m Einheiten eines Basisobjekts mit Kursentwicklung $\{K_\tau; \tau \geq 0\}$. Wie viele Futures (jeweils bezogen auf eine Einheit des Basisobjekts) sind in τ = t-1 zu verkaufen, damit die Gesamtposition (Hedge-Position) zum Zeitpunkt τ = t varianzminimal ist? Bestimmen Sie dabei die Anzahl der in τ = t-1 zu verkaufenden Futures im Rahmen einer expliziten Überlegung!
<u>Hinweis:</u> Es genügt die Überprüfung der notwendigen Bedingung für das Vorliegen eines Optimums.

ii) Unter welcher Bedingung weist die varianzminimale Hedge-Position aus Aufgabenteil b i) im Zeitpunkt t stets eine geringere Varianz auf als die (nicht gehedgte) Originalposition? Führen Sie den entsprechenden Nachweis explizit durch!
(7 min)

c) In t = 0 sei ein Callable Bond mit Nennwert N = 5000, einem Nominalzins von i = 5%, einer Laufzeit von T = 4 Jahren sowie einem möglichen Kündigungstermin zu t = 2 gegeben. Bestimmen Sie (expliziter Nachweis!) einen geeigneten Finanztitel in der Weise, dass gilt

Callable + Finanztitel = Standardbond,

wobei der Standardbond die gleichen Ausstattungsmerkmale besitze wie der Callable – bis auf das Kündigungsrecht. Gehen Sie dabei einheitlich von jährlichen Zinszahlungen aus. Welches sind die genauen Modalitäten des gesuchten Finanztitels? (6 min)

d) Ein Versicherungsunternehmen habe einen Festzinstitel mit Nennwert N, Laufzeit T und Nominalzins i im Bestand. Durch welches Finanzgeschäft in Form eines Swaps kann man erreichen, dass

Festzinstitel + Swap = Reverse Floater,

wobei der Reverse Floater ein Zinstitel ist, dessen Zinsertrag *steigt,* wenn die Geldmarktzinsen (die variablen Zinsen) *fallen*? (4 min)

<u>Lösungsskizzen:</u>

<u>Lösung 3a:</u>

i) Betrachtet werden die beiden folgenden Investitionen, die zum Zeitpunkt T identisch sind:

(I) Kauf des Basisobjekts zum Zeitpunkt t auf Kredit, Ablösung des Kredits in T. Gewinn-/Verlustposition in T:

$$K_T - K_t(1+r)^{T-t}.$$

(II) Erwerb des Basisobjekts über eine zum Zeitpunkt t eingegangene Future Long-Position. Gewinn-/Verlustposition in T:

$K_T - F(t,T)$.

Da die Investitionen in T identisch sind, muss gelten:

$$K_T - F(t,T) = K_T - K_t(1+r)^{T-t}$$

und daher insgesamt

$$F(t,T) = K_t(1+r)^{T-t}.$$

ii) Es bezeichne wieder $\{K_t\}$ den Wertverlauf des Basistitels und $\{F(t,T)\}$ entsprechend den Wertverlauf des Futures mit Liefertermin $(t \leq T)$. Im Falle von Cost of Carry-Preisen gilt:

$$F_t = F(t,T) = K_t(1+r)^{T-t} \qquad \text{und damit}$$

$$\rho(K_t, F_t) = \frac{Cov(K_t, F_t)}{\sigma(K_t)\sigma(F_t)} = \frac{Cov\left[K_t, K_t(1+r)^{T-t}\right]}{\sigma(K_t)\sigma\left((1+r)^{T-t}K_t\right)}$$
$$= \frac{(1+r)^{T-t}Cov(K_t, K_t)}{(1+r)^{T-t}\sigma(K_t)\,\sigma(K_t)} = \frac{Var(K_t)}{Var(K_t)} = 1.$$

Lösung 3b:

i) Hedge-Position:

$G_t = G_t(x) = m(K_t - K_{t-1}) - x(F_t - F_{t-1})$

$Var(G_t) = m^2\, Var(K_t) + x^2\, Var(F_t) - 2mx\, Cov(K_t, F_t)$

Varianzminimales Hedge:

$dVar(G_t)/dx = 2mVar(K_t) – 2mCov(K_t, F_t)$.

Aus $dVar(G_t)/dx = 0$ folgt

$x = m\, Cov(K_t, F_t)/Var(F_t)$.

ii) Setze $x = m\, Cov(K_t, F_t)/Var(F_t)$, es folgt:

$$Var(G_t) = m^2\, Var(K_t) + m^2\, Cov(K_t, F_t)^2/Var(F_t)$$
$$-2\, m^2\, Cov(K_t, F_t)^2/Var(F_t)$$
$$= m^2\{Var(K_t) - Cov(K_t, F_t)^2/Var(F_t)\}$$
$$= m^2\, Var(K_t)\{1 - \frac{Cov(K_t, F_t)^2}{Var(K_t)\, Var(F_t)}\}$$
$$= m^2\, Var(K_t)\{1 - \frac{\rho^2 Var(K_t)\, Var(F_t)}{Var(K_t)\, Var(F_t)}\}$$
$$= m^2\, Var(K_t)(1 - \rho^2) = Var(mK_t)(1 - \rho^2).$$

Es gilt somit stets $Var(G_t) < Var(mK_t)$, wenn $\rho(K_t, F_t) \neq 0$.

Lösung 3c:

Rückzahlungsreihe Standardbond:
{250, 250, 250, 5250}.

Rückzahlungsreihe des Callable bei Kündigung in t=2:

{250, 5250}.

Durch die vorzeitige Rückzahlung steht in t=2 ein Betrag in Höhe von 5000 zusätzlich zur Verfügung. Dieser Betrag kann für zwei Jahre (etwa) zum 12-Monats-LIBOR angelegt werden.

Kann im Rahmen eines Receiver Swap mit Umfang 5000 mit 2 Jahren Laufzeit der 12-Monats-LIBOR gegen den Nominalzins 5% eingetauscht werden, so lauten die Zahlungssalden:

t = 2	–5000 (Etablierung Geldmarktanlage)
t = 3	LIBOR(Geldmarkt) – LIBOR(Swap) + 250 (Swap)
t = 4	LIBOR(Geldmarkt) – LIBOR(Swap) + 250 (Swap) +5000 (Auflösung Geldmarktanlage).

Insgesamt entspricht dies dann der Rückzahlungsreihe des Standardbonds.

Da diese Operationen jedoch nur bei Kündigung erforderlich sind, ist der benötigte Finanztitel eine Receiver Swaption mit Laufzeit 2 Jahre, die das Optionsrecht beinhaltet, in einen zweijährigen Receiver Swap im Umfang von 5000 und einen Strike-Swapsatz von 5% einzutreten.

Lösung 3d:

Bei Eintritt in einen Receiver Swap im Umfang von N und einer Laufzeit von T erhält das Versicherungsunternehmen einen Festzins i_2 und zahlt einen variablen Zins i_V.

Der Saldo ist gegeben durch:

$$i_{SALDO} = i + i_2 - i_V .$$

Durch den Eintritt in einen Receiver Swap wird somit der gewünschte Effekt erzielt.

Aufgabe 4: (21 Minuten)

a) Die Position eines Collars besteht aus dem Besitz eines Basistitels bei gleichzeitigem Kauf einer Verkaufsoption (Long Put) mit Ausübungspreis X_1 und Verkauf einer Kaufoption (Short Call) mit Ausübungspreis $X_2 > X_1$. Es bezeichne $P_t = P_t(X_1)$ den Preis des Put und $C_t = C_t(X_2)$ die erhaltene Call-Prämie, jeweils zum Zeitpunkt t. Die Wertposition des Collars zum Zeitpunkt T > t lautet bei Annahme eines fristigkeitsunabhängigen einheitlichen Soll- und Habenzinses r :

$$V_T = S_T + \max(X_1 - S_T, 0) - \max(S_T - X_2, 0) - (P_t - C_t)(1 + r)^{(T-t)}$$

Weisen Sie vor diesem Hintergrund die Put-Call-Parität, d.h. den arbitragefreien Preiszusammenhang zwischen Call und Put, zum Zeitpunkt t nach! (6 min)

b) Ein Investor besitzt ein anfängliches Vermögen W_0, das er benutzt, um einerseits Zerobonds der Laufzeit T = 7 zu erwerben und andererseits siebenjährige Calls auf die Dorint-Aktie. Welches Mindest-Endvermögen W_{min} kann der Investor auf diese Weise erreichen? Unterstellen Sie dabei, dass die siebenjährige Spot Rate r_7 beträgt.

Bestimmen Sie die korrespondierende annualisierte Mindestrendite r_{min} bezogen auf das anfängliche Vermögen W_0 und vergleichen Sie diese mit r_7. Welche Konsequenz hat die Konstellation $r_{min} = r_7$? (5 min)

c) Die Black/Scholes-Formel für eine Europäische Put-Option mit Ausübungspreis X auf ein einkommensfreies Basisobjekt mit Kursentwicklung $\{S_t\}$ lautet
$P_t = X \exp(-r(T-t))\, N(-d_2(t)) - S_t\, N(-d_1(t))$, wobei N(x) die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichne.
Bestimmen Sie auf dieser Grundlage den Wert V_t eines synthetischen 1:1 Hedges zum Zeitpunkt t! (4 min)

d) Betrachten Sie ein Portfolio mit Anfangswert $V_0 = 100$ in $t = 0$, für welches eine CPPI-Strategie mit dem Multiplikator $m = 5$ und der konstanten Wertuntergrenze (Floor) $F = 90$ umgesetzt werden soll. Gehen Sie aus von einem risikolosen Zins in Höhe von null. Die realisierte Wertentwicklung des riskanten Assets ist gegeben durch $s_0 = 8000$, $s_1 = 8800$ sowie $s_2 = 8360$.
Bestimmen Sie die folgenden Werte, die aus der Umsetzung der CPPI-Strategie resultieren: Die Werte C_0 und C_1 bzw. E_0 und E_1 von Cushion und Exposure sowie die Werte V_1 und V_2 des CPPI-Portfolios. (6 min)

Lösungsskizzen:

Lösung 4a:

Collar-Position:

$$V_T = S_T + \max(X_1 - S_T, 0) - \max(S_T - X_2, 0) - (P_t - C_t)(1 + r)^{T-t}$$

$$= \begin{cases} X_2 - \Delta & S_T \geq X_2 \\ S_T - \Delta \quad \text{für} & X_1 \leq S_T \leq X_2, \\ X_1 - \Delta & S_T \leq X_1 \end{cases}$$

wobei $\Delta := (P_t - C_t)(1 + r)^{T-t}$

Am Markt herrsche ein fristenunabhängiger einheitlicher Soll- und Habenzins r.

Gegeben in t : Vermögen S_t

i) Investmentalternative A: Sichere Anlage von S_t über T-t Perioden
   Vermögen in T: $S_t(1+r)^{T-t}$

ii) Investmentalternative B: Erwerb Basistitel zu S_t; ferner Put Long (X) und Call Short (X); finanziere $P_t - C_t$ auf Kredit.
   Vermögen in T: $X - (P_t - C_t)(1 + r)^{T-t} = X + (C_t - P_t)(1 + r)^{T-t}$

Fazit: $C_t - P_t = S_t - X(1 + r)^{-(T-t)}$.

<u>Lösung 4b:</u>

Der Investor erwerbe n Calls zum Preis C_0. Damit kann er W_0 - n C_0 in Zerobonds anlegen.

Korrespondierende Wertentwicklung:

$$W_7 = (W_0 - n\,C_0)(1 + r_7)^7 + n \max(X - S_7, 0),$$

wobei $\{S_t\}$ die Wertentwicklung der Dorint-Aktie und X den Ausübungspreis des Call bezeichne.

Da $\max(X - S_7, 0) \geq 0$ folgt:

$$W_7 \geq (W_0 - n\,C_0)(1 + r_7)^7 =: W_{min}$$

Bestimmung der Mindestrendite:

$$W_0\,(1 + r_{min})^7 = W_{min} = (W_0 - n\,C_0)(1 + r_7)^7.$$

Hieraus folgt:

$$1 + r_{min} = \sqrt[7]{1 - n(C_0/W_0)}\;(1 + r_7)$$

Es muss gelten $r_{min} \leq r_7$. Im Falle $r_{min} = r_7$ werden keine Calls erworben (n = 0) und das gesamte anfängliche Vermögen wird in den Zerobond investiert.

<u>Lösung 4c:</u>

Synthetische 1:1 Put Hedge-Position

$$V_t = S_t + P_t\,,$$

wobei S_t der Kurs des Underlying und P_t der Wert der entsprechenden Put-Option. Damit gilt

$$V_t = S_t + P_t = S_t + X\exp[-r(T-t)]N(-d_2(t)) - S_tN(-d_1(t))$$

$$= S_t[1-N(-d_1(t))] + X\exp[-r(T-t)]N[-d_2(t)]$$

Lösung 4d:

Es gilt $C_0 = V_0 - F = 10$ und somit $E_0 = 5C_0 = 50$. Hieraus folgt $V_1 = E_0(1 + r_1) + (V_0 - E_0)$, wobei $r_1 = (8800 - 8000)/8000 = 0.1$, also $V_1 = 50(1.1) + 50 = 105$.

Hieraus folgt $C_1 = V_1 - F = 15$ und somit $E_1 = 5C_1 = 75$. Es folgt weiter $V_2 = E_1(1 + r_2) + (V_1 - E_1)$, wobei $r_2 = (8360 - 8800)/8800 = -0.05$, also $V_2 = 75(0.95) + 30 = 71.25 + 30 = 101.25$.