Prüfung DAV-Spezialwissen in Finanzmathematik 2014

Block I (Albrecht)

Aufgabe 1: (30 Minuten)

Gegeben sei eine Europäische Calloption auf einen dividendenfreien Basistitel mit Laufzeit T, deren heutiger Wert (Preis) C_t beträgt und die nach Black/Scholes bewertet ist.

a) Wie lautet die approximative Änderung des Callwerts über das Zeitintervall [t, t+h] unter Anwendung der Delta-Approximation?

b) Wie hoch ist der Value at Risk der Option über ein Intervall der Länge h unter Anwendung der Delta-Normal-Methode? Dabei sei die Rendite R_h des Basistitels gegeben durch $R_h \sim N(\mu h, \sigma^2 h)$.

c) Wie lautet die approximative Änderung des Callwerts über das Zeitintervall [t, t+h] unter Anwendung der Delta-Exakt-Approximation?

d) Bestimmen Sie nun für die Call-Position den Value at Risk zum Signifikanzniveau α über das Zeitintervall [t, t+h] auf der Basis einer Delta-Exakt-Approximation. Unterstellen Sie dabei für die Log-Rendite des Basisobjekts $U_h \sim N(0,v^2 h)$.

e) Approximieren Sie den Value at Risk aus Aufgabenteil d), indem Sie die Exponentialfunktion linear approximieren!

Hinweise:

1) Das Call-Delta eines Europäischen Call lautet im Falle von Black/Scholes-Preisen $\Delta_C(t) = N[d_1(t)]$.

2) Setzen Sie den Value at Risk im Normalverteilungsfall als bekannt voraus und ebenso die Transformationseigenschaften von Quantilen.

Lösungsskizze:

a) Deltaapproximation der Optionsposition:

$$\Delta C := C_{t+h} - C_t \approx \Delta_C(t)(S_{t+h} - s_t),$$

wobei $\Delta_C(t) = \partial C / \partial S$ („Optionsdelta") .

Im Black/Scholes-Falle gilt dabei:

$$\Delta_C(t) = \partial C / \partial S = N[d_1(t)].$$

b) Es gilt:

$$\Delta C = N[d_1(t)]s_t R_h$$
$$E(\Delta C) = N[d_1(t)]s_t \mu h$$
$$\sigma(\Delta C) = N[d_1(t)]s_t \sigma\sqrt{h}$$
$$L_C = -\Delta C, \quad E(L_C) = -E(\Delta C) = -N[d_1(t)]s_t \mu h, \quad \sigma(L_C) = \sigma(\Delta C)$$

ΔC und damit L_C normalverteilt, somit gilt insgesamt:

$$\begin{aligned} VaR_h &= E(L_C) + N_{1-\alpha}\sigma(L_C) \\ &= N[d_1(t)]s_t \left[N_{1-\alpha}\sigma\sqrt{h} - \mu h\right] \end{aligned}$$

c) Definiere die Verlustvariable $L_C = -\Delta C$. Es folgt:

$$\begin{aligned} L_C &= -\frac{\partial C}{\partial S_t}\Delta S \\ &= -N[d_1(t)]\Delta S \\ &= -N[d_1(t)]s_t(e^{U_h} - 1). \end{aligned}$$

d) Die Funktion $f(u) = -N[d_1(t)]\, s_t(e^u - 1)$ ist eine monoton fallende Funktion in u. Aufgrund der Transformationseigenschaften von Quantilen gilt somit

$$\begin{aligned} VaR_\alpha &= Q_{1-\alpha}(L_C) \\ &= -N[d_1(t)]s_t\{\exp[Q_\alpha(U_h)] - 1\} \\ &= -N[d_1(t)]s_t\left\{\exp\left[-N_{1-\alpha}v\sqrt{h}\right] - 1\right\} \\ &= N[d_1(t)]s_t\left\{1 - \exp\left[-N_{1-\alpha}v\sqrt{h}\right]\right\}. \end{aligned}$$

e) Mit $\exp(x) \approx 1+x$ folgt aus d)

$$VaR \approx N[d_1(t)]s_t N_{1-\alpha}v\sqrt{h}\,.$$

<u>Aufgabe 2:</u> (30 Minuten)

Bestimmen Sie die Korrelation zwischen zwei Ausfallindikatoren D_i und D_j unter Zugrundelegung des Einfaktor-Defaultmodells. Unterstellen Sie dabei eine bivariate (korrelierte) Normalverteilung für die Bonitätsvariablen Y_i und Y_j.

<u>Hinweis:</u> $\Phi_2(..,..;\rho)$ bezeichne die bivariate korrelierte Standardnormalverteilung mit Korrelationskoeffizient ρ.

Lösungsskizze:

Per Definition gilt für die Bonitätsvariablen (k=i,j)

$$Y_k = \sqrt{\rho_k} \cdot F + \sqrt{1-\rho_k} \cdot U_k.$$

Dabei sind die Größen F, U_i, U_j gemeinsam (unkorreliert) standardnormalverteilt. Insbesondere gilt $E(F) = E(U_k) = 0$, $Var(F) = Var(U_k) = 1$ und $Cov(F,U_k) = 0$ für k = i,j.

Die Ausfallindikatoren sind definiert durch (k=i,j)

$$D_k = 1 \Leftrightarrow Y_k < H_k ,$$

Dabei bezeichne H_k (k=i,j) die Ausfallschranke.

Die Ausfallwahrscheinlichkeit ist definiert durch (k = 1,2) $PD_k = P(D_k=1)$.

Zu bestimmen ist die Größe

$$\rho_{ij} := \rho(D_i, D_j) = \frac{cov(D_i, D_j)}{\sigma(D_i)\sigma(D_j)} = \frac{E(D_i D_j) - E(D_i)E(D_j)}{\sigma(D_i)\sigma(D_j)} .$$

Weiter haben wir (k=i,j):

$$\begin{aligned}
&E(D_k) = 1 \cdot P(D_k = 1) = PD_k \\
&E(D_k^2) = 1 \cdot P(D_k = 1) = PD_k \\
&Var(D_k) = E(D_k^2) - E(D_k)^2 = PD_k - PD_k^2 = PD_k(1-PD_k) \\
&\sigma(D_k) = \sqrt{PD_k(1-PD_k)} . \\
&E(Y_k) = \sqrt{\rho_k}E(F) + \sqrt{1-\rho_k}E(U_k) = 0 \\
&Var(Y_k) = Var\left[\sqrt{\rho_k}F + \sqrt{1-\rho_k}U_k\right] \\
&\quad = \rho_k Var(F) + (1-\rho_k)Var(\rho_k) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Cov\left(Y_i, Y_j\right) = Cov\left[\sqrt{\rho_i}F + \sqrt{1-\rho_i}U_i, \sqrt{\rho_j}F + \sqrt{1-\rho_j}U_j\right] \\
&\qquad = \sqrt{\rho_i\rho_j}\, Var(F) = \sqrt{\rho_i\rho_j} .
\end{aligned}$$

$$\rho\left(Y_i, Y_j\right) = \frac{Cov\left(Y_i, Y_j\right)}{\sigma(Y_i)\sigma(Y_j)} = \frac{\sqrt{\rho_i\rho_j}}{1} = \sqrt{\rho_i\rho_j} .$$

Die Größe Y_i und Y_j sind somit bivariat standardnormalverteilt mit Korrelationskoeffizient $\sqrt{\rho_i\rho_j}$.

Damit gilt

$$\begin{aligned}
E(D_i D_j) &= P(D_i = 1, D_j = 1) \\
&= P(Y_i \le H_i, Y_j \le H_j) \\
&= \Phi_2\left(H_i, H_j; \sqrt{\rho_i\rho_j}\right),
\end{aligned}$$

wobei $\Phi_2(..,..;\sqrt{\rho_i \rho_j})$ die bivariate korrelierte Standardnormalverteilung mit Korrelationskoeffizient $\sqrt{\rho_i \rho_j}$ bezeichne.

Aus (k=1,2)

$$PD_k = P(Y_k < H_k) = P(Y_k \le H_k) = \Phi(H_k)$$

folgt ferner

$$H_k = \Phi^{-1}(PD_k).$$

und damit

$$E(D_i D_j) = \Phi_2\left(\Phi^{-1}(PD_i), \Phi^{-1}(PD_j); \sqrt{\rho_i \rho_j}\right).$$

Insgesamt haben wir somit

$$\rho_{ij} = \frac{\Phi_2\left(\Phi^{-1}(PD_i), \Phi^{-1}(PD_j); \sqrt{\rho_i \rho_j}\right) - PD_i \cdot PD_j}{\sqrt{PD_i \cdot (1 - PD_i)} \cdot \sqrt{PD_j \cdot (1 - PD_j)}}.$$

<u>Block II</u> (Bartels)

<u>Aufgabe 3:</u> (50 Minuten)

Der Vermögensanleger eines Versicherungsunternehmens verfolgt kontinuierlich eine Anlagestrategie, die b Anteile des Gesamtvermögens in einen Aktienfonds und komplementär (1-b) Anteile des Anlagevermögens in einen risikolosen Geldmarktfonds investiert.
Der Preisprozess $\{S_t | 0 \le t \le T\}$ des genannten Aktienfonds folge einer geometrischen Brownschen Bewegung, etwa $S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{\nu^2}{2})t + \nu W_t}$ mit $\mu = 0{,}06$ und $\nu = 0{,}2$.
Der risikolose Geldmarktfonds entwickelt sich kontinuierlich mit einer festen exponentiellen Zinsrate r weiter, etwa: $B_t = B_0 \cdot e^{rt}$.
Man unterstellt, dass in einem zeitstetigen Modell idealisiert diese kontinuierliche Anlagestrategie mit den anvisierten proportionalen Anteilen möglich ist.

(i) Durch welche geometrische Brownsche Bewegung kann unter diesen Annahmen der Wert V(t) der Vermögensanlage beschrieben werden? Man gebe explizit den Drift- und Volatilitätsparameter an und begründe dies (**15 Minuten**).

(ii) Man berechne den Erwartungswert E[V(1)] des Vermögens nach einem Jahr. Gilt stets E[V(1)] > V(0)? (**10 Minuten**)

(iii) Der risikolose Zins r sei 1,35%. Wie groß darf der prozentuale Anteil b des Geldvermögens, das in den Aktienfonds investiert wird, höchstens sein, damit nach einem Jahr die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man mit dieser Anlagestrategie mindestens einen Zins von 1,25% erwirtschaftet, über 99% liegt? (**25 Minuten**)

Hinweise: Man benutze ohne Beweis, dass $\exp(-\frac{\nu^2}{2}t+\nu W_t)$ ein Martingal ist, so dass insbesondere für alle t gilt: $E[\exp(-\frac{\nu^2}{2}t+\nu W_t)] = 1.$

Ferner: Benutze N(2,33) = 0,99, wenn N wie üblich die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Lösungsskizze:

Zu (i) :

Ist V(t) der Wert der Vermögensanlage, so gilt in kleinen Zeitabschnitten für die Dynamik der Inkremente, wenn man b Anteile in der riskanten Anlage hält und 1-b Anteile in der risikolosen Anlage:

$$dV(t) = b\cdot(\mu\cdot V(t)\cdot dt + v\cdot V(t)\cdot dW_t) + (1-b)\cdot V(t)\cdot r\cdot dt = (b\cdot\mu + (1-b)\cdot r)\cdot V(t)\cdot dt + b\cdot v\cdot V(t)\cdot dW_t$$

und hieraus ergibt sich

$$(1)\qquad V(t) = \exp((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2})t + bv\cdot W_t),$$

wenn man das Anfangsvermögen auf 1 normiert. Der Driftparameter ist also $b\mu+(1-b)r$ und der Volatilitätsparameter ist dann bv.

Zu (ii):

Es ist nach Gleichung (1) von (i): $E[V(1)] = E[\exp((b\mu+(1-b)r - \frac{b^2v^2}{2})1 + bv\cdot W_1)] =$ $E[\exp((b\mu+(1-b)r)] = \exp(b\mu+(1-b)r)$ unter Beachtung des Hinweises und damit ist E[V(1)] genau dann größer als V(0), wenn $b\mu+(1-b)r > 0$ gilt. Wenn r nicht kleiner als 0 ist, ist das immer der Fall für b zwischen 0 und 1. Das kann man aber voraussetzen, da für r < 0 niemand Geld anlegen würde.

Zu (iii):

Man definiere r_G durch 1.0125 = exp(r_G), d.h. r_G = 0.01242252…, dann hat man zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit: $P(V(1)\geq e^{r_G 1})$ nur die Formel von Teil (i) zu verwenden. Das ergibt:

$$P(V(1)\geq e^{r_G\cdot 1}) = P(\exp((b\mu+(1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}) + bv\cdot W_1) \geq e^{r_G}) =$$

$$= P(((b\mu+(1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}) + bv\cdot W_1) \geq r_G) = P(W_1 \geq \frac{(r_G - (b\mu+(1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b\cdot v}) =$$

$$1 - N(\frac{(r_G - (b\mu+(1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b\cdot v}),$$

wenn wie üblich N(.) die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist.
Nun ist die Forderung $P(V(1) \geq e^{r_G 1}) \geq 0.99$ genau dann erfüllt, wenn

$$N(\frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2 v^2}{2}))}{b \cdot v}) \leq 0.01 \text{ gilt.}$$

Wegen r_G = 0.01242252… und N(-2.33) = 0.01 hat man dann

die Gleichung $\frac{(\mathrm{r_G} - (\mathrm{b}\mu + (1-\mathrm{b})\mathrm{r} - \frac{\mathrm{b}^2\mathrm{v}^2}{2}))}{\mathrm{b} \cdot \mathrm{v}} = -2.33$ nach b aufzulösen. Das ergibt folgende Gleichungskette:

$$\frac{0.0124 - (b \cdot 0.06 + (1-b) \cdot 0.0135 - b^2 \cdot 0.02}{b \cdot 0.2} = -2.33 \quad \text{, also}$$

- 0.2 b 2.33 = - 0.466 b = 0.0124-0.0135+0.0135 b – 0.06 b + 0.02 b^2 und damit

0.02 b^2 + 0.4195 b – 0.0011 = 0 d.h. b^2 + 20.975 b – 0.055 = 0.

$(b + 10.4875)^2 = 109.9877 + 0.055 = 110.0426 = (10.49012)^2$, das ergibt dann

b + 10.4875 = 10.4901 und damit b = 0.0026.

Das ernüchternde Ergebnis ist, dass bei diesen Modellannahmen nur 2.6 Promille des Vermögens in den Aktienfonds investiert werden dürfen, wenn man die genannte Verzinsung mit 99% Sicherheit erreichen will.

Aufgabe 4: (10 Minuten)

Bei zwei verschiedenen aktienindexgebundenen Lebensversicherungen mit Einmalbeitrag EB wird ein fester Prozentsatz i(p) der jährlichen Steigerungen eines Index durch Cliquet-Optionen abgesichert.
Wenn S(t) den Verlauf des betreffenden Index beschreibt, so wird bei der **ersten** Vertragsform folgende Ablaufleistung AL für den Kunden bei Ablauf T des Vertrages versprochen:

$$\text{AL} = EB \cdot \prod_{t=1}^{T} \{1 + i(p)(\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1)^+\} \quad .$$

Man vergleiche den Wert der beschriebenen indexgebundenen Versicherung mit einer **zweiten** Vertragsform, bei der neben sonst gleichen Daten die folgende Ablaufleistung versprochen wird:

$$\text{AL} = \text{EB} (1 + \text{i(p)} \sum_{t=1}^{T} (\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1)^+)).$$

Welches der beiden Ablaufversprechen ist aus Sicht des Kunden mehr wert und damit für das Versicherungsunternehmen teurer?

Bemerkung: Es wird kein spezielles Modell für den Preisprozess des betreffenden Index vorausgesetzt, die Antwort zu der gestellten Frage ist also modellunabhängig.

Lösungsskizze:

Für nichtnegative reelle Zahlen x_i gilt offenbar stets

$$1+\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \prod_{i=1}^{n}(1+x_i) = 1+\sum_{i=1}^{n} x_i + \text{Terme höherer Ordnung in den } x_i \;,$$

und daher ist das Ablaufversprechen der nach erster Vertragsform gestalteten Indexgebundenen Versicherung für den Kunden mehr wert als das der Versicherung nach Vertragsform zwei.

Block III (Maurer)

Aufgabe 5: Internationale Investments und Währungssicherung (20 Minuten)

Als Assets stehen eine inländische Aktie und eine ausländische Aktie zur Verfügung. Die Volatilität der inländischen Aktie beträgt $\sigma_1 = Std[R_1] = 0{,}2$, die Volatilität der lokalen Rendite der ausländischen Aktie ist $\sigma_2 = Std[R_2] = 0{,}3$, die Volatilität der Wechselkursrendite ist $\sigma_e = Std[e] = 0{,}1$. Die erste Aktie ist sowohl unkorreliert zu der zweiten Aktie als auch zum Wechselkurs. Die zweite Aktie ist positiv zum Wechselkurs korreliert mit $\rho = 0{,}2$.

Hinweise: Gehen Sie bei allen Rechnungen davon aus, dass die Kreuzproduktterme bei der Gesamtrendite verschwinden, dass also gilt: $R_2^{€} = R_2 + e$. Da in dieser Aufgabe nur Minimum-Varianz-Portfolios (MVP) betrachtet werden, sind die erwarteten Renditen irrelevant.

a) Bestimmen Sie die Portfoliogewichte und die Varianz der Rendite des Minimum-Varianz-Portfolios (MVP) aus den beiden Assets, wenn das Wechselkursrisiko der zweiten Aktie nicht abgesichert wird. **(5 Minuten)**
b) Sie wollen nun eine vollständige Währungssicherung des ursprünglichen Investitionsbetrages in der ausländischen Aktie mittels Devisenforwards durchführen. Bestimmen Sie die Portfoliogewichte und die Rendite-Varianz des MVP. **(5 Minuten)**
c) Sie wollen nun eine Währungssicherung mittels Devisenforwards im Kontext eines Currency Overlay durchführen, wobei die in a) ermittelten Portfoliogewichte fixiert sind. Bestimmen Sie die Hedgeratio h, welche die Varianz der Portfoliorendite minimiert. Was ist die resultierende Rendite-Varianz dieses MVP? **(5 Minuten)**
d) Bestimmen Sie die Portfoliogewichte, die Hedgeratio und die resultierende Rendite-Varianz für das MVP, wenn über Portfoliogewichte und Hedgeratio simultan optimiert wird. **(5 Minuten)**

Lösungsskizze:

Varianzen lokale Renditen:

$$Var[R_1] = \sigma_1^2 = 0.2^2 = 0.04$$
$$Var[R_2] = \sigma_2^2 = 0.3^2 = 0.09$$

Wechselkurskovarianz und Gesamtrendite (Sicht europäischer Investor) zweite Aktie :

$$Cov[R_2, e] = \rho\, \sigma_2\sigma_e = 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.1 = 0.006$$
$$\begin{aligned} Var\left[R_2^{€}\right] &= Var[R_2 + e] = Var[R_2] + Var[e] + 2 \cdot Cov[R_2, e] \\ &= 0.09 + 0.1^2 + 2 \cdot 0.006 \\ &= 0.112 \end{aligned}$$

a) Da keine Korrelation zwischen inländischen und ausländischen Aktie besteht, ergibt sich die Varianz eines Portfolios aus beiden Aktien zu (x relatives Gewicht Aktie 1):

$$\begin{aligned} Var[R_{PF}] &= x^2\, Var[R_1] + (1-x)^2\, Var\left[R_2^{€}\right] \\ &= x^2 \cdot 0.04 + (1-x)^2 \cdot 0.112 \end{aligned}$$

Minimierung $\frac{d}{dx}(\ldots) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= 2x\, Var[R_1] - 2(1-x) Var\left[R_2^{€}\right] \\ \Leftrightarrow x &= \frac{Var\left[R_2^{€}\right]}{Var[R_1] + Var\left[R_2^{€}\right]} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{0.112}{0.04 + 0.112} \\ \Leftrightarrow x &= 73.68\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[R_{MVP}] &= 0.7368^2 \cdot 0.04 + (1 - 0.7368)^2 \cdot 0.112 \\ &= 0.02947 \qquad (\rightarrow Std[R_{MVP}] = 17.17\%\,) \end{aligned}$$

b) Im Fall einer vollständigen Absicherung ergibt sich $Var\left[R_2^{€}\right] = Var[R_2] = 0{,}09$

$$Var[R_{PF}] = x^2 \cdot 0.04 + (1-x)^2 \cdot 0.09$$

Minimierung $\frac{d}{dx}(\ldots) = 0$:

$$\Leftrightarrow x = \frac{Var\left[R_2^{€}\right]}{Var[R_1] + Var\left[R_2^{€}\right]} \Leftrightarrow x = \frac{0.09}{0.04 + 0.09} \Leftrightarrow x = 69.23\%$$

$$\begin{aligned} Var[R_{MVP}] &= 0.6923^2 \cdot 0.04 + (1 - 0.6923)^2 \cdot 0.09 \\ &= 0.02769 \qquad (\rightarrow Std[R_{MVP}] = 16.64\%\,) \end{aligned}$$

c) Vernachlässigung $R_2 \cdot e$-Terms ergibt die währungsgehedgete Rendite zweite Aktie:

$$\begin{aligned} R_2^{€,h} &= R_2 + e + h \cdot (f - e) \\ &= R_2 + (1-h) \cdot e + h \cdot f \end{aligned}$$

Da Forwardprämie f keine Zufallsvariable, ist Varianz der gehedgeten Rendite:

$$\begin{aligned} Var\left[R_2^{€,h}\right] &= Var[R_2] + Var[(1-h) \cdot e] + 2 \cdot Cov[R_2, (1-h) \cdot e] \\ &= Var[R_2] + (1-h)^2 \cdot Var[e] + 2\,(1-h) \cdot Cov[R_2, e] \\ &= 0.09 + (1-h)^2\, 0.01 + (1-h) \cdot 0.012 \end{aligned}$$

Minimierung$\frac{d}{dh}(\ldots) = 0$:

$$0 = 0 - 2(1-h)\,0.01 - 0.012$$

$\Leftrightarrow h = \frac{0.01+0.006}{0.01} = \frac{Var[e]+Cov[R_2,e]}{Var[e]} = 1.6$

Anmerkung: Die positive Korrelation $\rho = 0.2$ bewirkt eine Hedgeratio größer 1.

$$\begin{aligned} Var\left[R_2^{€,h=1.6}\right] &= 0.09 + (1-1.6)^2\,0.01 + (1-1.6)\cdot 0.012 \\ &= 0.0864 \qquad \left(< Var\left[R_2^{€}\right] = 0.112\right) \end{aligned}$$

Benutzen wir die Portfoliogewichte aus a) und wenden diesen Währungshedge an (was eben einem *Currency Overlay* entspricht), so ergibt sich für die Varianz des MVP:

$$\begin{aligned} Var[R_{MVP}^{CO}] &= 0.7368^2 \cdot 0.04 + (1-0.7368)^2 \cdot 0.0864 \\ &= 0.02770 \qquad (\rightarrow Std[R_{MVP}^{CO}] = 16.64\%\,) \end{aligned}$$

Leichte Reduktion der Varianz im Vergleich zum ungehedgeten Fall.

d) Die Varianz eines Portfolios mit Währungshedge ist:

$$Var[R_{PF}] = x^2\,Var[R_1] + (1-x)^2\,Var\left[R_2^{€,h}\right]$$

wobei $Var\left[R_2^{€,h}\right] = Var[R_2] + (1-h)^2 \cdot Var[e] + 2\,(1-h)\cdot Cov[R_2,e]$

Bei simultaner Optimierung über x und h müssen folgende zwei Gleichungen gelten:

$$\frac{d}{dx}\,Var[R_{PF}] = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dh}Var[R_{PF}] = 0$$

Da $Var[R_1]$ unabhängig von der Hedgeratio, erhält man für die zweite Gleichung:

$$0 = 0 + (1-x)^2\,\frac{d}{dh}\,Var\left[R_2^{€,h}\right]$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dh}Var\left[R_2^{€,h}\right]$$

Diese Gleichung ist unabhängig von x (die beiden Gleichungen „separieren“) und wir können somit zuerst für die Hedgeratio lösen (wurde bereits in c) gelöst mit $h = 1.6$ und $Var\left[R_2^{h=1.6}\right] = 0.0864$). Im Gegensatz zum Currency Overlay aus c), verwenden wir nun diese Varianz um Portfoliogewichte zu bestimmen (Rechnung analog zu c):

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\,Var[R_{PF}] = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 0 = 2x\,Var[R_1] - 2(1-x)Var\left[R_2^{€,h=1.6}\right] \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{Var\left[R_2^{€,h=1.6}\right]}{Var[R_1] + Var\left[R_2^{€,h=1.6}\right]} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{0.0864}{0.04 + 0.0864} \\ \Leftrightarrow\ & x = 68.35\% \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Varianz für unser optimales MVP:

$$\begin{aligned} Var\left[R_{MVP}^{opt}\right] &= 0.6835^2 \cdot 0.04 + (1-0.6835)^2 \cdot 0.0864 \\ &= 0.02734 \qquad (\rightarrow Std\left[R_{MVP}^{opt}\right] = 16.54\%\,) \end{aligned}$$

Aufgabe 6: Devisenmärkte (10 Minuten)

Sie wollen €1 Mio. in den Schweizer Aktienmarkt repräsentiert durch den SMI (einem wichtigen Aktienindex) investieren. Der Investitionszeitraum beträgt ein Jahr. Der aktuelle Wechselkurs des Schweizer Franken zum Euro beträgt 1,21 CHF/€ und der SMI notiert heute bei 8.453 Punkten. Sie sichern den ursprünglichen Investitionsbetrag in Fremdwährung vollständig durch Devisenforwards (Laufzeit 1 Jahr), die arbitragefrei bewertet sind. Das Zinsniveau in der Schweiz liegt bei 0,5 % p.a. und im Euroraum bei 1% p.a. Ein Jahr später notiert der Wechselkurs bei 1,30 CHF/€ und der SMI steht bei 8.000 Punkten. Was ist der Wert des Investments (in Euro) nach einem Jahr?

Lösungsskizze:

Forwardpreis = 1/1,21 * 1,01/1,005 = 1/1,204 = 0,8306 €/SFR (= 1,2039 SFR/€)

In t = 0:

Umtausch 1 Mio. € in SFR = 1,21 Mio. SFR → Investment in SMI

Verkauf von 1,21 Mio. SFR auf Termin zum Forwardkurs von 0,8306 €/SFR

In t = 1

Wert SMI Investment in SFR = 1,21 Mio. SFR * 8000/8453 = 1.145.156 SFR

Wert SMI Investment in Euro: 1.145.156 * 1/1,3 = **880.889 €**

Ergebnis Devisenforward: 1,21 Mio. SFR * (0,8306 €/SFR – 1/1,3 €/SFR) = **74.206 €**

Gesamtwert: 880.889 + 74.206 = **955.095 €**

Alternative Berechnung

Lokale Rendite = 8000/8453-1 = -5,36%

WK-Rendite = (1/1,3 – 1/1,21)/(1/1,21) = -6,92%

Forwardprämie = 1,01/1,005 – 1 = 0,5%

Gesamtrendite = -5,36% + 5,36%*6,92% + 0,5% = -4,49%

Wert-Investment 1 Mio. € * (1-4,49%) = 0,955 Mio. €

Aufgabe 7: Entnahmepläne und Shortfallrisiken (30 Minuten)

Als Assistent der Geschäftsführung eines Pensionsfonds sind Sie mit der Konzeption von Auszahlplänen gegen Einmalbeitrag beschäftigt. Der vom Kunden eingezahlte Betrag (abzüglich Kosten) wird in Immobilienfonds-Anteile (IF) investiert. Es können beliebige Bruchteile eines Anteils zum jeweiligen Marktwert erworben/zurückgegeben werden. Sie erwarten für die auf kontinuierlicher Basis berechneten jährlichen (Log-)Renditen R_t des IF-Investments (vor Kosten) eine mittlere Rendite von 4% p.a., bei einer Volatilität von 2% p.a. und einer Autokorrelation 1. Ordnung von a = 0,6. Der aktuelle Preis für einen Fondsanteil beträgt EUR 10. Bei Kauf wird ein Ausgabeaufschlag von 5% auf den Anteilspreis erhoben. Unterstellen

Sie im Folgenden normalverteilte iid-Renditen mit adjustierter Volatilität nach dem Blundell/Ward-Verfahren. Vernachlässigen Sie Sterblichkeitsaspekte.

a) Auszahlungsplan 1: Der Auszahlplan ist wie folgt konstruiert: **(20 Minuten)**

- Der Kunde zahlt einen Einmalbeitrag von 100.000 Euro, der vollständig in Anteile des Immobilienfonds investiert wird.
- Zu Beginn jeden Jahres werden so viele Fondsanteile zurückgegeben, dass eine Auszahlung (B_t) an den Kunden in Höhe von 10% des zu Jahresbeginn jeweils noch vorhandenen Fondsvermögens (V_t) zustande kommt (B_t = 0,1V_t). Die erste Auszahlung erfolgt nach einem Jahr t=1 (d.h. B_0 = 0).

  Wie groß ist (nach Kosten) die Shortfall-Wahrscheinlichkeit, dass nach Ablauf von t=5 bzw. t=20 Jahren die Auszahlung geringer ist als 10.000 Euro?

  Wie groß ist (nach Kosten) das erwartete verbleibende Restvermögen, wenn der Kunde nach t=5 bzw. t=20 Jahren stirbt?

b) Auszahlungsplan 2: Im Unterschied zu Auszahlplan 1 werden zu Beginn des Jahres so viele Fondsanteile zurückgegeben, dass eine Auszahlung an den Kunden in Höhe von (möglichst) 10.000 Euro erreicht wird. Sie sind weiterhin an der Shortfall-Wahrscheinlichkeit interessiert, dass nach Ablauf von t=5 bzw. t=20 Jahren die Auszahlung geringer als 10.000 Euro ist. Ist eine analytische Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeiten möglich? Im Vergleich zu Aufgabe a), sind die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten nach t=5 bzw. t=20 Jahren höher oder geringer? (Anmerkung: Es sind keine expliziten Berechnungen nötig, geeignete Argumente genügen). **(10 Minuten)**

Hinweise: Sei X ~ LN(m, v²) eine logarithmisch normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern m und v², und N_α das α-Quantil der Standardnormalverteilung (siehe Tabelle im Anhang), dann gilt aX^b ~ LN(lna + bm, b²v²) sowie für Erwartungswert, Varianz, und α-Quantil

$$E(X) = e^{m+0,5v^2}$$
$$Var(X) = E(X)^2\left(e^{v^2} - 1\right)$$
$$LN_\alpha(m, v^2) = e^{m+N_\alpha \cdot v} = e^{m-N_{1-\alpha}\cdot v}$$

Das Blundell/Ward-Verfahren korrigiert die Varianz gemäß: $VAR(r_t^*) = VAR(r_t)\dfrac{1-a^2}{(1-a)^2}$.

Lösungsskizze:

a) Korrektur von STD (=v) der Einperioden-Logrendite (U_t) gemäß BW-Verfahren:

$$v = 2\% \cdot \sqrt{\frac{1-0,6^2}{(1-0,6)^2}} = 4\% \text{ damit Logrendite } U_t \sim N(4\%, 4\%)$$

Startvermögen $V_0 = \frac{€100,000}{1.05} = €95.238,10$. Entwicklung des Fondsvermögens (t = 1, 2, …) vor Auszahlung von B_t

$$V_t = (0{,}9)^{t-1} * V_0 * \exp\left(\sum_{i=1}^{t} U_i\right)$$

$$E(V_t) = 0.9^{t-1} * V_0 * e^{tm+\frac{1}{2}tv^2}$$

$$E(V_5) = €76.626$$

$$E(V_{20}) = €26.094$$

Entwicklung Auszahlungen

$$B_t = 0{,}1 * V_t = 0{,}1 * 0{,}9^{t-1} * V_0 * \exp(\textstyle\sum_{i=1}^{t} U_i)\ B_t \sim LN(m_t, v_t)$$

$$m_5 = \ln(V_0 \cdot 0{,}90^{5\text{-}1} \cdot 0{,}1) + 5 \cdot 0{,}04) = 8{,}94; m_{20} = \ln(V_0 \cdot 0{,}90^{20\text{-}1} \cdot 0{,}1) + 20 \cdot 0{,}04) = 7{,}96$$

$$v_5 = \sqrt{5} \cdot v = 0{,}0894; v_{20} = \sqrt{20} \cdot v = 0{,}1789$$

$$SW = P(B_t < 10.000) = P\left(\frac{\ln(B_t) - m_t}{v_t} < \frac{\ln(10.00) - m_t}{v_t}\right) = \Phi\left(\frac{\ln(10.000) - m_t}{v_t}\right)$$

$$SW_5 = \Phi\left(\frac{\ln 10.000 - m_5}{v_5}\right) = 99{,}87\%; \qquad SW_{20} = \Phi\left(\frac{\ln 10000 - m_{20}}{v_{20}}\right) > 99{,}99\%$$

Φ ist Wert der Standardnormalverteilung.

b) Die zeitliche Entwicklung des Fondsvermögen ergibt sich wie folgt

$$V_1 = \max(100.000 * \exp(U_1) - 10.000; 0)$$
$$V_2 = \max(V_1 * \exp(U_2) - 10.000; 0)$$
$$= \max[100.000 * \exp(U_1) * \exp(U_2) - 10.000 * \exp(U_2) - 10.000; 0]$$

Das Vermögen ergibt sich als Summe log-normalverteilter Zufallvariablen (deren Verteilung nicht bekannt ist) und ist auch pfadabhängig. Die zeitliche Entwicklung der Auszahlungen ergibt sich

$$B_t = \min(10.000; V_t)$$

Damit kann auch die Verteilung von B_t nicht einfach in geschlossener analytischer Form bestimmt werden. Insofern ist man auf numerische Verfahren, etwa Monte-Carlo Simulation angewiesen

Abschätzung Shortfallwahrscheinlichkeit: Ein Shortfall tritt erst dann ein, wenn das Fondsvermögen aufgebraucht (bzw. geringer als 10.000) ist. Das relativ risikoarm (Vola =4%) angelegte Fondsvermögen von 95.238 (nach Kosten) wird mit hoher Wahrscheinlichkeit reichen, die Auszahlungen der ersten fünf Jahre i.H.v. 5 * 10.000 = 50.000 zu finanzieren. Die Shortfallwahrscheinlichkeit von Plan 2 ist daher deutlich geringer als von Plan 1. Nach 20 Jahren wird das Fondsvermögen bei Plan 2 allerdings mit hoher Wahrscheinlichkeit völlig aufgebraucht sein. Insofern wird die Shortfall-wahrscheinlichkeit weniger als 10.000 zu erhalten ähnlich hoch sein wie bei Plan 1 (in der sie bei fast 100% liegt). Im Unterschied zu Plan 1 wird die erwartete Auszahlung allerdings bei (fast) 0 liegen, wogegen beim Plan 1 im Erwartungswert noch ca. € 2.909 gezahlt wird.

Anhang

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung Φ(x)

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000