Prüfung DAV-Spezialwissen in Finanzmathematik 2016

Block I (Albrecht)

Aufgabe 1: (20 Minuten)

Gegeben sei eine Europäische Putoption auf einen dividendenfreien Basistitel mit Laufzeit T, deren heutiger Preis P_t beträgt und die nach Black/Scholes bewertet ist.

a) Wie lautet die approximative Änderung des Putwerts über das Zeitintervall [t, t+h] unter Anwendung der Delta-Approximation?

b) Wie hoch ist der Value at Risk der Option über ein Intervall der Länge h unter Anwendung der Delta-Normal-Methode? Dabei sei die Rendite R_h des Basistitels gegeben durch $R_h \sim N(\mu h, \sigma^2 h)$.

c) Wie lautet die approximative Änderung des Putwerts über das Zeitintervall [t, t+h] unter Anwendung der Delta-Exakt-Approximation?

d) Bestimmen Sie nun für die Put-Position den Value at Risk zum Signifikanzniveau α über das Zeitintervall [t, t+h] auf der Basis einer Delta-Exakt-Approximation. Unterstellen Sie dabei für die Log-Rendite des Basisobjekts $U_h \sim N(0, v^2 h)$.

Hinweise:

1) Das Put-Delta eines Europäischen Put lautet im Falle von Black/Scholes-Preisen $\Delta_P(t) = -\Phi[-d_1(t)]$.
2) Setzen Sie den Value at Risk im Normalverteilungsfall als bekannt voraus und ebenso die Transformationseigenschaften von Quantilen.

Lösungsskizze:

a) Deltaapproximation der Putposition:

$$\Delta P := P_{t+h} - P_t \approx \Delta_P(t)(S_{t+h} - s_t),$$

wobei $\Delta_p(t) = \partial P / \partial S$ („Put-Delta")

Nach Hinweis gilt im Black/Scholes-Fall:

$$\Delta_P(t) = \partial P/\partial S = -\Phi(-d_1)$$

b) Es gilt:

$\Delta P = -\Phi(-d_1)\, s_t\, R_h$

$E(\Delta P) = -\Phi(-d_1)\, s_t\, \mu h$

$\sigma(\Delta P) = \Phi(-d_1)\, s_t\, \sigma\sqrt{h}$

$L_P = -\Delta P$, $E(L_P) = -E(\Delta P)$, $\sigma(L_P) = \sigma(\Delta P)$

Value at Risk im Normalverteilungsfall:

$\mathrm{VaR}_\alpha = E(L) + N_{1-\alpha}\sigma(L)$

ΔP und damit L_P normalverteilt, somit insgesamt:

$$\mathrm{VaR}_\alpha = N_{1-\alpha}\,\Phi(-d_1)\,s_t\,\sigma\sqrt{h} + \Phi(-d_1)\,s_t\,\mu h$$
$$= \Phi(-d_1)\,s_t\,[N_{1-\alpha}\,\sigma\sqrt{h} + \mu h].$$

c) Mit $\Delta S = s_t\,(e^{U_h} - 1)$ und $\Delta_P(t) = -\Phi(-d_1)$ lautet die Delta-Approximation

$$\Delta P = P_{t+h} - P_t \approx -\Phi(-d_1)s_t\,(e^{U_h} - 1).$$

d) Definiere die Verlustvariable $L_P = -\Delta P$. Es folgt:

$$L_P = -\frac{\partial P}{\partial S_t}\Delta S$$
$$= \Phi(-d_1)\,\Delta S$$
$$= \Phi(-d_1)s_t\,(e^{U_h} - 1).$$

Aufgrund der Transformationseigenschaften von Quantilen folgt des Weiteren:

$$\mathrm{VaR}_\alpha = Q_{1-\alpha}\,(L_P)$$
$$= \Phi(-d_1)s_t\{\exp[Q_{1-\alpha}\,(U_h) - 1\}$$
$$= \Phi(-d_1)s_t\{\exp[N_{1-\alpha}\,v\sqrt{h}\ - 1\}$$

<u>Aufgabe 2:</u> (10 Minuten)

Betrachten Sie einen dreijährigen Zerobond mit Rückzahlungsbetrag 500. Die dreijährige annualisierte Spot Rate betrage $r_3 = 1\%$. Die zufallsabhängige Wertänderung ΔR_3 der dreijährigen Spot Rate auf täglicher Basis sei normalverteilt, $\Delta R_3 \sim N(0, \sigma^2)$. Die tägliche Volatilität betrage $\sigma(\Delta R_3) = 0.05\%$.

Bestimmen Sie den Mean-Value at Risk zum Signifikanzniveau α auf Tagesbasis unter Zugrundelegung der Delta-Normal-Approximation sowie unter Benutzung der Key Rate-Duration!

<u>Lösungsskizze:</u>

Es gilt zunächst

$$P_0 = N\,(1 + r_3)^{-3} = 500\,(1.01)^{-3} = 500\,(0.9705) = 485.295.$$

Die Key Rate-Duration eines Zerobond entspricht seiner Laufzeit (hier: T=3), für die Preisänderung gilt damit approximativ

$$\Delta P = -P \frac{3}{1+r_3} \Delta R_3 = -485.295 \frac{3}{1.01} \Delta R_3 = -1441.47 \cdot \Delta R_3 \ .$$

Für die Standardabweichung der täglichen Wertänderung gilt entsprechend mit L:= - ΔP

$$\sigma(L) = \sigma(\Delta P) = 1441.47 \cdot \sigma(\Delta R_3) = 1441.47 \cdot 0.0005 = 0.7207 \ .$$

Für den MVaR zum Signifikanzniveau α gilt dann

$$MVaR = 0.7207 \cdot N_{1-\alpha} \ ,$$

wobei $N_{1-\alpha}$ das (1-α)-Quantil der Standardnormalverteilung bezeichne.

<u>Aufgabe 3 :</u> (10 Minuten)

Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die Credit Spread-Rate CS(t,T) eines ausfallbedrohten Zerobond mit Nennwert N = 1 in Abhängigkeit von den Preisen B(t,T) bzw. B^d(t,T) eines ausfallfreien bzw. ausfallbedrohten Zerobond. Gehen Sie dabei aus von der risikolosen fristigkeitsabhängigen Zinsrate u(t,T).

<u>Lösungsskizze:</u>

Für einen ausfallfreien Zerobond mit Fälligkeit T und N = 1 gilt unter der Annahme einer zeitstetigen Verzinsung zur fristigkeitsabhängigen Zinsrate u(t, T) die Bewertungsgleichung

$$B(t,T) = \exp[- u(t,T)(T-t)].$$

Entsprechend gilt für einen ausfallbedrohten Zerobond

$$\begin{aligned} B^d(t,T) &= \exp\{-[u(t,T) + CS(t,T)](T-t)\} \\ &= B(t,T)\exp[-CS(t,T)(T-t)] \end{aligned}$$

und damit insgesamt

$$CS(t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln [B^d(t,T) / B(t,T)].$$

<u>Aufgabe 4 :</u> (20 Minuten)

Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho(D_i, D_j)$ zwischen den Ausfallindikatoren D_i und D_j unter Zugrundelegung des Standard-Einfaktor-Defaultmodells für die Bonitätsvariablen Y_i und Y_j. Drücken Sie dabei die gesuchte Größe vollständig als Funktion der univariaten Ausfallwahrscheinlichkeiten PD_i und PD_j sowie der Korrelation der Bonitätsvariablen aus.

<u>Hinweise:</u>

1) Es bezeichne $\Phi_2(..,..;\rho)$ die Verteilungsfunktion der bivariaten korrelierten Standard-

normalverteilung mit Korrelationskoeffizient ρ.

2) Es gilt $\rho(Y_i, Y_j) = \sqrt{\rho_i \rho_j}$.
3) Verwenden Sie $E(D_i) = PD_i, Var(D_i) = PD_i(1-PD_i)$ sowie $E(D_i D_j) = P(D_i = 1, D_j = 1)$.

<u>Lösungsskizze:</u>

Die Bonitätsvariablen $Y_1,\ldots,Y_n$ sind multivariat korreliert standardnormalverteilt.

Weiter gilt $D_i = 1 \Leftrightarrow Y_i < H_i$.

Per Definition gilt

$$\rho_{ij} := \rho(D_i, D_j) = \frac{Cov(D_i, D_j)}{\sigma(D_i)\sigma(D_j)} = \frac{E(D_i D_j) - E(D_i)E(D_j)}{\sigma(D_i)\sigma(D_j)} .$$

Nach Hinweis haben wir

$$E(D_i) = PD_i ,$$
$$Var(D_i) = PD_i(1-PD_i)$$
$$\begin{aligned} E(D_i D_j) &= P(D_i = 1, D_j = 1) \\ &= P(Y_i \le H_i, Y_j \le H_j) \\ &= \Phi_2\left(H_i, H_j; \sqrt{\rho_i \rho_j}\right). \end{aligned}$$

Aus $PD_i = P(Y_i < H_i) = P(Y_i \le H_i) = \Phi(H_i)$

folgt ferner $H_i = \Phi^{-1}(PD_i)$.

und damit

$$E(D_i D_j) = \Phi_2\left(\Phi^{-1}(PD_i), \Phi^{-1}(PD_j); \sqrt{\rho_i \rho_j}\right).$$

Insgesamt haben wir somit

$$\rho_{ij} = \frac{\Phi_2\left(\Phi^{-1}(PD_i), \Phi^{-1}(PD_j); \sqrt{\rho_i \rho_j}\right) - PD_i \cdot PD_j}{\sqrt{PD_i \cdot (1-PD_i)} \cdot \sqrt{PD_j \cdot (1-PD_j)}} .$$

Block II (Bartels)

Aufgabe 5: (25 Minuten)

Der Vermögensanleger eines Versicherungsunternehmens verfolgt kontinuierlich eine Anlagestrategie, die 5% Anteile des Gesamtvermögens in einen Aktienfonds und komplementär 95% Anteile des Anlagevermögens in einen risikolosen Geldmarktfonds investiert. Der Preisprozess $\{S_t | 0 \le t \le T\}$ des genannten Aktienfonds folge einer geometrischen Brownschen Bewegung, etwa $S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{v^2}{2})t + vW_t}$, mit einem zu schätzenden Drift μ und $v = 0.2$.

Der risikolose Geldmarktfonds entwickelt sich kontinuierlich mit einer festen exponentiellen Zinsrate r weiter, etwa: $B_t = B_0 \cdot e^{rt}$, so dass der Aufzinsungsfaktor in einem Jahr $e^r = 1.015$ beträgt, d.h. der Zinssatz für ein Jahr ist 1.5%. Man unterstelle, dass in einem zeitstetigen Modell idealisiert diese kontinuierliche Anlagestrategie mit den anvisierten proportionalen Anteilen wirklich möglich ist, so dass für das Gesamtvermögen V(t) zur Zeit t bei einem Anfangsvermögen von 1 der Wert $V(t) = \exp((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2})t + bv \cdot W_t)$ resultiert.

Wie hoch muss der Drift μ mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei diesen Modellannahmen in einem Jahr mindestens einen Zins von 1.25 % erwirtschaftet, größer oder gleich 95% ist? Man gebe einen expliziten numerischen Wert für μ an und verwende hierbei den Wert $\Phi(1{,}645) \approx 0.95$ der Standard-Normalverteilung!

Lösungsskizze:

Definiert man r_G durch $1.0125 = \exp(r_G)$, d.h. $r_G = 0.01242252\ldots$, dann berechnet sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit den Parametern der Aufgabe folgendermaßen:

$$P(V(1) \ge e^{r_G \cdot 1}) = P(\exp((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}) + bv \cdot W_1) \ge e^{r_G}) =$$

$$= P(((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}) + bv \cdot W_1) \ge r_G) = P(W_1 \ge \frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b \cdot v}) =$$

$$1 - N(\frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b \cdot v}) = N(-\frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b \cdot v}),$$

wenn wie üblich N(.) die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist. Der in der letzten Gleichung rechts stehende Term ist offenbar streng monoton wachsend als Funktion des Drifts μ: Für größeres μ ergeben sich größere Erfolgswahrscheinlichkeiten. Daher genügt es, die Gleichung $N(-\frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b \cdot v}) = 0.95$ folgendermaßen nach μ aufzulösen:

$$-\frac{(r_G-(b\mu+(1-b)r-\frac{b^2v^2}{2}))}{b\cdot v}=1.645 \text{ , also } \mu=\frac{1}{b}(1.645\cdot b\nu+r_G+\frac{b^2v^2}{2}-(1-b)r) \; .$$

Nun ist r = ln(1.015) = 0.014886… , so dass sich bei den hier vorliegenden numerischen Daten ergibt:

μ = 20 (0.01645 + 0.01242252… + 0.00005 - 0.0141417) = 0.295616…

Das heißt: Der Driftterm müsste schon knapp 30% betragen, damit man mit der angegebenen Strategie in diesem Modellkontext mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% die gewünschte Mindestverzinsung von 1.25% erreicht.

Aufgabe 6 : **(10 Minuten)**

Ein Hedgefonds-Manager studiert den Kurszettel für die Preise von einjährigen europäischen Put- bzw. Call-Optionen. Dabei findet er für die Aktien eines Unternehmens U unter anderem folgende Put- und Call-Preise mit gleichem Ausübungszeitpunkt in einem Jahr und demselben Ausübungspreis K = 100 € :
Preis der Put-Option: 2.50 €
Preis der Call-Option: 13.09 €
Der aktuelle Zins am Markt beträgt 1.2% für einjährige Kapitalanlagen und der aktuelle Kurs der Aktie des Unternehmens U beträgt 110 €.
(i) Mit welcher Arbitrage-Strategie kann er hieraus aufgrund der obigen Preisrelation seinen Nutzen ziehen?
(ii) Man beschreibe explizit numerisch den resultierenden Arbitragegewinn.

Hinweis: Leerverkäufe von Aktien und Derivaten werden als erlaubt und möglich vorausgesetzt.

Lösungsskizze:

Es bezeichnen S = S(t) den Preis einer Aktie und P(S,t) bzw. C(S,t) die Preise für Europäische Put- bzw. Call-Optionen mit Ausübungspreis K und Ausübungszeitpunkt T . Dann gilt für $t < T$ in allen arbitragefreien Modellen die Put-Call- Relation:

$$P(S,t) + S(t) = e^{-r(T-t)}K + C(S,t) \; .$$

Begründung:

Zum Ausübungstermin T liefern die beiden folgenden Portfolios denselben Wert:

Portfolio 1: 1 Aktie + 1 Put-Option auf diese Aktie mit Ausübungspreis K zum Ausübungszeitpunkt T ;

Portfolio 2: 1 Call-Option auf die betreffende Aktie mit Ausübungspreis K und Ausübungszeitpunkt T + Barbetrag K zum Zeitpunkt T

Diese Put-Call Relation ist bei der angegebenen einjährigen Zinsrate offenbar nicht erfüllt:

Wegen 100/1.012 = 98.81 hat man einerseits für den Preis der Put-Option und Basispapier 2.50 + 110 = 112.50 und dem stehen gegenüber: 98.81 + 13.09 = 111.90.
Eine explizite Arbitrage-Strategie zur Ausnutzung dieser Preisinkonsistenz bei den Puts und Calls ist daher:

Verkaufe je eine Aktie und eine Put-Option zur Zeit t = 0, Ergebnis: 112.50 €.
Kaufe gleichzeitig je einen Call und legt den Geldbetrag 98.81 = 100/1.012 zu 1.2% für ein Jahr an, der Aufwand ist: 111.90 € und deckt die Verpflichtungen zum Jahresende aus dem Verkauf der Aktie und der Put-Option. Die Differenz: 112.50 – 111.90 = 0.60 ist dann der Arbitragegewinn pro Position zum Jahresbeginn.

<u>Aufgabe 7 :</u> (25 Minuten)

Bei einer neuen Lebensversicherungspolice hat der Kunde jährlich die Möglichkeit, zwischen zwei Formen der Überschussbeteiligung in dem jeweiligen Versicherungsjahr zu wählen: Entweder er wählt einen für das Jahr angebotenen Überschusszins auf das relevante Guthaben G oder aber er entscheidet sich stattdessen für die Partizipation an der einjährigen Steigerung eines Aktienindexes. Bei dieser Partizipation verspricht das Unternehmen dem Kunden einen Partizipationssatz i(p) auf das genannte Guthaben G, d.h. es wird für den zweiten Fall eine Überschussbeteiligung in Höhe von $\max\left(0,\ \left(\frac{x(1)}{x(0)}-1\right)\cdot i(p)\cdot G\right)$ von dem Versicherungsunternehmen angeboten, dabei bezeichnet x(1) den Stand des Aktien-Index nach Ablauf eines Jahres und x(0) den Indexstand zu Beginn des Versicherungsjahres.
Für den Aktuar des Versicherungsunternehmens stellt sich zu Beginn des Versicherungsjahres die Lage am Kapitalmarkt so dar:
Der erzielbare Jahreszins für risikolose Anlagen ist 1.45 %, der Stand des Aktienindex beträgt 10 500 Punkte und europäische Calls mit einjähriger Laufzeit auf den Index zum Ausübungspreis 10 500 werden an der Terminbörse angeboten. 0.5 % des Guthabens G sollen zur Deckung von Verwaltungskosten und Biometrie zum Ende des Versicherungsjahres bei dem Unternehmen nach Überschusszuteilung noch verbleiben. Dem Kunden wird ein Partizipationssatz i(p) von 50% angeboten.

Was darf ein einjähriger Call auf den Index mit Ausübungspreis 10 500 maximal kosten, damit der Aktuar das in Aussicht gestellte Gewinnversprechen über den genannten Call kongruent decken kann?

<u>Lösungsskizze:</u>

Der Aktuar hat mit seiner Vermögensanlage folgende Leistungen zum Jahresende duplizieren:
- Falls der Kunde sich für den Garantiezins entscheidet, ist offenbar ein Zins von 0.95% maximal möglich, wenn 0.5% des Guthabens G zum Jahresende dem Unternehmen noch zur Verfügung stehen sollen.
- Falls der Kunde sich für die Indexpartizipation entscheidet, müssen folgende Beträge zum Jahresende verfügbar sein: Neben dem Betrag von 0.5% von G natürlich auch das Guthaben G selbst und eine Überschussbeteiligung in Höhe von

  $\max\left(0,\ \left(\frac{x(1)}{x(0)}-1\right)\cdot i(p)\cdot G\right)$, also insgesamt:

$$1.005\cdot G + \text{Max}\,(0,\ (\frac{x(1)}{x(0)}-1)\cdot i(p)\cdot G\ ) = \ 1.005\cdot G + i(p)\ \frac{G}{x(0)}(x(1)-x(0))^{+}$$, und

das erreicht man sicher dann, wenn man den Geldbetrag $1.005\cdot G$ sowie $i(p)\ \frac{G}{x(0)}$ Calls auf den Index mit dem Ausübungspreis x(0) zur Verfügung hat. Daher wird er zur kongruenten Deckung des Gewinnversprechens zu Beginn des Jahres $i(p)\ \frac{G}{x(0)}$ Calls auf den Index kaufen und den Geldbetrag $(1.005\cdot G)/1.0145$ festverzinslich zu 1.45% Verzinsung risikolos anlegen. Der maximale Call-Preis c berechnet sich demnach aus der aus der Gleichung

$G = \frac{1.005\cdot G}{1.0145} + i(p)\ \frac{G}{x(0)}\cdot c$ (c ist der Preis des Calls auf den Index zum Ausübungspreis x(0)). Bei den hier vorliegenden numerischen Daten ergibt sich dann:

$$c = \ (1-\frac{1.005}{1.0145})\cdot\frac{x(0)}{i(p)} = \ (1-\frac{1.005}{1.0145})\cdot\frac{10500\,)}{0.5} = \ 196.648...$$

Bei den hier vorliegenden Finanzmarktdaten darf der Call also nicht mehr als 196.65 € kosten, damit 50% Partizipation zugesagt werden können.

Block III (Maurer)

Aufgabe 8: Asset Allokation (10 Minuten)

Grenzen Sie ab und nennen Sie die Vor-/Nachteile von Lösungsansätzen der Schätzfehlerproblematik bei der Bestimmung optimaler Portfolios.

Lösungsskizze:

Optimale Portfolios, welche Informationen über die Erwartungswerte benötigen, können im zeitlichen Verlauf sehr instabil in den Portfoliogewichten sein. Grund: Schätzfehler bei den erwarteten Renditen. Heuristische Lösungsansätze (Resampling, Restriktionen, direkte Annahmen über Struktur der Renditeerwartungswerte) erzwingen einen höheren Diversifikatonsgrad, sind jedoch nicht theoretisch fundiert. Shrinkage-Lösungsansätze, auch Bayes-Stein genannt (hin zum MVP, hin zum Grand-Mean, hin zum CAPM-Marktportfolio, Black/Littermann), kombinieren die Stichprobeneschätzer mit a-priori-Informationen des zu schätzenden Parameters und haben ihren Ursprung im Bereich der mathematischen Statistik. $\mu_{BS} = \alpha\mu + (1-\alpha)\mu_{prior}$. Die Verfahren sind aufwändig, führen aber regelmäßig zu einer Stabilisierung der Schätzer und Portfoliogewichte.

Aufgabe 9: Devisenmärkte und Währungssicherung (30 Minuten)

Ein deutscher Investor legt €100 Mio. in den amerikanischen Aktienmarkt an, repräsentiert durch den S&P500-Aktienindex. Der Investitionszeitraum beträgt ein Jahr. Der aktuelle Wechselkurs des US-Dollars zum Euro beträgt 1.1226 USD/EUR und der S&P500 notiert heute bei 2 200 Punkten. Der Investor kann den ursprünglichen Investitionsbetrag in Fremdwährung durch Devisenforwards (Laufzeit 1 Jahr) sichern, die arbitragefrei bewertet sind. Das Zinsniveau in den USA liegt bei 1% p.a. und im Euroraum bei 0% p.a. Ein Jahr später notiert der Wechselkurs bei 1.00 USD/EUR und der S&P500 steht bei 3 000 Punkten.

a) Berechnen Sie den fairen Forwardpreis [USD/EUR]. **(3 Minuten)**
b) Was ist der Wert des Investments (in Euro) nach einem Jahr **ohne** Wechselkurssicherung? **(6 Minuten)**
c) Was ist der Wert des Investments (in Euro) nach einem Jahr **mit** Wechselkurssicherung, wobei eine Hedge-Ratio von 0.5 gewählt wird? **(6 Minuten)**
d) Nehmen Sie an, dass zwischen den Devisenmärkten (Dreieck-)Arbitragemöglichkeiten nicht existieren. Ermitteln Sie die fehlenden Werte (A bis J) in der nachfolgenden Cross-Rates-Tabelle! **(10 Minuten)**

Währung	EUR	USD	YEN	GBP	SFR
EUR	1,00	1,1226	G	H	1,0895
USD	A	1,00	101,05	0,7714	0,9696
YEN	B	0,0099	1,00	0,0076	0,0096
GBP	C	E	130,97	1,00	J
SFR	D	F	104,11	I	1,00

e) Leiten Sie die nachfolgende Formel für die Gesamtrendite $R^{€,h}$ bei einer Investition in ein riskantes ausländisches Asset mit lokaler Rendite R, Wechselkursrendite e, Forwardprämie f und Hedgeratio h (bezogen auf den ursprünglichen Investitionsbetrag) her. **(5 Minuten)**

$$R^{€,h} = R + (1-h)e + h \cdot f + R \cdot e$$

Lösungsskizze:

a) F = 1,134
b) € 153,081 Mio.
c) € 146,456 Mio.
d) A = 0,8908; B = 0,0088; C = 1,1548; D = 0,9179; E = 1.2963; F = 1,0314; G = 113,439; H = 0,8660; I = 0,7949; J = 1,2580

e)

$$1 + R^{€,h} = \frac{\text{Vermögen in € in Zukunft}}{\text{einges. Kapital in € heute}} = \frac{\text{Wert Assets+Gewinn aus Hedge}}{\text{einges. Kapital in € heute}}$$
$$= \frac{S_1\, P_1 + h\, P_0 \cdot (F - S_1)}{S_0 P_0}$$
$$= \frac{S_1 P_1}{S_0 P_0} + h \cdot \left(\frac{F}{S_0} - \frac{S_1}{S_0}\right)$$
$$= (1 + R + e + R \cdot e) + h \cdot \big((1+f) - (1+e)\big)$$
$$= 1 + R + (1-h) \cdot e + h \cdot f + R \cdot e$$

$$\Rightarrow\ R^{€,h} = R + (1-h) \cdot e + h \cdot f + R \cdot e$$

Aufgabe 10: Immobilieninvestments (20 Minuten)

Eine Pensionskasse möchte € 100 Mio. in einen geschlossenen Immobilienfonds investieren. Die Auswertung historischer Zeitreihen der jährlich auf kontinuierlicher Basis berechneten (Log-)Renditen ergibt für die mittlere Rendite $\mu(R) = 5\%$, die Volatilität $\sigma(R) = 5\%$ und die Autokorrelation 1. Ordnung AR(1) = 0.6. Unterstellen Sie im Folgenden normalverteilte iid-Renditen mit adjustierter Volatilität nach dem Blundell/Ward-Verfahren. Bei Kauf fallen Transaktionskosten in Höhe von 10% des Kaufpreises an. Weiterhin werden jedes Jahr Managementkosten in Höhe von 1% des jeweiligen Fondswerts belastet.

a) Berechnen Sie für das Endvermögen jeweils nach t = 1 bzw. t = 25 Jahren: (i) den Erwartungswert, (ii) die Standardabweichung sowie (iii) das Mindestvermögen, welches mit einer Wahrscheinlichkeit von $\alpha = 90\%$ nicht unterschritten wird. **(9 Minuten)**
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich Ihr anfänglich investiertes Kapital (inkl. Transaktionskosten) nach Ablauf von t = 1 bzw. t = 25 Jahren mindestens mit einer (kontinuierlichen) Rendite von 2% p.a. verzinst hat? **(5 Minuten)**
c) Erläutern Sie die Glättungsproblematik bei der Verwendung von Immobilienindizes. Welche Lösungsansätze gibt es? **(6 Minuten)**

Hinweise: Sei $X \sim LN(m, v^2)$ eine logarithmisch normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern m und v^2, und N_α das α-Quantil der Standardnormalverteilung (siehe Tabelle im Anhang), dann gilt $aX^b \sim LN(\ln a + bm, b^2v^2)$ sowie für Erwartungswert, Varianz, und α-Quantil

$$E(X)=e^{m+0.5v^2}$$

$$Var(X)=E(X)^2\left(e^{v^2}-1\right)$$

$$LN_\alpha(m,v^2)=e^{m+N_\alpha \cdot v}=e^{m-N_{1-\alpha}\cdot v}$$

Das Blundell/Ward-Verfahren korrigiert die Varianz gemäß:

$$VAR(r_t^*) = VAR(r_t)\frac{1-a^2}{(1-a)^2}.$$

Lösungsskizze:

a) Vola-Adjustierung nach BW-Verfahren $v_{adj} = 10\%$.
Mit $m(t) = 5\% * t$, $v(t) = t^{0,5} * 10\%$, Investitionsbetrag von 100 / 1,1 = 90,91 und den Hinweisen ergeben sich für das Endvermögen (in Mio.) nach einem V_1 bzw. 25 Jahren V_{25}
$E(V_1) = 96{,}05$; $E(V_{25}) = 359{,}55$
$STD(V_1) = 9{,}63$; $STD(V_{25}) = 191{,}62$
$LN_{90\%}(V_1) = 84{,}07$; $LN_{90\%}(V_{25}) = 167{,}18$

b) Shortfallwahrscheinlichkeit (1 Jahr) = 74,32% bzw. (25 Jahre) = 9,52%

c) Glättungsgründe: Insbesondere in Appraisal-based Indizes keine tägliche Marktbewertung der Immobilien aufgrund von Transaktionspreisen, sondern Schätzwerte durch Gutachter, Ankerfunktion bei Gutachterbewertung; Geringe Datenfrequenz; Zyklisches Verhalten von Immobilienpreisen.
Problem: Glättung kann zu Unterschätzung der Volatilität führen
Lösungsansätze: Adjustierungsverfahren der Volatilität (etwa BW-Verfahren).

Anhang

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung Φ(x)

x	**0**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000