Prüfung DAV-Spezialwissen in Finanzmathematik 2015

<u>Block I</u> (Albrecht)

<u>Aufgabe 1:</u> (10 Minuten)

a) Die Verlustvariable L folge einer Fréchet-Verteilung, d.h. es gilt für $x > 0$ mit $\beta > 0$ und $s > 0$

$$P(L \leq x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{s}\right)^{-\beta}\right].$$

Bestimmen Sie bei Zugrundelegung dieser Verteilung den Value at Risk zum Signifikanzniveau α. **(5 min)**

b) Die Verlustvariable L folge einer logarithmischen Normalverteilung, d.h. es gilt ($m \in \mathbb{R}$, $v > 0$) $X = \ln L \sim N(m, v^2)$. Leiten Sie eine explizite Darstellung des Value at Risk zum Signifikanzniveau α in Abhängigkeit von der Größe $N_{1-\alpha}$, dem $(1 - \alpha)$-Quantil der Standardnormalverteilung, ab. **(5 min)**

<u>Hinweis zu b):</u> Setzen Sie die Quantile der Normalverteilung als bekannt voraus und verwenden Sie die Transformationsregel für Quantile! Alternativ können Sie den VaR auch direkt ableiten.

<u>Lösungsskizze:</u>

a) Bedingungsgleichung für VaR:

$$P(L \leq VaR) = 1 - \alpha .$$

Hieraus ergibt sich im vorliegenden Fall:

$$\exp\left[-\left(\frac{VaR}{s}\right)^{-\beta}\right] = 1 - \alpha$$

Hieraus folgt

$$\left(\frac{VaR}{s}\right)^{-\beta} = -\ln(1 - \alpha)$$

und hieraus schließlich

$$VaR = s[-\ln(1 - \alpha)]^{-1/\beta} = \frac{s}{[-\ln(1 - \alpha)]^{1/\beta}} .$$

Alternativ kann man auch $-\ln(1 - \alpha) = \ln[1/(1 - \alpha)]$ verwenden.

b) Es gilt $X = \ln L \sim N(m, v^2)$.

Hieraus folgt

$$L = \exp X$$

und damit nach Hinweis (monotone steigende Transformation)

$$Q_{1-\alpha}(L) = Q_{1-\alpha}[\exp(X)] = \exp[Q_{1-\alpha}(X)]$$
$$= \exp(m + N_{1-\alpha}\, v),$$

da $Q_{1-\alpha}(X) = m + N_{1-\alpha}\, v$.

<u>Aufgabe 2:</u> (20 Minuten)

Bezeichnen Sie die heutige Spot Rate für eine Restlaufzeit von i Jahren mit r_i und notieren Sie deren wöchentliche Änderung mit ΔR_i. Nehmen Sie an, dass diese Änderungen für i=1,2 gemeinsam normalverteilt sind, wobei $E(\Delta R_i) = 0$ und $Var(\Delta R_i) = \sigma_i^2$. Verwenden Sie für die Korrelation der Spot Rate-Änderungen die Notation $\rho_{12} = \rho(\Delta R_1, \Delta R_2)$.

Betrachten Sie eine zweijährige Kuponanleihe mit einem Nominalwert in Höhe von N und Kuponzahlungen der Höhe Z.

a) Geben Sie einen formalen Ausdruck für den Barwert P_0 der Anleihe in t = 0 an und bestimmen Sie die absoluten Key Rate-Durationen KRD_1^A und KRD_2^A der Kuponanleihe bzgl. r_1 und r_2. **(8 min)**

b) Bestimmen Sie die Delta-Approximation der wöchentlichen Wertänderung der Kuponanleihe ΔP in Termen der absoluten Key Rate-Durationen. Verwenden Sie dabei r_1 und r_2 als Risikofaktoren. **(2 min)**

c) Berechnen Sie (formal) den Erwartungswert und die Varianz des gemäß b) approximierten Verlusts $L_P = -\Delta P$. **(8 min)**

d) Geben Sie nun eine formale Darstellung des *Conditional* Value at Risk zum Signifikanzniveau α für L_P an. **(2 min)**

<u>Hinweis zu d):</u> Setzen Sie den CVaR einer normalverteilten Verlustvariable als bekannt voraus!

<u>Lösungsskizze:</u>

a) Der Barwert der Anleihe beträgt

$$P_0 = Z(1 + r_1)^{-1} + (Z + N)(1 + r_2)^{-2}.$$

Für die absoluten Key Rate-Durationen gilt

$$KRD_i^A = -\frac{\partial P_0}{\partial r_i}, \quad i = 1,2.$$

Konkret gilt im vorliegenden Fall

$$KRD_1^A = 1 \cdot Z \cdot (1 + r_1)^{-2},$$

$$KRD_2^A = 2 \cdot (Z + N) \cdot (1 + r_2)^{-3}.$$

b) Die Delta-Approximation lautet

$$\Delta P = \frac{\partial P_0}{\partial r_1} \Delta R_1 + \frac{\partial P_0}{\partial r_2} \Delta R_2$$

$$= -KRD_1^A \, \Delta R_1 - KRD_2^A \, \Delta R_2.$$

c) Für die Verlustapproximation gilt

$$L_P = KRD_1^A \, \Delta R_1 + KRD_2^A \, \Delta R_2.$$

Daraus folgt für den Erwartungswert

$$E[L_P] = KRD_1^A \, E[\Delta R_1] + KRD_2^A \, E[\Delta R_2] = 0.$$

Die Varianz berechnet sich gemäß

$$Var[L_P] = (KRD_1^A)^2 \, \sigma_1^2 + (KRD_2^A)^2 \, \sigma_2^2 + 2 \, KRD_1^A \, KRD_2^A \, \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \, .$$

d) Als Linearkombination gemeinsam normalverteilter Zufallsvariablen ist auch L_P normalverteilt und somit gilt

$$\mathrm{CVaR}_\alpha = \frac{\varphi(N_{1-\alpha})}{\alpha} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}\,[L_P]}\,.$$

Dabei bezeichnet $N_{1-\alpha}$ das $(1 - \alpha)$-Quantil der Standardnormalverteilung und $\varphi(x)$ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung.

Aufgabe 3: (15 Minuten)

Unterstellen Sie das Kreditrisikomodell nach Merton. Es bezeichne dabei $\{A_t\}$ die Entwicklung des Marktwerts der Aktiva, die einer geometrischen Brownschen Bewegung folge. Das Fremdkapital bestehe aus einem Zerobond mit Nennwert F und Laufzeit T.

a) Bestimmen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit PD(0,T) im Zeitpunkt t = 0 in Termen der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. **(5 min)**

Hinweis: Die stochastische Differentialgleichung $dS_t/S_t = \mu\, dt + \sigma\, dW_t$, besitzt die Lösung $S_t = S_0 \exp\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}\, Z_t\}$, wobei $Z_t \sim N(0,1)$.

b) Bestimmen Sie die korrespondierende risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit RNPD(0,T). Explizieren Sie den Zusammenhang zwischen PD(0,T) und RNPD(0,T). **(10 min)**

Hinweis: Der Übergang vom physischen zum risikoneutralen Maß entspricht bei der geometrischen Brownschen Bewegung dem Übergang von dem Driftkoeffizient μ zu dem Driftkoeffizienten r (der risikolosen Zinsrate).

Lösungsskizze:

a) Mit $m := \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ gilt nach Hinweis

$$A_T = A_0 \exp(mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T),\ Z_T \sim N(0,1).$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} PD(0,T) &= P(A_T < F) = P(A_T \le F) \\ &= P(A_0 \exp(mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T) \le F) \\ &= P[mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T \le \ln(F/A_0)] \\ &= P\left[Z_T \le \frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= \Phi\left[\frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right]. \end{aligned}$$

b) Gemäß Hinweis gilt $m^* := r - \frac{1}{2}\sigma^2$ unter Q

$$A_T = A_0 \exp(m^*\, T + \sigma\sqrt{T}\, Z_T)$$

und damit analog zu a)

$$RNPD(0,T) = Q(A_T < F)$$

$$= \Phi\left[\frac{\ln(F/A_0) - m^* T}{\sigma\sqrt{T}}\right].$$

Aus a) folgt ferner

$$\Phi^{-1}[PD(0,T)] = \frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Nun gilt $m^* = m + (r - \mu) = m - (\mu - r)$ und hieraus folgt insgesamt

$$RNPD(0,T) = \Phi\left[\frac{\ln(F/A_0) - m\,T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{(\mu - r)T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

$$= \Phi\left[\Phi^{-1}[PD(0,T)] + \frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{T}\right].$$

Aufgabe 4: (15 Minuten)

Betrachten Sie ein Portfolio aus 2 Krediten, dessen Verlustverteilung durch ein Einfaktor-Defaultmodell beschrieben wird. Die einperiodigen Verluste der Kredite betragen $L_1 = 500 \cdot D_1$ und $L_2 = 250 \cdot D_2$, wobei D_1 und D_2 die Defaultindikatoren der Kredite bezeichnen. Deren Verteilung wird durch Bonitätsvariablen Y_i und Ausfallschranken H_i auf Basis von

$$D_i = 1 \Leftrightarrow Y_i < H_i \qquad \text{und} \qquad D_i = 0 \Leftrightarrow Y_i \geq H_i$$

für i=1,2 bestimmt. Die Bonitätsvariablen werden durch

$$Y_1 = \sqrt{\rho}\,F + \sqrt{1 - \rho}\,U_1 \text{ und } Y_2 = \sqrt{\rho}\,F + \sqrt{1 - \rho}\,U_2$$

mit $\rho = 0{,}64$ modelliert, wobei F, U_1, U_2 unabhängig und standardnormalverteilt sind. Für die individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten gilt $P(D_1 = 1) = 5\%$ und $P(D_2 = 1) = 1\%$.

a) Bestimmen Sie den erwarteten Portfolioverlust, d.h. den Erwartungswert von $L = L_1 + L_2$. **(5 min)**

b) Berechnen Sie die Ausfallschranken H_1 und H_2 sowie die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit der beiden Kredite. **(10 min)**

Hinweise:

1) Aus den dargestellten Annahmen lässt sich folgern, dass Y_1 und Y_2 gemeinsam normalverteilt sind, wobei $E(Y_1) = E(Y_2) = 0$, $Var(Y_1) = Var(Y_2) = 1$ und $\rho(Y_1, Y_2) = \rho$.
2) Approximativ gilt für die univariate Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung

$$\Phi(-2{,}33) = 0{,}01 \qquad \Phi(-1{,}96) = 0{,}025 \qquad \Phi(-1{,}64) = 0{,}05$$

$$\Phi(-1{,}27) = 0{,}1 \qquad \Phi(-0{,}12) = 0{,}45.$$

3) Für die Verteilungsfunktion der zweidimensionalen Standardnormalverteilung mit dem Korrelationsparameter $\rho = 0{,}64$ gilt $\Phi_2(-1{,}64, -2{,}33; \rho) = 0{,}005$.

Lösungsskizze:

a) Für den erwarteten Verlust gilt

$$E(L) = E(L_1 + L_2)$$
$$= 500 \cdot E(D_1) + 250 \cdot E(D_2)$$
$$= 500 \cdot P(D_1 = 1) + 250 \cdot P(D_2 = 1)$$
$$= 500 \cdot 0{,}05 + 250 \cdot 0{,}01 = 27{,}5$$

Dabei wurde verwendet, dass

$$E(D_1) = 1 \cdot P(D_i = 1) + 0 \cdot P(D_i = 0) = P(D_i = 1).$$

b) Für die individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten gilt

$$P(D_i = 1) = P(Y_i < H_i) = P(Y_i \leq H_i) = \Phi_1(H_i),$$

wobei wir im letzten Schritt Hinweis 1) verwenden. Somit müssen

$$\Phi_1(H_1) = 0{,}05 \quad \text{und} \quad \Phi_1(H_2) = 0{,}01$$

gelten, was mit Hinweis 2) zu

$$H_1 = -1{,}64 \quad \text{und} \quad H_2 = -2{,}33$$

führt. Aus der Definition der D_i und mit Hinweis 1) erhalten wir für die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit

$$P(D_1 = 1, D_2 = 1) = P(Y_1 < H_1, Y_2 < H_2)$$
$$= \Phi_2(H_1, H_2; \rho)$$
$$= \Phi_2(-2{,}33\ , -1{,}64; \rho) = 0{,}005.$$

Dabei wird im letzten Schritt offenbar auf Hinweis 3) rekurriert.

Block II (Bartels)

Aufgabe 5: (15 Minuten)

Der Vermögensanleger eines Versicherungsunternehmens VU kauft zu Jahresbeginn 10 000 Aktien eines Unternehmens U zum aktuellen Börsenpreis von 40 Euro. Das Versicherungsunternehmen kauft bei der im Konzernverbund ansässigen Bank B 10 000 Put-Optionen auf die genannte Aktie zum Ausübungspreis € 38.- zum Ausübungszeitpunkt 31.12., um die Anlage von 10 000 Aktien so absichern, dass der Wert der Geldanlage 10 000 ∗ 40 Euro zum Zeitpunkt des Bilanzstichtags 31.12. nicht unter 95% des Anfangsanlagebetrages fällt. Die Bank B möchte als Stillhalter der Verkaufs-Optionen das damit verbundene Risiko kongruent weitergeben und verkauft zu diesem Zweck zeitgleich an Privatkunden sogenannte einjährige Aktienanleihen zum Stückpreis von 40 Euro, die folgendes Leistungsschema vorsehen:

In jedem Fall wird ein fester Zinssatz von p% für die Geldanlage nach Ablauf eines Jahres gezahlt (feste Kuponzahlung). Außerdem wird zusätzlich zum 31.12. der Anlagebetrag zurückgezahlt, falls das Kursniveau der Aktie U zum 31.12. oberhalb des Wertes 38 Euro liegt. Im anderen Fall (d.h. bei einem Kursniveau ≤ 38 Euro) wird am 31.12. neben dem fest vereinbarten Kupon pro Stück Aktienanleihe je eine Aktie des Unternehmens U an den Kunden geliefert.

Um die Aktienanleihe am Markt zu platzieren, erfordert die Marktlage einen Zinssatz p von 10 % (Kupon).

Der aktuelle Zins am Markt beträgt 3,25% für einjährige Kapitalanlagen.

Welchen Preis, muss die Bank für die genannten Put-Optionen mindestens verlangen, damit sie diesen Koupon von 10% für die Aktienanleihe darstellen kann?

(Anmerkung: Der Einfachheit halber werden Transaktionskosten und eventuell anfallende Dividenden unberücksichtigt gelassen, außerdem gehe man davon aus, dass der Verkauf der Put-Optionen und die Platzierung der Aktienanleihe zeitgleich erfolgen.)

<u>Lösungsskizze:</u>

Die Bank hat zu Beginn des Jahres € 400 000.- aus dem Verkauf der Aktienanleihe sowie 10 000 p , wenn p die gesuchte Prämie für den Put bezeichnet. Wenn bei Ablauf € 40 000 Koupon gezahlt werden müssen und dazu die Aktienanleihen zum Einstiegspreis fällig werden, dann ist also ein Betrag von € 440 000.- aufzubringen, das entspricht zu Jahresbeginn einem Wert von € 426 150.12 (mit dem Faktor 1.0325 aufgezinst ergibt dieser gerade den Betrag von € 440 000). Damit muss die Bank den Preis des Puts mindestens mit € 2,62 festlegen, um keine Verluste zu erleiden.
In dem anderen Fall, bei dem der Kurswert der Aktie unter € 38 fällt und die Optionen von dem Käufer ausgeübt werden, zahlt sie den Gesamt-Koupon von € 40 000 und gibt die zu dem Preis von € 38 zu kaufenden Aktien an den Privatkunden weiter; Koupon und der Betrag von € 380 000.- kann von dem Gesamtbetrag von € 440 000.- auch in diesem Fall bestritten werden.

<u>Aufgabe 6:</u> (30 Minuten)

Bei einer neuen Lebensversicherungspolice hat der Kunde jährlich die Möglichkeit, zwischen zwei Formen der Überschussbeteiligung in dem jeweiligen Versicherungsjahr zu wählen: Entweder er wählt einen für das Jahr angebotenen Überschusszins auf das relevante Guthaben G oder aber er entscheidet sich stattdessen für die Partizipation an der einjährigen Steigerung eines Aktienindexes. Bei dieser Partizipation verspricht das Unternehmen dem Kunden einen Partizipationssatz i(p) auf das genannte Guthaben G, d.h. es wird für den zweiten Fall eine Überschussbeteiligung in Höhe von $\max\left(0,\ \left(\frac{x(1)}{x(0)}-1\right)\cdot i(p)\cdot G\right)$ von dem Versicherungsunternehmen angeboten, dabei bezeichnet $x(1)$ den Stand des Aktien-Indexes nach Ablauf eines Jahres und $x(0)$ den Stand Indexes zu Beginn des Versicherungsjahres.
Für den Aktuar des Versicherungsunternehmens stellt sich zu Beginn des Versicherungsjahres die Lage am Kapitalmarkt so dar:
Der erzielbare Jahreszins für risikolose Anlagen ist 1,5 %, der Stand des Aktienindexes beträgt 9516 Punkte und ein europäischer Call mit einjähriger Laufzeit auf den Index zum Ausübungspreis 9516 kostet € 117,18.

Welchen festen Überschusszins und welche Partizipation an der Steigerung des Indexes als Alternative kann der Aktuar dem Kunden in Aussicht stellen, wenn 0,5 % des Guthabens G für Verwaltungskosten und Biometrie zum Ende des Versicherungsjahres bei dem Unternehmen nach Überschusszuteilung noch verbleiben sollen und er die kongruente Deckung des Gewinnversprechens mit den genannten Anlagemöglichkeiten darstellen möchte?

<u>Lösungsskizze:</u>

Der Aktuar muss mit seiner Vermögensanlage folgende Leistungen zum Jahresende duplizieren:

- Falls der Kunde sich für den Garantiezins entscheidet, ist offenbar ein Zins von 1% maximal möglich, wenn 0,5% des Guthabens G zum Jahresende dem Unternehmen noch zur Verfügung stehen sollen.
- Falls der Kunde sich für die Indexpartizipation entscheidet, müssen folgende Beträge zum Jahresende verfügbar sein: Neben dem Betrag von 0,5% von G natürlich auch das Guthaben G selbst und eine

Überschussbeteiligung in Höhe von Max ($0,\ (\frac{x(1)}{x(0)}-1)\cdot i(p)\cdot G)$) , also insgesamt:

1,005 $\cdot$ G + Max ($0,\ (\frac{x(1)}{x(0)}-1)\cdot i(p)\cdot G)$) = 1,005 $\cdot$ G + i(p) $\frac{G}{x(0)}(x(1)-x(0))^+$, und das erreicht man sicher dann, wenn man den Geldbetrag 1,005 $\cdot$ G sowie i(p) $\frac{G}{x(0)}$ Calls auf den Index mit dem Ausübungspreis x(0) zur Verfügung hat. Daher wird er zur kongruenten Deckung des Gewinnversprechens zu Beginn des Jahres i(p) $\frac{G}{x(0)}$ Calls auf den Index kaufen und den Geldbetrag (1,005 $\cdot$ G)/1.015 festverzinslich zu 1,5% Verzinsung risikolos anlegen. i(p) berechnet sich daher aus der Gleichung G = $\frac{1.005\cdot G}{1.015}+i(p)\frac{G}{x(0)}\cdot c$, wenn c den Preis des Calls auf den Index zum Ausübungspreis x(0) bezeichnet. Bei den hier vorliegenden numerischen Daten ergibt sich dann: i(p) = $(1-\frac{1.005}{1.015})\cdot\frac{9516}{117.18}$ = 0.80 . Bei den hier vorliegenden Finanzmarktdaten können dem Kunden für das betreffende Jahr also maximal 80% Partizipation zugesagt werden.

Aufgabe 7: (15 Minuten)

Der Vermögensanleger eines Versicherungsunternehmens verfolgt kontinuierlich eine Anlagestrategie, die 5% Anteile des Gesamtvermögens in einen Aktienfonds und komplementär 95% Anteile des Anlagevermögens in einen risikolosen Geldmarktfonds investiert.
Der Preisprozess $\{S_t | 0\le t\le T\}$ des genannten Aktienfonds folge einer geometrischen Brownschen Bewegung, etwa $S_t = S_0\cdot e^{(\mu-\frac{v^2}{2})t+vW_t}$ mit $\mu=0.04$ und $v=0.2$.
Der risikolose Geldmarktfonds entwickelt sich kontinuierlich mit einer festen exponentiellen Zinsrate r weiter, etwa: $B_t = B_0\cdot e^{r\,t}$, so dass der Aufzinsungsfaktor in einem Jahr e^r = 1,015 beträgt, d.h. der Zinssatz für ein Jahr ist 1,5%. Man unterstellt, dass in einem zeitstetigen Modell idealisiert diese kontinuierliche Anlagestrategie mit den anvisierten proportionalen Anteilen wirklich möglich ist, so dass der Wert des Gesamtvermögens V(t) zur Zeit t sich bei einem Anfangsvermögen von 1 so darstellt: $V(t)=\exp((b\mu+(1-b)r-\frac{b^2v^2}{2})t+bv\cdot W_t)$.

(i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei diesen Modellannahmen in einem Jahr mindestens einen Zins von 1,25 % erwirtschaftet? Man gebe explizite numerische Werte an mit der beigefügten Tabelle der Normalverteilung! **(10 Minuten)**

(ii) Wie hoch ist der Erwartungswert E[V(1)]? (**5 Minuten**)

Lösungsskizze:

Zu (i):

Man definiere r_G durch 1.0125 = exp(r_G), d.h. r_G = 0.01242252…, dann ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(V(1) \geq e^{r_G \cdot 1}) = P(\exp((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2 v^2}{2}) + bv \cdot W_1) \geq e^{r_G}) =$$

$$= P(((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2 v^2}{2}) + bv \cdot W_1) \geq r_G) = P(W_1 \geq \frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2 v^2}{2}))}{b \cdot v}) =$$

$$1 - N(\frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2 v^2}{2}))}{b \cdot v}),$$

wenn wie üblich N(.) die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist.
Nun ist r = log(1.015) = 0.014886.. und damit ergeben sich bei den hier vorliegenden numerischen Daten:

$$(\frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2 v^2}{2}))}{b \cdot v}) = \frac{0.01242252 - (0.05 \cdot 0.04 + 0.95 \cdot 0.014886 - 0.00005}{0.01} \approx$$

- 0.366918 und daher berechnet sich wegen N(-0.3669182.128) = 0.3568 die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu etwa 64,32 % .

Zu (ii):

Es ist E[V(1)] = E[$\exp((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2 v^2}{2})1 + bv \cdot W_1)$] = E[$\exp((b\mu + (1-b)r)$] =

$\exp(b\mu + (1-b)r)$ unter Beachtung von E[$\exp(-\frac{b^2 v^2}{2} t + b\,v\,W_t)$]= 1, und damit berechnet sich E[V(1)] wegen exp(0.0149) = 1.015 hier konkret zu : exp(0.05 *0.04+0.95*0.0149)= exp (0.016155) = 1.016286… .

Block III (Maurer)

Aufgabe 8: Internationale Investments und Währungssicherung (20 Minuten)

Betrachten Sie eine Zwei-Länder-Welt mit Asset 1 aus Land 1 (Heimatland des Investors) und Asset 2 aus Land 2 (Ausland). Die erwarteten Ein-Perioden-Renditen μ_i sowie die zugehörigen Standardabweichungen σ_i (i = 1, 2) weisen die folgenden Werte auf:

$\mu_1 = 0{,}05$ bzw. $\sigma_1 = 0{,}2$
$\mu_2 = 0{,}1$ bzw. $\sigma_2 = 0{,}3$.

Ihnen steht im Folgenden keine risikolose Anlage zur Verfügung. Die Forwardprämie beträgt f = 0%. Es werden folgende Bezeichnungen für die betrachtete Investmentperiode getroffen:

R_i := lokale Rendite des Wertpapiers i (i = 1, 2),
e_2 : = Wechselkursrendite zwischen Land 2 und Land 1.

Gegeben seien der Erwartungswert $E(e_2) = 0$ und die Standardabweichung $\sigma(e_2) = 0{,}1$ der Wechselkursrendite zwischen Land 2 und Land 1. Die Korrelationsmatrix ist gegeben durch:

	R_1	R_2	e_2
R_1	1	0	0
R_2		1	0,2
e_2			1

Hinweise:

- Führen Sie die folgenden Berechnungen aus der Sicht des inländischen Investors durch.
- Vernachlässigen Sie bei Ihren Berechnungen alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der (R_2e_2) Kreuzprodukte.
- Führen Sie alle Berechnungen mit 4 Nachkommastellen durch.

a) Bestimmen Sie die Portfoliogewichte und die Varianz der Rendite des Minimum-Varianz-Portfolios (MVP) aus den beiden Assets, wenn das Wechselkursrisiko der zweiten Aktie nicht abgesichert wird. **(5 Minuten)**

b) Sie wollen nun eine partielle Währungssicherung des ursprünglichen Investitionsbetrags in das ausländische Asset mittels Devisenforwards durchführen. Bestimmen Sie die Portfoliogewichte und die Varianz der Rendite des MVP, wenn das Wechselkursrisiko des ausländischen Assets mit einer Hedgeratio von 50% ($h = 0{,}5$) des ursprünglichen Investitionsbetrags abgesichert wird. **(5 Minuten)**

c) Sie wollen nun eine Währungssicherung mittels Devisenforwards im Kontext eines Currency Overlay durchführen, wobei die in a) ermittelten Portfoliogewichte fixiert sind. Bestimmen Sie die Hedgeratio h, welche die Varianz der Portfoliorendite minimiert. Was ist die resultierende Rendite-Varianz dieses MVP? **(5 Minuten)**

d) Bestimmen Sie die Portfoliogewichte, die Hedgeratio und die resultierende Rendite-Varianz für das MVP, wenn über Portfoliogewichte und Hedgeratio simultan optimiert wird. **(5 Minuten)**

Lösungsskizze:

a) Sei x das relative Gewicht von Asset 1, dann resultiert für die Varianz des Portfolios ohne Währungssicherung mit $Cov(R_1, R_2) = Cov(R_1, e) = 0$

$$Var[R_{PF}] = x^2\, Var[R_1] + (1-x)^2\, [Var[R_2] + Var[e] + 2 \cdot Cov[R_2, e]]$$
$$= x^2 \cdot 0{,}04\ + (1-x)^2 \cdot 0{,}112$$

Minimierung $\frac{d}{dx}(\ldots) = 0$:

$$0 = 2x\ \cdot 0{,}04 - 2(1-x) \cdot 0{,}112$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{0.112}{0.04 + 0.112} = 73.68\%$$
$$Var[R_{MVP}] = 0.7368^2 \cdot 0.04 + (1 - 0.7368)^2 \cdot 0.112 = 0.02947$$

b) Bei partieller Währungssicherung h = 0,5 ergibt sich

$$Var[R_{PF}] = x^2 Var(R_1) + (1-x)^2 [Var(R_2) + (1-h)^2 Var(e) + 2(1-h) Cov(R_2, e)]$$
$$= x^2 \cdot 0.04\ + (1-x)^2 \cdot (0{,}09 + 0{,}0025 + 0{,}006)$$
$$= x^2 0{,}04 + (1-x)^2 0{,}0985.$$

Minimierung $\frac{d}{dx}(\dots) = 0$:

$\Leftrightarrow x = 71{,}11\%; Var[R_{MVP}] = 0.02844$.

c) Benutzen wir das Portfoliogewicht $x = 0{,}7368$ aus a) und vernachlässigen den $R_2 \cdot e$-Term, dann ergibt die Varianz der währungsgehedgte Portfolio-Rendite (Forwardprämie f keine Zufallsvariable):

$$Var\left[R_{PF}^{€,CO}\right] = x^2 Var[R_1] + (1-x)^2\{Var[R_2] + Var[(1-h)\cdot e] + 2 \cdot Cov[R_2, (1-h)\cdot e]\}$$
$$= 0.7368^2 \cdot 0.04 + (1-0.7368)^2 \cdot [0.09 + (1-h)^2\, 0.01 + (1-h)\cdot 0.012]$$

Minimierung $\frac{d}{dh}(\dots) = 0: \Leftrightarrow h = \frac{0.01+0.006}{0.01} = 1.6$

Varianz des MVP: $Var[R_{MVP}^{CO}] = 0.7368^2 \cdot 0.04 + (1-0.7368)^2 \cdot 0.0864 = 0.0277$.

d) Die Varianz eines Portfolios mit Währungshedge ist:

$$Var[R_{PF}] = x^2\, Var[R_1] + (1-x)^2\, Var\left[R_2^{€,h}\right],$$

wobei $Var\left[R_2^{€,h}\right] = Var[R_2] + (1-h)^2 \cdot Var[e] + 2\,(1-h) \cdot Cov[R_2, e]$

Bei simultaner Optimierung über x und h müssen folgende zwei Gleichungen gelten:

$$\frac{d}{dx}\, Var[R_{PF}] = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dh} Var[R_{PF}] = 0$$

Da $Var[R_1]$ unabhängig von h, erhält man als optimale Hedgeratio ein identisches Ergebnis wie in Aufgabe c), d.h. $h = 1.6$ und $Var[R_2^{h=1.6}] = 0.0864$). Lösung der zweiten Gleichung ergibt das optimale Portfolio-gewicht:

$$\frac{d}{dx}\, Var[R_{PF}] = 0$$
$$\Leftrightarrow\ 0 = 2x\, Var[R_1] - 2(1-x) Var\left[R_2^{€,h=1.6}\right]$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{0.0864}{0.04 + 0.0864} = 68.35\%$$

Varianz opt MVP: $Var\left[R_{MVP}^{opt}\right] = 0.6835^2 \cdot 0.04 + (1-0.6835)^2 \cdot 0.0864 = 0.02734$

<u>Aufgabe 9:</u> Devisenmärkte (16 Minuten)

Sie wollen €2 Mio. in den britischen Aktienmarkt, repräsentiert durch den FTSE (einem wichtigen Aktienindex), investieren. Der Investitionszeitraum beträgt ein Jahr. Der aktuelle Wechselkurs des britischen Pfunds zum Euro beträgt 0,69064 GBP/EUR und der FTSE notiert heute bei 6.800 Punkten. Sie können den ursprünglichen Investitionsbetrag in Fremdwährung vollständig durch Devisenforwards (Laufzeit 1 Jahr) sichern, die arbitragefrei bewertet sind. Das Zinsniveau in UK liegt bei 1% p.a. und im Euroraum bei 0,5% p.a. Ein Jahr später notiert der Wechselkurs bei 0,75 GBP/EUR und der FTSE steht bei 6.400 Punkten.

a) Berechnen Sie den fairen Forwardpreis [EUR/GBP]. **(3 Minuten)**
b) Was ist der Wert des Investments (in Euro) nach einem Jahr **ohne** Wechselkurssicherung? **(6 Minuten)**
c) Was ist der Wert des Investments (in Euro) nach einem Jahr **mit** Wechselkurssicherung? **(7 Minuten)**

Lösungsskizze:

a) Forwardpreis = 1/0,69064 * 1,005/1,01 = 1,44076 €/GBP

b) In t = 0:

Umtausch 2 Mio. € in GBP = 1.381.280 GBP → Investment in FTSE

In t = 1

Wert FTSE Investment in GBP = 1.381.280 GBP * 6400/6800 = 1.300.028 GBP

Wert FTSE Investment in Euro: 1.300.028 * 1/0,75 = **1.733.371 €**

c) Ergebnis Devisenforward auf ursprünglichen Investitionsbetrag in GBP:

1,381.280 GBP * (1,44076 €/GBP – 1/0,75 €/GBP) = **148.392 €**

Gesamtwert: 1.733.371 € + 148.392 € = **1.881.763 €**

Alternative Berechnung

Lokale Rendite = 6400/6800 -1 = -5,8824%

WK-Rendite = (1/0,75 – 1/69064)/(1/69064) = -7,9147%

Forwardprämie = 1,005/1,01 – 1 = 0,495%

Gesamtrendite ohne Hedge = -5,8824% -7,9137% + -5,8824% *7,9137% = -13,3315%

Wert-Investment 2 Mio. € * (1-13,3315%) = 1.733.371 €
Gesamtrendite mit Hedge = -5,8824% -0,495%% + -5,8824% *7,9137% = -5,9118%
Wert-Investment 2 Mio. € * (1-5,9118%) = 1.881.763 €

Aufgabe 10: Entnahmepläne und Shortfallrisiken (24 Minuten)

Sie entwickeln bei einer Lebensversicherung Lösungen für die Auszahlungsphase der Altersversorgung und identifizieren einen Infrastrukturfonds, der auch für Privatanleger zugänglich ist. Nach gründlicher Recherche der möglichen stochastischen Dynamik des Fonds erwarten Sie für die auf kontinuierlicher Basis berechneten jährlichen (Log-)Renditen R_t des Investments (vor Kosten) eine mittlere Rendite von 5% p.a., eine Volatilität von 4% p.a. und eine Autokorrelation 1. Ordnung von a = 0,8. Bei Kauf wird ein Ausgabeaufschlag von 5% auf den Anteilspreis von derzeit 100 Euro erhoben. Neben dem Ausgabeaufschlag werden dem Kunden weiterhin laufende Kosten in Rechnung gestellt. Diese belaufen sich auf 1% des (ermittelten) Marktwerts seiner Anteile und werden am Jahresende dem Depot direkt belastet (reduzieren also das Fondsvermögen). Sie entwickeln Beispielrechnungen für einen Auszahlplan mit Einmalbeitrag von 100.000 Euro, der vollständig in die Fondsanteile investiert wird. Zu Jahresbeginn werden jeweils so viele Fondsanteile zurückgegeben, dass eine Auszahlung (B_t) an den Kunden in Höhe von 5% des jeweils noch vorhandenen Fondsvermögens (V_t) zustande kommt ($B_t = 0{,}05V_t$). Die erste Auszahlung erfolgt nach einem Jahr t=1 (d.h. $B_0 = 0$). Unterstellen Sie im Folgenden normalverteilte iid-Renditen mit adjustierter Volatilität nach dem Blundell/Ward-Verfahren. Vernachlässigen Sie Sterblichkeitsaspekte.

a) Berechnen Sie die erwarteten Auszahlungen nach Ablauf von t=10 bzw. t=20 Jahren **(6 Minuten)**
b) Wie groß ist der Auszahlungsbetrag, der nach Ablauf von t=10 bzw. t=20 Jahren mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% mindestens erreicht wird? **(6 Minuten)**
c) Wie groß ist die Shortfall-Wahrscheinlichkeit, dass nach Ablauf von t=10 bzw. t=20 Jahren die Auszahlung geringer ist als 5.000 Euro? **(6 Minuten)**

d) Wie groß ist das erwartete verbleibende Restvermögen, wenn der Kunde nach t=10 bzw. t=20 Jahren stirbt? **(6 Minuten)**

Hinweise:

1) Sei X ~ LN(m, v²) eine logarithmisch normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern m und v², und N_α das α-Quantil der Standardnormalverteilung (siehe Tabelle im Anhang), dann gilt $aX^b \sim LN(\ln a + bm, b^2v^2)$ sowie für Erwartungswert, Varianz, und α-Quantil

$$E(X) = e^{m+0,5v^2}$$
$$Var(X) = E(X)^2\left(e^{v^2} - 1\right)$$
$$LN_\alpha(m, v^2) = e^{m+N_\alpha \cdot v} = e^{m-N_{1-\alpha} \cdot v}$$

2) Das Blundell/Ward-Verfahren korrigiert die Varianz gemäß:

$$VAR(r_t^*) = VAR(r_t)\frac{1-a^2}{(1-a)^2}$$

Lösungsskizze:

Korrektur von STD (=v) der Einperioden-Logrendite (U_t) gemäß BW-Verfahren:

$v = 4\%\sqrt{\frac{1-0,8^2}{(1-0,8)^2}}$ = 0,12 damit Verteilung Logrendite $U_t \sim N(0,05; 0,12^2)$

Startvermögen $V_0 = \frac{€100,000}{1.05} = €95.238,10.$

Entwicklung/Verteilung Fondsvermögens (t = 1, 2, …) vor Auszahlung von B_t

$V_t = (0,95)^{t-1} * 0,99^t * V_0 * \exp(\sum_{i=1}^{t} U_i)$

$\rightarrow V_t \sim LN[(t * 0,05 + \ln(0,99^t * 0,95)^{t-1} * V_0;\ t * 0,12^2]$

Entwicklung / Verteilung Auszahlungen

$$B_t = 0,05 * V_t = 0,05 * 0,95^{t-1} * 0,99^t * V_0 * \exp\left(\sum_{i=1}^{t} U_i\right)$$

$\rightarrow B_t \sim LN[(t * 0,05 + \ln(0,05 * 0,99^t * 0,95)^{t-1} * V_0;\ t * 0,12^2]$

Mit den Hinweisen zur Lognormalverteilung ergibt sich:

a) Erwartete Auszahlungen: $E(B_{10}) = 4809$; $E(B_{20}) = 4614$
b) 10% Quantil Auszahlungen: $LN_{10\%}(B_{10}) = 2752; LN_{10\%}(B_{20}) = 2008$
c) Wahrscheinlichkeiten: $P(B_{10} < 10000) = 61,5\%; P(B_{20} < 10000) = 66,21\%)$
d) Erwartetes Vermögen: $E(V_{10}) = 96181; E(V_{20}) = 92278.$

Anhang

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung Φ(x)

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000