Prüfung DAV-Spezialwissen in Finanzmathematik 2013

Block I (Albrecht)

Aufgabe 1: (30 Minuten)

Gegeben sei eine Europäische Putoption auf einen dividendenfreien Basistitel mit Laufzeit T, deren heutiger Wert (Preis) P_t beträgt und die nach Black/Scholes bewertet ist.

a) Wie lautet die approximative Änderung des Putwerts über das Zeitintervall [t, t+h] bei Anwendung der Delta-Approximation?

b) Wie hoch ist der Value at Risk der Option über ein Intervall der Länge h bei Anwendung der Delta-Normal-Methode? Dabei sei die Rendite R_h des Basistitels gegeben durch $R_h \sim N(\mu h, \sigma^2 h)$.

c) Wie lautet die approximative Änderung des Putwerts über das Zeitintervall [t, t+h] bei Anwendung der Delta-Exakt-Approximation?

d) Bestimmen Sie nun für die Put-Position den Value at Risk zum Signifikanzniveau α über das Zeitintervall [t, t+h] auf der Basis einer Delta-Exakt-Approximation. Unter stellen Sie dabei für die Log-Rendite des Basisobjekts $U_h \sim N(0, v^2 h)$.

e) Approximieren Sie den Value at Risk aus Aufgabenteil d), indem Sie die Exponentialfunktion linear approximieren!

Hinweise:

1) Das Put-Delta eines Europäischen Put lautet im Falle von Black/Scholes-Preisen $\Delta_P(t) = -N(-d_1) = -N[-d_1(t)]$.
2) Setzen Sie den Value at Risk im Normalverteilungsfall als bekannt voraus und ebenso die Transformationseigenschaften von Quantilen.

Lösungsskizze:

a) Deltaapproximation der Optionsposition:

$$\Delta P := P_{t+h} - P_t \approx \Delta_P(t)(S_{t+h} - s_t),$$

wobei $\Delta_P(t) = \partial P / \partial S$ („Optionsdelta“)
Im Black/Scholes-Falle gilt dabei:

$$\Delta_P(t) = \partial P / \partial S = -N(-d_1)$$

b) Es gilt:

$$\Delta P = -N(-d_1)\, s_t\, R_h$$
$$E(\Delta P) = -N(-d_1)\, s_t\, \mu h$$
$$\sigma(\Delta P) = N(-d_1)\, s_t\, \sigma\sqrt{h}$$
$$L_P = -\Delta P,\ E(L_P) = -E(\Delta P),\ \sigma(L_P) = \sigma(\Delta P)$$

ΔP und damit L_P normalverteilt, somit gilt insgesamt:

$$\begin{aligned} VaR_h &= N_{1-\alpha} N(-d_1)\, s_t\, \sigma\sqrt{h} + N(-d_1)\, s_t\, \mu h \\ &= N(-d_1)\, s_t\, [\, N_{1-\alpha}\sigma\sqrt{h} + \mu h\,]. \end{aligned}$$

c) Definiere die Verlustvariable $L_P = -\Delta P$. Es folgt:

$$\begin{aligned} L_P &= -\frac{\partial P}{\partial S_t}\Delta S \\ &= -N(-d_1)\, \Delta S \\ &= N(-d_1)\, s_t\, (e^{U_h} - 1). \end{aligned}$$

d) Aufgrund der Transformationseigenschaften von Quantilen gilt

$$\begin{aligned} VaR_\alpha &= Q_{1-\alpha}(L_P) \\ &= N(-d_1) s_t \{\exp[\, Q_{1-\alpha}(U_h) - 1]\} \\ &= N(-d_1) s_t \{\exp[\, N_{1-\alpha} v\sqrt{h} - 1]\} \end{aligned}$$

e) Mit $\exp(x) \approx 1+x$ folgt aus d)

$$VaR \approx N(-d_1)\, s_t N_{1-\alpha} v\sqrt{h}\, .$$

<u>Aufgabe 2:</u> (30 Minuten)

Unterstellen Sie das Kreditrisikomodell nach Merton. Es bezeichne dabei $\{A_t\}$ die Entwicklung des Marktwerts der Aktiva, die einer geometrischen Brownschen Bewegung folge. Das Fremdkapital bestehe aus einem Zerobond mit Nennwert F und Laufzeit T.

a) Bestimmen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit PD(0,T) im Zeitpunkt t = 0 in Termen der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

<u>Hinweis:</u> Die stochastische Differentialgleichung $dS_t / S_t = \mu dt + \sigma dW_t$ besitzt die Lösung $S_t = S_0 \exp\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\, t + \sigma\sqrt{t}\, Z_t\}$, wobei $Z_t \sim N(0,1)$.

b) Bestimmen Sie die korrespondierende risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit RNPD(0,T). Explizieren Sie den Zusammenhang zwischen PD(0,T) und RNPD(0,T).

Hinweis: Der Übergang vom physischen zum risikoneutralen Maß entspricht bei der geometrischen Brownschen Bewegung dem Übergang von dem Driftkoeffizienten μ zum Driftkoeffizienten r (der risikolosen Zinsrate).

c) Definieren Sie den Distance to Default DD durch

$$DD := \frac{E(\ln A_T) - \ln F}{\sigma\sqrt{T}} \quad .$$

Bestimmen Sie die Beziehung zwischen PD (0, T) und DD im Merton-Modell.

d) Weisen Sie nach, dass in t = 0 für die (auf das Ausfallereignis) bedingte erwartete Recovery Rate RC := A_T / F gilt:

$$E(RC \mid A_T < F) = \frac{E(A_T)}{F \cdot PD(0,T)}\, \Phi\left(\frac{\ln(F/A_0) - (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Hinweis: Ist die Zufallsgröße X lognormalverteilt mit $\ln X \sim N(m_x, v_x^2)$, so gilt:

$$E(X \mid X < a) = \frac{E(X)}{P(X < a)}\, \Phi\left(\frac{\ln a - m_x - v_x^2}{v_x}\right) \quad .$$

Lösungsskizze:

a) Mit $m := \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ gilt nach Hinweis

$A_T = A_0 \exp(mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T)$, $Z_T \sim N(0,1)$.

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
PD(0, T) &= P(A_T < F) = P(A_T \le F) \\
&= P[A_0 \exp(mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T) \le F] \\
&= P[mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T \le \ln(F/A_0)] \\
&= P\left[Z_T \le \frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\
&= \Phi\left[\frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right].
\end{aligned}$$

b) Gemäß Hinweis gilt mit $m^* := r - \frac{1}{2}\sigma^2$ unter Q

$$A_T = A_0 \exp(m^* T + \sigma\sqrt{T}\, Z_T)$$

und damit analog zu a)

$$\begin{aligned} RNPD(0,T) &= Q(A_T < F) \\ &= \Phi\left[\frac{\ln(F/A_0) - m^* T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \ . \end{aligned}$$

Aus a) folgt ferner

$$\Phi^{-1}\left[PD(0,T)\right] = \frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}} \ .$$

Nun gilt $m^* = m + (r - \mu) = m - (\mu - r)$ und hieraus folgt insgesamt

$$RNPD(0,T) = \Phi\left[\frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{(\mu - r)T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

$$= \Phi\left[\Phi^{-1}\left[PD(0,T)\right] + \frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{T}\right]$$

c) Zunächst folgt aus a)

$$\ln A_T = \ln A_0 + mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T$$

und damit, da $Z_T \sim N(0,1)$,

$$E\left[\ln A_T\right] = \ln A_0 + mT \, .$$

Für DD gilt somit im Merton-Modell:

$$DD = \frac{\ln(A_0/F) + mT}{\sigma\sqrt{T}} = -\frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}} \ .$$

Durch Vergleich mit a) folgt hieraus insgesamt

$$PD(0,T) = \Phi(-DD) \, .$$

d) Zu bestimmen ist

$$E(RC|A_T < F) = E\left(\frac{A_T}{F}\,|A_T < F\right) = \frac{1}{F}E(A_T|A_T < F).$$

Nach Teilaufgabe a) gilt $\ln A_T \sim N(\ln A_0 + mT, \sigma^2 T)$ und damit nach Hinweis

$$E\left(A_T\ |A_T < F\right) = \frac{E(A_T)}{P(A_T < F)}\,\Phi\left(\frac{\ln F - \ln A_0 - mT - \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$= \frac{E(A_T)}{P(A_T < F)}\ \Phi\left(\frac{\ln(F/A_0) - (m + \sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Da ferner $PD(0,T) = P(A_T < F)$ folgt hieraus mit $m + \sigma^2 = \mu - \sigma^2/2 + \sigma^2 = \mu + \sigma^2/2$ insgesamt

$$E(RC|A_T < F) = \frac{E(A_T)}{F \cdot PD(0,T)}\Phi\left(\frac{\ln(F/A_0) - (\mu + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

<u>Block II</u> (Bartels)

<u>Aufgabe 3:</u> (15 Minuten)

Der Vermögensanleger eines Versicherungsunternehmens VU kauft zu Jahresbeginn 10 000 Aktien eines Unternehmens U zum aktuellen Börsenpreis von 30 €. Durch den Kauf von 10 000 Put-Optionen bei der Bank B zum Ausübungstag 31.12. und Ausübungspreis 28,50 sichert der Vermögensanleger von VU die obige Kapitalanlage so ab, dass zum Bilanzstichtag 31.12. der Wert von 285 000 € für das Versicherungsunternehmen VU nicht unterschritten werden kann. Die Bank B verlangt als Preis P für die europäischen Put-Optionen auf Aktien des Unternehmens U zum Ausübungspreis 28,50 € und Ausübungszeitpunkt 31.12. jeweils P Euro. Für eine risikolose einjährige Kapitalanlage beträgt der aktuelle Zinssatz 2 %.

Die Bank B gibt als Stillhalter der Verkaufs-Optionen das damit verbundene Risiko kongruent weiter an Privatkunden und verkauft zeitgleich zu diesem Zweck 10 000 so genannte einjährige Aktienanleihen zum Stückpreis von 30 Euro, die folgendes Leistungsschema vorsehen:
In jedem Fall wird ein fester Zinssatz von 10% für die Geldanlage nach Ablauf eines Jahres gezahlt (feste Kuponzahlung). Außerdem wird zusätzlich zum 31.12. der Anlagebetrag zurückgezahlt, falls das Kursniveau der Aktie U zum 31.12. oberhalb des Wertes 28,50 Euro liegt. Im anderen Fall (d.h. bei einem Kursniveau ≤ 28,50 Euro) wird am 31.12. neben dem fest vereinbarten Kupon pro Stück Aktienanleihe je eine Aktie des Unternehmens U an den Kunden geliefert.

(i) Mit welchem Mindestpreis für die genannte Put-Option wird aus Sicht der Bank die beschriebene Kuponzahlung für die Aktienanleihe bei allen denkbaren Szenarien keinen Verlust ergeben, wenn für die Bank weder Verwaltungskosten noch Transaktionskosten berücksichtigt werden?

(ii) Welcher Preis müsste für die entsprechende einjährige europäische Call-Option auf die Aktie U zum Ausübungspreis 28,50 € gelten, damit keine Arbitrage möglich ist?

<u>Lösungsskizze:</u>

Zu (i): Die Bank B hat zu Beginn des Jahres folgende Beträge zur Anlage zur Verfügung:

€ 300 000 aus dem Verkauf der 10 000 Aktienanleihen
€ 10 000 P aus dem Verkauf der 10 000 Put-Optionen

Diesen Betrag kann sie zu 2% Zins anlegen. Das ergibt zum Fälligkeitstag der Aktienanleihe den Betrag von:

$$€\ (300\,000 + 10\,000 \cdot P) \cdot 1{,}02\ .$$

Als maximale Zahlungsverpflichtung am Jahresende stehen dem gegenüber aus den Kontraktbedingungen der Aktienanleihe:

$$€\ 1{,}1 \cdot 300\,000\ .$$

Gleichsetzen dieser Beträge und Auflösung nach P ergibt:

P = 2,352941, also zur sicheren Seite gerundet: P = 2,36 €.

Zu (ii):

Nach der Put-Call-Relation berechnet sich der Preis C der korrespondierenden Call-Option zu:

C = P + S – K/(1+r), wenn P den Put-Preis, S den Preis des zugrunde liegenden Basispapiers, K den Ausübungspreis und 1+r den Aufzinsungsfaktor bezeichnet; das ergibt hier konkret:

C = 2,36 + 30 – 28.50/1.02 = 32.36 – 27.94 = 4,42 € .

<u>Aufgabe 4:</u> (45 Minuten)

Der Vermögensanleger eines Versicherungsunternehmens verfolgt kontinuierlich eine Anlagestrategie, die 30% des Gesamtvermögens in einen Aktienfonds und 70% des Anlagevermögens in einen risikolosen Geldmarktfonds investiert.
Der Preisprozess $\{S_t | 0 \le t \le T\}$ des genannten Aktienfonds folge einer geometrischen Brownschen Bewegung, etwa $S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{\nu^2}{2})t + \nu W_t}$ mit $\mu = 0{,}06$ und $\nu = 0{,}2$.
Der risikolose Geldmarktfonds entwickelt sich kontinuierlich mit einer festen exponentiellen Zinsrate r weiter, etwa: $B_t = B_0 \cdot e^{r\,t}$.
Man unterstellt, dass in einem zeitstetigen Modell idealisiert diese kontinuierliche Anlagestrategie mit den anvisierten proportionalen Anteilen möglich ist.

(i) Man zeige, dass unter diesen Annahmen der Wert V(t) der Vermögensanlage durch eine geometrische Brownsche Bewegung beschrieben werden kann. Man gebe explizit diesen Prozess an, d.h. man berechne den Drift- und Volatilitätsparameter (**15 Minuten**).

(ii) Man berechne den Erwartungswert E[V(1)] des Vermögens nach einem Jahr (**10 Minuten**).

(iii) Wie groß muss der erwirtschaftete risikolose Zins r mindestens sein, damit nach einem Jahr die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man mit dieser Anlagestrategie mindestens einen Zins von 1,75% erwirtschaftet, über 95% liegt (**20 Minuten**).

<u>Hinweis</u> zu Teil (ii) von Aufgabe 4: Man benutze ohne Beweis, dass $\exp(-\frac{\nu^2}{2}t+\nu W_t)$ ein Martingal ist, so dass insbesondere für alle t gilt: $E[\exp(-\frac{\nu^2}{2}t+\nu W_t)]=1$.

<u>Hinweis</u> zu Teil (iii) von Aufgabe 4: Benutze N(1,645) = 0,95, wenn N wie üblich die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

<u>Lösungsskizze:</u>

Zu (i) :

Ist V(t) der Wert der Vermögensanlage, so gilt in kleinen Zeitabschnitten für die Dynamik der Inkremente, wenn man b Anteile in der riskanten Anlage hält und 1-b Anteile in der risikolosen Anlage:

$$dV(t)=b\cdot(\mu\cdot V(t)\cdot dt+\nu\cdot V(t)\cdot dW_t)+(1-b)\cdot V(t)\cdot r\cdot dt=(b\cdot\mu+(1-b)\cdot r)\cdot V(t)\cdot dt+b\cdot\nu\cdot V(t)\cdot dW_t$$

und hieraus ergibt sich

$$(1)\qquad V(t)=\exp((b\mu+(1-b)r-\frac{b^2\nu^2}{2})t+b\nu\cdot W_t),$$

wenn man das Anfangsvermögen auf 1 normiert. Bei den hier vorliegenden Zahlen ist dabei $\mu=0.06$ und $\nu=0.2$ und b beträgt 0.3 und damit 1-b = 0.7. Der Volatilitätsparameter ist also 0.3 * 0.2 = 0.06 und der Driftparameter ist 0.3*0.06 + 0,7 r = 0.018 + 0,7 r.

Zu (ii):

Es ist nach Gleichung (1) von (i): E[V(1)] = $E[\exp((b\mu+(1-b)r-\frac{b^2\nu^2}{2})1+b\nu\cdot W_1)]=$ $E[\exp((b\mu+(1-b)r)]=\exp(b\mu+(1-b)r)$ unter Beachtung des Hinweises zu (ii) und damit hier konkret: E[V(1)] = $\exp(0.3\cdot 0.06+0.7\cdot r)$.

Zu (iii):

Man definiere r_G durch 1.0175 = $\exp(r_G)$, d.h. r_G = 0.01735, dann hat man zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(V(1)\geq e^{r_G 1})$ nur die Formel von Teil (i) zu verwenden. Das ergibt:

$$P(V(1) \geq e^{r_G \cdot 1}) = P(\exp((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}) + bv \cdot W_1) \geq e^{r_G}) =$$

$$= P(((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}) + bv \cdot W_1) \geq r_G) = P(W_1 \geq \frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b \cdot v}) =$$

$$1 - N(\frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b \cdot v}),$$

wenn wie üblich N(.) die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist.
Nun ist die Forderung $P(V(1) \geq e^{r_G 1}) \geq 0.95$ genau dann erfüllt, wenn
$N(\frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b \cdot v}) \leq 0.05$ gilt. Wegen $r_G = 0.01735$ und N(-1,645) = 0.05 hat man dann
die Gleichung $\frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b \cdot v} = -1{,}645$ nach r aufzulösen. Das ergibt:

0.7 r = 0.01735 + 0.0018 – 0.018 + 0.0987 = 0.09985 und hieraus folgt schließlich als kritische Grenze für den risikolosen Zins r: r > 14,264 %.

Fazit: Mit einer solchen Strategie wird man im derzeitigen Zinsumfeld bei den benutzten Modellen so nicht die Vermögensanlage betreiben können.

Block III (Maurer)

Aufgabe 5: Internationale Portfolioselektion (10 Minuten)

Gegeben sei eine Zwei-Länder-Welt mit Wertpapier 1 aus Land 1 (Heimatland des Investors) und Wertpapier 2 aus Land 2 (Ausland). Es werden folgende Bezeichnungen für die betrachtete Investmentperiode getroffen.

R_i := lokale Rendite des Wertpapiers i (i = 1, 2),
e_2 : = Wechselkursrendite zwischen Land 2 und Land 1,

Gegeben sind die Erwartungswerte p.a. und Standardabweichungen p.a. der diskreten Renditen:

$\mu(R_1) = 0{,}30$; $\mu(R_2) = 0{,}20$; $\mu(e_2) = 0{,}08$
$\sigma(R_1) = 0{,}25$; $\sigma(R_2) = 0{,}2$; $\sigma(e_2) = 0{,}15$

Der Zinssatz für eine risikolose Anlage in Land 1 (Inland) bzw. Land 2 (Ausland) beträgt:

$r_1 = 0{,}08$ bzw. $r_2 = 0{,}05$.

Die Forwardprämie beträgt 2,86%. Die Kovarianzmatrix p. a. ist gegeben durch:

	R_1	R_2	e_2
R_1	0,0625	0	0
R_2		0,04	0,01
e_2			0,0225

- Führen Sie die folgenden Berechnungen aus der Sicht des inländischen Investors durch.
- Führen Sie alle Berechnungen mit 4 Nachkommastellen durch.
- Vernachlässigen Sie bei Ihren Berechnungen alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der (R_2e_2)-Kreuzprodukte.
- Gehen Sie von normalverteilten Renditen aus.
- Beachten Sie die Tabelle zur Standardnormalverteilung im Anhang

a) Berechnen Sie die Struktur, den Renditeerwartungswert und die Renditestandardabweichung des aus Wertpapier 1 und 2 gebildeten Minimum-Varianz-Portfolios (MVP), wenn der Investor eine vollständige Wechselkurssicherung des ursprünglich investierten Investitionsbetrags durchführt. **(5 Minuten)**

b) Berechnen Sie die Struktur, den Renditeerwartungswert und die Renditestandardabweichung desjenigen Portfolios aus der inländischen risikolosen Anlage sowie dem in- und ausländischen Wertpapier, welches mit 95%iger Wahrscheinlichkeit eine Mindestverzinsung von 1% p.a. erwirtschaftet und gleichzeitig die erwartete Rendite maximiert. Gehen Sie davon aus, dass eine vollständige Wechselkurssicherung des ursprünglichen Investitionsbetrags durchgeführt wird. **(5 Minuten)**

Hinweis: Das Tangentialportfolio bei vollständiger Wechselkurssicherung ist zu 48,66% in Wertpapier 1 und zu 51,34% in Wertpapier 2 investiert. Der effiziente Rand hat die Form $\mu = r_1 + SR_{TP} \cdot \sigma$, wobei SR_{TP} die Sharpe-Ratio des Tangentialportfolios bezeichnet.

Lösungsskizze:

a) Forwardprämie: 2,86%
Portfoliorendite aus Sicht des Inländischen Investors bei „vollständiger“ Wechselkurssicherung mit Devisenforwards (h=1):

$$R_{PF}^{h=1} = xR_1 + (1-x)[R_2 + f_2 + R_2 e_2] \approx xR_1 + (1-x)[R_2 + f_2]$$

Gemäß Maßgabe sind alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der (R_2e_2)-Kreuzproduktterme zu vernachlässigen, also:

$$Var(R_{PF}^{h=1}) = x^2 Var(R_1) + (1-x)^2 Var(R_2) + 2x(1-x)Cov(R_1, R_2)$$

$$= 0{,}1025x^2 - 0{,}08x + 0{,}04$$

Minimierung der Portfoliovarianz:

$$\frac{dVar(R_{PF}^{h=1})}{dx} = 0{,}205x - 0{,}08 \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{MVP}^{h=1} = 0{,}3902$$

$$\rightarrow E(R_{PF}^{h=1,MVP}) = 0{,}2565$$

$$\rightarrow Var(R_{PF}^{h=1,MVP}) = 0{,}0244$$

$$\rightarrow STD(R_{PF.}^{h=1,MVP}) = 0{,}1562$$

b) Sei $N_{0.95}$ das 95% Quantil der Standardnormalverteilung dann resultiert für die Shortfallrestriktion $\mu = 0.01 + N_{0.95}\sigma$. Gemäß beigefügter Tabelle der N(0, 1)-Verteilung gilt $1{,}64 < N_{0,9} < 1{,}65$. Im Folgenden wird (approximativ von der sicheren Seite) $N_{0.95} = 1{,}65$ gesetzt.

$\rightarrow \qquad \mu = 0{,}01 + 1{,}65\ \sigma$

Effizienter Rand (bestehend aus risikolosem inländischen Asset und riskanten in-/ausländischen Assets gemäß Tangentialportfolio)

$$\mu = r_1 + SR \cdot \sigma = r_1 + \frac{\mu_{TP} - r_1}{\sigma_{TP}} \cdot \sigma = 0{,}08 + \frac{\mu_{TP} - 0{,}08}{\sigma_{TP}} \cdot \sigma$$

$$\mu_{TP} = 0{,}4866 \cdot \mu(R_1) + (1 - 0{,}4866) \cdot \mu(R_2 + f_2) = 0{,}4866 \cdot 0{,}3 + 0{,}5134 \cdot 0{,}2286 = 0{,}2633$$

$$\sigma_{TP} = \sqrt{0{,}4866^2 \sigma^2(R_1) + 0{,}5134^2 \sigma^2(R_2)} = \sqrt{0{,}4866^2 \cdot 0{,}0625 + 0{,}5134^2 \cdot 0{,}04} = 0{,}1592$$

$$\Rightarrow SR = \frac{0{,}2633 - 0{,}08}{0{,}1592} = 1{,}1514$$

$$\Rightarrow \mu = 0{,}08 + 1{,}1514 \cdot \sigma$$

Schnittpunkt Effizienzlinie / Shortfallgerade: $0{,}01 + 1{,}65\sigma = 0{,}08 + 1{,}1514\sigma$

$$\Rightarrow \sigma_{opt} = 0{,}1404$$

$$\Rightarrow \mu_{opt} = 0{,}2417$$

Sei a derjenige Teil des Portfolios, welcher in das (riskante) Tangentialportfolio investiert wird, dann gilt: $\sigma_{opt} = a \cdot \sigma_{TP}$ und somit

$$\Rightarrow a = \frac{\sigma_{opt}}{\sigma_{TP}} = \frac{0{,}1404}{0{,}1592} \approx 88{,}19\%$$

Insgesamt werden 0,8819*0,4866 = 42,91% in Wertpapier 1, 0,8819*0,5134 = 45,28% in Wertpapier 2 und 1-0,8819= 11,81% in die risikolose inländische Anlage angelegt.

<u>Aufgabe 6:</u> Devisenmärkte (20 Minuten)

a) Der Zinssatz für Jahresgeld im Euroraum beträgt 0,75% p.a. und im US-Dollarraum 1,5% p.a. Der Devisenkassakurs notiert bei 1,34 $/€ und der Devisenterminkurs (Laufzeit 1 Jahr) bei 1,25 $/€. Existiert eine Arbitragemöglichkeit? Wenn ja, formulieren Sie eine geeignete Strategie, um dies auszunutzen (sie können bis zu maximal 10.000 Euro Kredit im Euroraum bzw. bis maximal 10.000 Dollar Kredit in den USA aufnehmen)! **(10 Minuten)**

b) Nehmen Sie an, dass zwischen den Devisenmärkten (Dreieck-)Arbitragemöglichkeiten nicht existieren. Ermitteln Sie die fehlenden Werte (A bis J) in der nachfolgenden Cross-Rates-Tabelle! **(10 Minuten)**

Währung	EUR	USD	YEN	GBP	SFR
EUR	1,00	1,336	G	H	1,2275
USD	A	1,00	99,01	0,6291	0,9256
YEN	B	0,0101	1,00	0,0064	0,0093
GBP	C	E	156,25	1,00	J
SFR	D	F	107,527	I	1,00

Lösungsskizze:

a)

Kreditaufnahme: in einem Jahr sind zu tilgen: $K_1 = 10\,000\,€ \cdot 1{,}0075 = 10\,075\,€$.

Umtausch in Dollar des Kredits: $10\,000€ \cdot 1{,}34\frac{\$}{€} = 13400\,\$$.

US-Geldmarktanlage in einem Jahr: $13400\,\$ \cdot 1.015 = 13\,601\,\$$.

Rücktausch: $13\,601\,\$\ \frac{1}{1{,}25}\ \frac{€}{\$} = 10880{,}80\,€$.

Nach Tilgung bleiben übrig: $10880{,}80\,€ - 10\,075€ = 805{,}8\,€$.

Alternative: Da nur 10 300 € getilgt werden müssen, braucht man nur folgenden Teil des Kredits in US-Geldmarkt anlegen (das ist quasi Reverse-Engineering)

$K_1 \cdot \frac{1}{\tilde{F}} \cdot \frac{1}{1+r_{us}} \cdot S = 10\,075\,€1{,}25\frac{1}{1{,}015}\ \frac{1}{1{,}34} = 9259{,}43€$.

Entsprechend hätte man **heute** einen Arbitragegewinn von 10000-9259,43 = 740,57€.

b)

Währung	EUR	USD	YEN	GBP	SFR
EUR	1.00	1.336	132.2774	0.8405	1.2275
USD	0.7485	1.00	99.01	0.6291	0.9256
YEN	0.0076	0.0101	1.00	0.0064	0.0093
GBP	1.1898	1.5896	156.25	1.00	1.4531
SFR	0.8147	1.080	107.527	0.6882	1.00

Aufgabe 7: "Anspar-/Entnahmepläne mit Immobilien" (30 Minuten)

Sie arbeiten in der Produktentwicklung bei einem Lebensversicherungsunternehmen und sind in die Konzeption von fondsgebundenen Verträgen für die Altersversorgung involviert. Es geht um Anspar- bzw. Auszahlungspläne gegen Einmalbeitrag, wobei der vom Kunden geleistete Einmalbeitrag in Anteile an Offenen Immobilienfonds (OIF) investiert werden soll. Die Anteile werden auf einem speziellen Kundendepot geführt und es können beliebige Bruchteile eines Anteils zum jeweiligen Marktwert erworben/zurückgegeben werden. Nach gründlicher Recherche erwarten Sie für die auf kontinuierlicher Basis berechneten jährlichen (Log-)Renditen R_t des OIF-Investments (vor Kosten) eine mittlere Rendite von 3% p.a, bei einer Volatilität von 3% p.a. und einer Autokorrelation 1. Ordnung von a = 0,7. Der aktuelle Preis für einen Fondsanteil beträgt EUR 100. Es wird bei Kauf ein Ausgabeaufschlag von 5% auf den Anteilspreis erhoben. Neben dem Ausgabeaufschlag werden dem Kunden weiterhin laufende Kosten in Rechnung gestellt. Diese belaufen sich auf 1% des Marktwertes seiner Anteile und werden am Jahresende dem Depot direkt belastet (reduzieren also das Fondsvermögen). Unterstellen Sie im Folgenden normalverteilte iid-Renditen mit adjustierter Volatilität nach dem Blundell/Ward-Verfahren. Vernachlässigen Sie Sterblichkeitsaspekte.

a) Ansparplan: Berechnen Sie (nach Kosten) bei einer Investition von EUR 100.000 in Anteile des Offenen Immobilienfonds für das erzielbare Endvermögen nach t = 9 und t = 16 Jahren die folgenden Größen: den Erwartungswert, die Standardabweichung, den Median sowie das Mindestvermögen, welches mit einer Wahrscheinlichkeit von α = 90% nicht unterschritten wird. Berechnen Sie ferner die Wahrscheinlichkeit, dass sich das anfänglich investierte Kapital nach 9 bzw. nach Ablauf von 16 Jahren mindestens mit einer (kontinuierlichen) Rendite von 1% p.a. verzinst hat. **(15 Minuten)**

b) Auszahlungsplan: Der Auszahlplan ist wie folgt konstruiert:

- Der Kunde zahlt einen Einmalbeitrag von 100.000 Euro, der vollständig in Anteile des Offenen Immobilienfonds investiert wird.
- Zu Beginn jeden Jahres werden so viele OIF-Fondsanteile zurückgegeben, dass eine Auszahlung (B_t) an den Kunden in Höhe von 5% des zu Jahresbeginn jeweils noch vorhandenen Fondsvermögens (V_t) zustande kommt ($B_t = 0{,}05V_t$). Die erste Auszahlung erfolgt nach einem Jahr t=1 (d.h. $B_0 = 0$).

Wie groß ist (nach Kosten) die Wahrscheinlichkeit, dass nach Ablauf von t=9 bzw. t=16 Jahren die Auszahlung geringer ist als 5.000 Euro? **(15 Minuten)**

Hinweise: Sei X ~ LN(m, v²) eine logarithmisch normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern m und v², und N_α das α-Quantil der Standardnormalverteilung (siehe Tabelle im Anhang), dann gilt aX^b ~ LN(lna + bm, b²v²) sowie für Erwartungswert, Varianz, und α-Quantil

$$E(X) = e^{m+0{,}5v^2}$$
$$Var(X) = E(X)^2\left(e^{v^2} - 1\right)$$
$$LN_\alpha(m, v^2) = e^{m+N_\alpha \cdot v} = e^{m-N_{1-\alpha} \cdot v}$$

Das Blundell/Ward-Verfahren korrigiert die Varianz gemäß: $VAR(r_t^*) = VAR(r_t)\dfrac{1-a^2}{(1-a)^2}$

Lösungsskizze:

a)

Korrektur von STD der Einperioden-Logrendite des OIF gemäß dem BW-Verfahren:

$$\sigma_{OIF}(R_t) = STD(R_t^*)\sqrt{\frac{1-a^2}{(1-a)^2}} = 3\% \cdot \sqrt{\frac{1-0{,}7^2}{(1-0{,}7)^2}} = 7{,}14\%$$

Für kumulierte Logrendite bis T gilt: $\sum_{t=1}^{T} R_t \sim N\left(T\mu; \sigma\sqrt{T}\right)$.

$$\sum_{t=1}^{T} R_t^{OIF} \sim N\left(T \cdot 0{,}03; \sqrt{T} \cdot 0{,}0714\right)$$

Zeitliche Entwicklung des Fondsvermögens (t = 1, 2, …)

$V_t = (0{,}99)^t V_0 \exp\left(\sum_{i=1}^{t} R_i\right)$, Startvermögen: V_0 = 100.000/(1,05) = 95.238,10

$\ln(V_t) \sim N\left(m_t, v_t^2\right)$ mit $m_t = t \cdot 0.03; \quad v_t = 0.0714 \cdot \sqrt{t}$

$$EW_9 = (0{,}99)^9 V_0 \cdot \exp\left(m_9 + 0{,}5 \cdot v_9^2\right) = 116614{,}89$$

$$EW_{16} = (0{,}99)^{16} V_0 \cdot \exp\left(m_{16} + 0{,}5 \cdot v_{16}^2\right) = 136506.83$$

$$STD_9 = EW_9\sqrt{\exp(9\sigma^2) - 1} = 25273.36$$

$$STD_{16} = EW_{16}\sqrt{\exp(16\sigma^2) - 1} = 39803.32$$

$$LN(50)_9 = (0{,}99)^9 V_0 \cdot \exp(m_9) = 113969.06$$

$$LN(50)_{16} = (0{,}99)^{16t} V_0 \cdot \exp(m_{16}) = 131049.44$$

$$LN(90)_9 = (0{,}99)^9 V_0 \cdot \exp(m_9 - v_9 \cdot SNV(90\%)) = 86605.54$$

$$LN(90)_{16} = (0{,}99)^{16} V_0 \cdot \exp(m_{16} - v_{16} \cdot SNV(90\%)) = 90875.49$$

$$SW_9 = \Phi\left(\frac{9 \cdot 0{,}01 - m_9}{v_9}\right) = 42{,}46\%; \qquad 1 - SW_9 = 57{,}54\%$$

$$SW_{16} = \Phi\left(\frac{16 \cdot 0{,}01 - m_{16}}{v_{16}}\right) = 34{,}96\% \qquad 1 - SW_{16} = 65{,}04\%$$

b)

Korrektur von STD der Einperioden-Logrendite des OIF gemäß dem BW-Verfahren:

$$\sigma_{OIF}(R_t) = STD(R_t^*)\sqrt{\frac{1-a^2}{(1-a)^2}} = 3\% \cdot \sqrt{\frac{1-0{,}7^2}{(1-0{,}7)^2}} = 7{,}14\%$$

Zeitliche Entwicklung des Fondsvermögens (t = 1, 2, …)

Startvermögen: V_0 = 100.000/(1,05) = 95.238,10

$$V_t = (0{,}95)^{t-1}(0{,}99)^t V_0 \exp\left(\sum_{i=1}^{t} R_i\right)$$

$$B_t = 0{,}05 \cdot V_t$$

$$\ln(\mathrm{B}_t) \sim \mathrm{N}(\mathrm{m}_t, \mathrm{v}_t^2)$$

$$m_9 = \ln(V_0 \cdot 0{,}95^{9\text{-}1}(1-0{,}01)^9 \cdot 0{,}05) + 9 \cdot 0{,}03 = 8{,}238$$

$$m_{16} = \ln(V_0 \cdot 0{,}95^{16\text{-}1}(1-0{,}01)^{16} \cdot 0{,}05) + 16 \cdot 0{,}03 = 8{,}018$$

$$v_9 = \sqrt{9} \cdot \sigma = 0{,}2142$$

$$v_{16} = \sqrt{16} \cdot \sigma = 0{,}2857$$

$$SW = P(B_t < 5000) = P\left(\frac{\ln(B_t) - m_t}{v_t} < \frac{\ln(5000) - m_t}{v_t}\right) = \Phi\left(\frac{\ln(5000) - m_t}{v_t}\right)$$

$$SW_9 = \Phi\left(\frac{\ln 5000 - m_9}{v_9}\right) = 90{,}41\%;$$

$$SW_{16} = \Phi\left(\frac{\ln 5000 - m_{16}}{v_{16}}\right) = 95{,}97\%$$

Φ ist Wert der Standardnormalverteilung.

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $\Phi(x)$

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000