Prüfung DAV-Spezialwissen in Finanzmathematik 2012

<u>Block I</u> (Albrecht)

<u>Aufgabe 1:</u> (30 Minuten)

Gegeben sei ein dreijähriger Standardbond mit den Rückflüssen {Z, Z, Z + N} sowie die heutigen Spot Rates $r_i = r(0, i)$, i = 1, 2 und 3, zu den Restlaufzeiten 1 Jahr, 2 Jahre und 3 Jahre.

a) Fassen Sie die Spot Rates als Risikofaktoren auf. Definieren und bestimmen Sie (explizit!) vor diesem Hintergrund die Faktor-Deltas (d.h. die Ableitungen der Barwertfunktion in Bezug auf die Spot Rates) dieses Bonds!

b) Stellen Sie anhand dieses Bonds die Delta-Normal-Methode zur (approximativen) Bestimmung des Value at Risk dar. Bestimmen Sie in diesem Kontext (explizit!) den Erwartungswert sowie die Varianz der Barwertänderung über ein Zeitintervall der Länge h. Wie lautet schließlich die Bestimmungsformel für den Value at Risk?

<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie den Zufallsvektor $\Delta R = (\Delta R_1, \Delta R_2, \Delta R_3)^T$, wobei $\Delta R_i = R(h,i) - r(0,i)$, i = 1, 2, 3, und unterstellen Sie, dass ΔR einer trivariaten Normalverteilung mit

$E(\Delta R_i) = h\mu_i \qquad i = 1, 2, 3$

$\mathrm{Cov}(\Delta R_i, \Delta R_j) = h\,\sigma_{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3$

folgt.

c) Definieren Sie allgemein die modifizierten Key Rate-Durationen und stellen Sie den Zusammenhang zu den Faktor-Deltas dar.

d) Betrachten Sie nun den Fall, dass die Kupons Z = 0 betragen und für den Nennwert N = 1000 gilt. Die 3-Jahres-Spot Rate betrage $r_3 = 4\%$. Die Volatilität von ΔR_3 auf Tagesbasis sei gegeben durch $\sigma(\Delta R_3) = 0.1\%$. Bestimmen Sie unter diesen Voraussetzungen unter Anwendung der Delta-Normal-Methode den Mean-Value at Risk auf Tagesbasis zum Signifikanzniveau 1% !

<u>Hinweis:</u> $N_{0.99} = 2.326$

<u>Lösungsskizze:</u>

a)
$$P_0 = P_0(r_1, r_2, r_3)$$
$$= Z(1+r_1)^{-1} + Z(1+r_2)^{-2} + (Z+N)(1+r_3)^{-3}$$

Die Faktor-Deltas sind im vorliegenden Fall gegeben durch $d_1 = \partial P_0 / \partial r_1$, $d_2 = \partial P_0 / \partial r_2$ und $d_3 = \partial P_0 / \partial r_3$.

Hieraus folgt

$$d_1 = -Z(1+r_1)^{-2}$$
$$d_2 = -2Z(1+r_2)^{-3}$$
$$d_3 = -3(Z+N)(1+r_3)^{-4}$$

b) Delta-Normal-Approximation:

$$\begin{aligned}\Delta P &= P_h - P_0\\ &\approx \frac{\partial P_0}{\partial r_1}\Delta R_1 + \frac{\partial P_0}{\partial r_2}\Delta R_2 + \frac{\partial P_0}{\partial r_3}\Delta R_3\\ &= d_1\,\Delta R_1 + d_2\,\Delta R_2 + d_3\,\Delta R_3\,.\end{aligned}$$

$\Delta R := (\Delta R_1, \Delta R_2, \Delta R_3)$ ist dabei nach Hinweis normalverteilt.

Es folgt zunächst:

$$\begin{aligned}E(\Delta P) &= d_1 E(\Delta R_1) + d_2 E(\Delta R_2) + d_3\, E(\Delta R_3)\\ &= h(d_1\mu_1 + d_2\mu_2 + d_3\mu_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\Delta P) &= d_1^2\,\mathrm{Var}(\Delta R_1) + d_2^2\,\mathrm{Var}(\Delta R_2) + d_3^2\,\mathrm{Var}(\Delta R_3)\\ &\quad + 2\,d_1 d_2\,\mathrm{Cov}(\Delta R_1, \Delta R_2) + 2\,d_1 d_3\,\mathrm{Cov}(\Delta R_1, \Delta R_3)\\ &\quad + 2\,d_2 d_3\,\mathrm{Cov}(\Delta R_2, \Delta R_3)\\ &= h[d_1^2\,\sigma_{11}^2 + d_2\,\sigma_{22}^2 + d_3\,\sigma_{33}^2 + 2\,d_1\,d_2\,\sigma_{12} + 2\,d_1\,d_3\,\sigma_{13} + 2\,d_2\,d_3\,\sigma_{23}]\,.\end{aligned}$$

Definiere nun die Verlustvariable $L := -\Delta P$.

Offenbar gilt $E(L) = -E(\Delta P)$ sowie $\sigma(L) = \sigma(\Delta P) = \sqrt{\mathrm{Var}(\Delta P)}$.

Da ΔR (trivariat) normalverteilt, sind auch ΔP und L normalverteilt und der Value at Risk zum Signifikanzniveau α lautet

$$\mathrm{VaR} = N_{1-\alpha}\,\sigma(\Delta P) - E(\Delta P)\,,$$

wobei $N_{1-\alpha}$ das (1-α)-Quantil der Standardnormalverteilung bedeute.

c) Die modifizierten Key Rate-Durationen sind definiert durch

$$\mathrm{KRD}_i^M = \mathrm{KRD}_i^M(r_1,\dots,r_m) = -\frac{1}{P_0}\cdot\frac{\partial P_0}{\partial r_i}\,,$$

d.h. es gilt

$$\mathrm{KRD}_i^M = -d_i / P_0\,.$$

d) Es gilt zunächst

$$\begin{aligned}P_0 &= N(1+r_3)^{-3} = 1000(1.04)^{-3}\\ \partial P_0/\partial r_3 &= -3000(1.04)^{-4} = -3000(0.8548)\\ &= -2564.40\end{aligned}$$

$$\Delta P = \frac{\partial P_0}{\partial r_3}\cdot\Delta R_3 = -2564.40\cdot\Delta R_3$$

$$\sigma(\Delta P) = 2564.40\cdot\sigma(\Delta R_3) = 2564.40(0.001) = 2.5644$$

$$\mathrm{MVaR} = 2.326(2.5644) = 5.965.$$

Alternativ:

Die Key Rate-Duration zur Laufzeit 3 des Bonds ist gegeben durch 3 und es gilt

$$\begin{aligned}\Delta P &= -P_0 \frac{3}{1+r_3}\Delta R_3 \\ &= -1000(1.04)^{-3}\cdot\frac{3}{1+r_3}\Delta R_3 \\ &= -3000(1.04)^{-4}\Delta R_3 \\ &= -2564.40\ \Delta R_3\ .\end{aligned}$$

<u>Aufgabe 2:</u> (15 Minuten)

Wie bestimmt sich die Größe Distance to Default (DD) im Rahmen des KMV-Modells? Weisen Sie im Rahmen des Merton-Modells die fundamentale Beziehung

$$\text{PD} = \text{N(-DD)}$$

nach. Dabei bezeichne PD die Ausfallwahrscheinlichkeit im Zeitpunkt T und N die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

<u>Hinweis:</u>
Die stochastische Differentialgleichung $dS_t / S_t = \mu dt + \sigma dW_t$ besitzt die Lösung $S_t = S_0 \exp\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}\, Z_t\}$, wobei $Z_t \sim N(0,1)$.

<u>Lösungsskizze:</u>

i) Definition von DPT = DPT (T):
DPT := Short Term Debt + ½ Long Term Debt

ii) Definition Distance to Default (DD):

$$DD := \frac{E[\ln(A_T)] - \ln(DPT)}{\sigma\sqrt{T}}\ .$$

Dabei bezeichne $\{A_t\}$ die Wertentwicklung der Aktiva des betrachteten Unternehmens.

iii) Allgemein gilt im Merton-Modell für t = T mit $m := \mu - \sigma^2/2$:

$$A_T = A_0 \exp[mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T],\ \text{mit}\ Z_T \sim N(0,1)\,.$$

$$A_T = A_0 \exp[mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T], \text{ mit } Z_T \sim N(0,1).$$

iv) Im Merton-Modell folgt somit $E[\ln(A_T)] = \ln(A_0) + mT$ und damit:

$$DD = \frac{\ln(A_0 / DPT) + mT}{\sigma\sqrt{T}}.$$

v) Hieraus folgt des Weiteren:

$$PD = P(A_T < DPT) = P(A_T \le DPT)$$

$$= P[mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T \le \ln(DPT / A_0)]$$

$$= P[mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T \le -\ln(A_0 / DPT)]$$

$$= P\left[Z_T \le \frac{-\ln(A_0 / DPT) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

$$= N\left[-\frac{\ln(A_0 / DPT) + mT}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

$$= N(-DD).$$

Aufgabe 3: (15 Minuten)

Unterstellen Sie den homogenen Poissonprozess als Ausfallprozess, die Unabhängigkeit von Ausfallzeit τ und Zinsprozess $\{R(t)\}$, eine Recovery Rate von rc sowie eine sichere fristigkeitsunabhängige Zinsrate r.

1. Leiten Sie die Bewertungsgleichung für den Preis $B^d(t,T)$ eines ausfallbedrohten Zerobond her.

2. Leiten Sie einen expliziten Ausdruck für die risikoneutrale Ausfallintensität λ_Q ab.

3. Welche Bewertungsgleichung für einen ausfallbedrohten Zerobond resultiert im Falle rc = 0?

Hinweis:
Unter den getroffenen Annahmen gilt $B^d(t,T) = B(t,T)\{rc + (1-rc)\,RNPS(t,T)\}$, wobei RNPS(t,T) die risikoneutrale Überlebenswahrscheinlichkeit bezeichne.

Lösungsskizze:

Es bezeichne λ_Q die Ausfallintensität des homogenen Poissonprozesses unter Q.

1. Aus dem Hinweis folgt im Falle eines Poissonprozesses mit Ausfallintensität λ_Q

$$B^d(t,T) = e^{-r(T-t)}\left\{rc + (1-rc)e^{-\lambda_Q(T-t)}\right\}$$

2. Aus vorstehender Gleichung folgt

$$B^d(t,T)e^{r(T-t)} - rc = LGD e^{-\lambda_Q(T-t)}$$

und damit

$$e^{\lambda_Q(T-t)} = \frac{LGD}{B^d(t,T)\exp[r(T-t)] - rc}$$

Auflösung nach λ_Q:

$$\lambda_Q = \frac{1}{T-t}\ln\left\{\frac{LGD}{B^d(t,T)\exp[r(T-t)] - rc}\right\}$$

3. $$B^d(t,T) = e^{-r(T-t)} \cdot e^{-\lambda_Q(T-t)}$$
$$= e^{-(r+\lambda_Q)(T-t)}$$

Block II (Bartels)

Aufgabe 4: (40 Minuten)

Für eine Lebensversicherung gegen Einmalbeitrag wird eine endfällige Garantieleistung versprochen (GMMB, Guaranteed Minimum Maturity Benefit).

*Die Anlagestrategie des Versicherungsunternehmens sieht nur Investments in einen Aktienfonds vor. Zur Abschätzung der **Garantiekosten** soll das Black-Scholes-Modell angewendet werden. Dabei geht der Aktuar des Unternehmens davon aus, dass der Kursverlauf des Aktienfonds einer geometrischen Brownschen Bewegung mit einer **Volatilität** von **20 Prozent** folgt, und es wird eine **risikolose Zinsrate von 6 %** pro Jahr unterstellt. Ferner ist zu berücksichtigen, dass Jahr für Jahr für die Vermögensverwaltung eine **Management Charge von 3 %** nachschüssig erhoben wird.*

Welche Absicherungskosten oder Garantiekosten ergeben sich bei diesem Ansatz für eine nach Ablauf von **zehn Jahren** endfällige **Garantieleistung G** in Höhe von **100 %** des Anfangsbetrages?
Hierbei wird nur der Anfangsbetrag berücksichtigt, der für die Vermögensanlage nach Abzug der Kosten für Biometrie zur Verfügung steht, außerdem lässt man zunächst Stornowahrscheinlichkeiten und Überlebenswahrscheinlichkeiten bei der Berechnung der Garantiekosten außer acht.

(Anleitung: Nach Voraussetzung folgt der Preisprozess S_t des Aktienfonds einer geometrischen Brownschen Bewegung, d.h. es ist $S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{v^2}{2})t + vW_t}$ mit einem Wienerprozess W_t.

Die Black-Scholes-Formel für eine Europäische Put-Option auf das Basispapier S mit Ausübungspreis K und Ausübungszeitpunkt T ergibt dann als Preis im Zeitpunkt t = 0: $P = K \cdot e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$

Hierbei sind $d_1 = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{v^2}{2})T}{v \cdot \sqrt{T}}$, $d_2 = d_1 - v \cdot \sqrt{T}$ und N(.) bezeichnet die Verteilungsfunktion der Normalverteilung. Für die Entwicklung des maßgeblichen Fondsvermögens gilt dann $F_T = F_0 \frac{S_T}{S_0}(1-m)^T$, wenn m die jährliche Management Charge bezeichnet. Man berechne die Garantiekosten mit einer passenden Modifikation der Black-Scholes-Formel. Für die numerische Berechnung verwende man die Werte N(-0.783308...) = 0.2167 bzw. N(-0.150853...) = 0.4400).

Lösungsskizze:

Zweckmäßigerweise normiert man zunächst $F_0 = S_0$, dann ist das maßgebliche Fondsvermögen bei Ablauf des Vertrages

(1) $F_T = S_T \cdot (1-m)^T$

und man kann in dem Black-Scholes-Modellrahmen die Garantiekosten (GMMB) für die garantierte Leistung G bei Ablauf so berechnen: $e^{-rT}E*[(G-F_T)^+]$, wobei der Stern am Erwartungswert bedeutet, dass zur Berechnung des Erwartungswertes das äquivalente Martingalmaß benutzt wird, unter dem der Driftparameter eliminiert ist. Um für $G=S_0=F_0$ den Wert $e^{-rT}E*[(G-F_T)^+]$ mit der Put-Optionspreis-Formel zu berechnen, hat man nach Gleichung (1) die Größe

$$e^{-rT}E*[(G-F_T)^+]= e^{-rT}E*[(G-S_T(1-m)^T)^+]=(1-m)^T e^{-rT}E*[G(1-m)^{-T}-S_T)^+]$$

zu berechnen; dass ist aber gerade bis auf den Faktor $(1-m)^T$ die Preisformel für eine Put-Option auf das Basispapier S mit Ausübungspreis $K=G\cdot(1-m)^{-T}$.
Mit der in der Anleitung gegebenen Formel erhält man dann:

$$e^{-rT}E*[(G-F_T)^+]= G\cdot e^{-rT}N(-d_2)-(1-m)^T S_0 N(-d_1) \quad \text{mit}$$

$$d_1=\frac{\log(\frac{S_0}{G}(1-m)^T)+(r+\frac{v^2}{2})T}{v\cdot\sqrt{T}}=\frac{\log(\frac{S_0}{G})+(r+\log(1-m)+\frac{v^2}{2})T}{v\cdot\sqrt{T}} \quad \text{und } d_2=d_1-v\cdot\sqrt{T}\,.$$

Nun berechnen sich diese Werte für r = 0.06, m =0.03 , T = 10 und v = 0.2 zu

$d_1=0.783308707..$ und $d_2=0.150853175..$

Mit der beigefügten Tabelle der Normalverteilung

ergibt dies $N(-d_1)=0.2167..$ sowie $N(-d_2)=0.4400..$

und damit berechnet man den gesuchten Wert $e^{-rT}E*[(G-F_T)^+]$ zu $\sim 0.082\ldots$, d.h. die endfälligen Garantiekosten betragen vor Berücksichtigung von Storno- und Überlebenswahrscheinlichkeiten etwas mehr als 8 % des Anfangsbetrages.

<u>Aufgabe 5:</u> (20 Minuten)

Bei einer Versicherung gegen Einmalbeitrag EB wird das nicht für die Deckung des biometrischen Risikos und für die Verwaltungskosten benötigte Kapital EB-Ko folgendermaßen investiert:

Ein fester proportionaler Anteil b wird in einen mit Risiko behafteten Aktienfonds investiert. Der Preisprozess $\{S_t | 0\le t\le T\}$ *dieses Fonds folge einer geometrischen Brownschen Bewegung, etwa* $S_t=S_0\cdot e^{(\mu-\frac{v^2}{2})t+vW_t}$.

Der restliche Anteil 1-b wird in eine risikolose Anlage investiert, die sich mit einer festen exponentiellen Zinsrate r kontinuierlich weiterentwickelt: $B_t=B_0\cdot e^{rt}$.

Die idealisierte kontinuierliche Anlagestrategie sieht vor, dass stets die anvisierten proportionalen Anteile gehalten werden können:

Stets b Anteile des Gesamtvermögens in der riskanten Anlage und 1-b Anteile risikolos.

(i) Man begründe, dass unter den genannten Annahmen sich der Wert $A_b(t)$ des Anlagevermögens folgendermaßen dynamisch entwickelt, wenn man von einem Startvermögen 1 ausgeht:

$$A_b(t) = \exp((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2})t + bv \cdot W_t)$$ **(10 Minuten)**

(ii) Das Versicherungsunternehmen entscheidet sich für eine endfällige Garantie, das heißt, dem Kunden wird nur zum Ablauftermin T eine Ablaufleistung $(\text{EB-Ko}) \cdot e^{r_G T}$ versprochen mit einem Garantiezins r_G. Bei vorzeitigem Rückkauf orientiert sich der Wert der Auszahlung an den Kapitalmarktverhältnissen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verfehlt man mit der beschriebenen Anlagestrategie die anvisierte Ablaufleistung $(\text{EB-Ko}) \cdot e^{r_G T}$? **(10 Minuten)**

(Anleitung: zu (i): Man berechne die infinitesimalen Inkremente für die jeweiligen Anlagen:
$dS_t = \mu \cdot S_t \cdot dt + v \cdot S_t\, dW_t$; $d B_t = r \cdot B_t \cdot dt$; $d A_b(t) = ...$ und versuche, die vorgeschriebene feste Aufteilung der Anteile in diesen kleinen Zeitabschnitten einzuhalten.

zu (ii): Es geht um die Berechnung der folgenden Wahrscheinlichkeit:
$P(A_b(T) < e^{r_G T})$, hier kann man die angegebene Formel von Teil (i) verwenden.)

Lösungsskizze:

Zu (i) :

Ist V(t) der Wert der Vermögensanlage, so gilt in kleinen Zeitabschnitten für die Dynamik der Inkremente, wenn man b Anteile in der riskanten Anlage hält und 1-b Anteile in der risikolosen Anlage:

$$d V(t) = b \cdot (\mu \cdot V(t) \cdot dt + v \cdot V(t) \cdot dW_t) + (1-b) \cdot V(t) \cdot r \cdot dt = (b \cdot \mu + (1-b) \cdot r) \cdot V(t) \cdot dt + b \cdot v \cdot V(t) \cdot dW_t$$

und hieraus ergibt sich die behauptete Identität $V(t) = \exp((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2})t + bv \cdot W_t)$, wenn man das Anfangsvermögen auf 1 normiert.

Zu (ii):

Man hat zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit: $P(A_b(T) < e^{r_G T})$ nur die Formel von Teil (i) zu verwenden.

Das ergibt:

$$P(A_b(T) < e^{r_G T}) = P(\exp((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2})T + bv \cdot W_T) < e^{r_G T}) =$$

$$= P(((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2})T + bv \cdot W_T) < r_G T) = P(W_T < \frac{T(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b \cdot v}) =$$

$$N(\frac{T(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b \cdot v \cdot \sqrt{T}}) = N(\frac{\sqrt{T} \cdot (r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b \cdot v}) \quad ,$$

wenn wie üblich N(.) die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist.

<u>Block III</u> (Maurer)

<u>Aufgabe 6:</u> "Schätzrisiken und Internationale Portfolio-Diversifikation" (20 Minuten)

Gegeben sei eine Zwei-Länder-Welt mit einem Wertpapier 1 aus Land 1 (Heimatland des Investors) und einem Wertpapier 2 aus Land 2 (Ausland). Es werden folgende Bezeichnungen für die betrachtete Investmentperiode getroffen.

R_i := lokale Rendite von Wertpapier i (i = 1, 2),
e_2 : = Wechselkursrendite zwischen Land 2 und Land 1,

Gegeben seien die Erwartungswerte und Standardabweichungen der Renditen:

$\mu(R_1) = 0{,}2725$; $\mu(R_2) = 0{,}1075$; $\mu(e_2) = 0{,}04$
$\sigma(R_1) = 0{,}3$; $\sigma(R_2) = 0{,}1$; $\sigma(e_2) = 0{,}08$

Der Zinssatz für eine risikolose Anlage in Land 1 (Inland) bzw. Land 2 (Ausland) beträgt:

$r_1 = 0{,}10$ bzw. $r_2 = 0{,}05$.

Die Rendite-Kovarianzen sind gegeben durch:

	R_1	R_2	e_2
R_1	0,09	0,0045	-0,0045
R_2		0,01	-0,0032
e_2			0,0064

- Führen Sie die folgenden Berechnungen aus der Sicht des inländischen Investors durch.

- Vernachlässigen Sie bei Ihren Berechnungen alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der (R_2e_2) Kreuzprodukte.
- Führen Sie alle Berechnungen mit 4 Nachkommastellen durch.
- Beachten Sie die Tabelle zur Standardnormalverteilung im Anhang.

a) Ein Investor fordert eine Portfoliorendite, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% über einer Mindestrendite von 2% liegt. Welche Struktur (relative Investitionsgewichte), welche Standardabweichung und welche erwartete Rendite besitzt das Portfolio aus Wertpapier 1 und 2, welches die obige Bedingung erfüllt, und die erwartete Rendite maximiert. Unterstellen Sie zur Lösung des Problems normalverteilte Renditen. **(5 Minuten)**
Hinweis: Der effiziente Rand der aus Wertpapier 1 und 2 konstruierbaren Portfolios hat die Form $\mu = 0{,}16 + \sqrt{0{,}15625(\sigma^2 - 0{,}009)}$.

b) Gehen Sie davon aus, der Investor wünscht nun ein varianzminimales Portfolio (MVP). Welche Struktur (relative Investitionsgewichte), welche Standardabweichung und welche erwartete Rendite ergeben sich? **(5 Minuten)**

c) Unterstellen Sie nunmehr, der Investor korrigiert die Schätzwerte für die erwarteten Renditen gemäß dem Bayes-Stein-Verfahren mit einem „Schrumpfungsfaktor“ $\omega = 0{,}2$ (hin zum MVP). Berechnen Sie zunächst die korrigierten erwarteten Renditen. Der Investor versucht wiederum die erwartete Portfoliorendite zu maximieren unter der Nebenbedingung, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% eine Mindestrendite von 2% erzielt wird. Welche Struktur (relative Investitionsgewichte), welche Standardabweichung und welche erwartete Rendite ergeben sich nun? **(5 Minuten)**
Hinweis: Der effiziente Rand im Fall $\omega = 0{,}2$ hat die Form $\mu = 0{,}16 + \sqrt{0{,}1(\sigma^2 - 0{,}009)}$.

d) Erläutern Sie die methodische Vorgehensweise bei einem „Backtesting“ von Portfoliostrategien im Asset-Management. **(5 Minuten)**

Lösungsskizze:

Es ergibt sich für die ungesicherten Wertpapiere in inländischer Währung:

$\mu(R_1) = 0{,}2725$; $\mu(R_2 + e_2) = 0{,}1475$;
$\sigma(R_1) = 0{,}3$; $\sigma(R_2 + e_2) = 0{,}1$;

Weiterhin gilt: $Cov(R_1, R_2 + e_2) = Cov(R_1, e_2) + Cov(R_1, R_2) = 0$.

a) 1) Effizienter Rand

$$\mu = 0{,}16 + \sqrt{0{,}15625(\sigma^2 - 0{,}009)}$$

2) Sei $N_{0.9}$ das 90% Quantil der Standardnormalverteilung dann resultiert für die Shortfallrestriktion $\mu = 0.02 + N_{0.9}\sigma$. Gemäß beigefügter Tabelle der N(0, 1)-Verteilung gilt $1{,}28 < N_{0,9} < 1{,}29$. Im Folgenden wird (approximativ von der sicheren Seite) $N_{0.9} = 1{,}29$ gesetzt.

$\rightarrow \mu = 0{,}02 + 1{,}29\,\sigma$

Setze 1) = 2)

$0{,}02 + 1{,}29\sigma = 0{,}16 + \sqrt{0{,}15625(\sigma^2 - 0{,}009)}$

Maximaler Erwartungswert unter Einhaltung der Shortfallrestriktion.

$\Rightarrow \sigma_{opt} = 0{,}1401$

$\rightarrow \mu = 0{,}2007 = 0{,}2725x + 0{,}1475(1-x)$;

$\rightarrow x_1 = 0{,}4261$; $x_2 = 0{,}5739$

b) Mit Hilfe des effizienten Rands aus Aufgabe a) folgt unmittelbar:

$\sigma^2(MVP) = 0{,}009$, $\sigma(MVP) = 0{,}0949$;
$\mu(MVP) = 0{,}16 = 0{,}2725x + 0{,}1475(1-x)$;
$\rightarrow x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 0{,}9$

c) $E(R_{1,BS}) = 0{,}2725(1-\omega) + 0{,}16\omega = 0{,}25$
$E(R_{1,BS}+e_{2,BS}) = 0{,}1475(1-\omega) + 0{,}16\omega = 0{,}15$
1) Effizienter Rand $\mu = 0{,}16 + \sqrt{0{,}1(\sigma^2 - 0{,}009)}$
2) Shortfallrestriktion $\mu = 0{,}02 + 1{,}29\sigma$
1) = 2)

$0{,}02 + 1{,}29\sigma = 0{,}16 + \sqrt{0{,}1(\sigma^2 - 0{,}009)}$

Maximaler Erwartungswert unter Einhaltung der Shortfallrestriktion.

$\Rightarrow \sigma_{opt} = 0{,}1305$

$\rightarrow \mu = 0{,}1883 = 0{,}25x + 0{,}15(1-x)$

$\rightarrow x_1 = 0{,}3833$; $x_2 = 0{,}6167$

d) Ausgangspunkt: Historische Return-Zeitreihen (etwa monatlich). Schritt 1: Festlegung einer In-the-Sample Periode (etwa 30 Monate) mit der Parameter einer Portfolio-Optimierungsstrategie kalibriert werden (Erwartungswerte, Kovarianzmatrix). Schritt 2: Bestimmung der optimalen Portfoliogewichte für betreffende Strategie (etwa MVP, Tangentialportfolio, u.a.) zum Ende der In-the-Sample Periode. Schritt 3: Bestimmung der realisierten Rendite der Portfoliostrategie in der Out-of-Sample Periode (etwa 1 Monat nach der In-the-Sample Periode). Schritt 4: Fortschreiten der In-the-Sample Periode für neue (Rendite-)Information und Wiederholung von Schritt 1 bis 3. Resultat ist eine Zeitreihe von Out-of-Sample Renditen der zu beurteilenden Portfoliostrategie. Daraus werden dann verschiedenen Rendite-/Risikokennzahlen berechnet (Mittelwert, Volatilität, Turnover, Sharpe-Ratio u.a.). Siehe hierzu auch siehe Albrecht/Maurer 2008, Kapitel 11).

<u>Aufgabe 7:</u> "Entnahmepläne mit Immobilien und Internationalen Investments" (40 Minuten)

Sie arbeiten in der Abteilung Produktentwicklung einer Kapitalanlagegesellschaft und beschäftigen sich mit Lösungen für die Auszahlungsphase der Altersversorgung. Der vom Kunden geleistete Einmalbeitrag soll entweder in Anteile an einem Offenen Immobilienfonds

(OIF) oder in einen internationalen Aktienfonds (IAF) investiert werden. Sie sollen Beispielrechnungen für einen Einmalbetrag von 100.000 Euro erstellen. Nach gründlicher Recherche treffen Sie folgende Annahmen:

Annahmen zu den Investments:

Immobilien: Die auf kontinuierlicher Basis berechneten jährlichen (Log-)Renditen R_t des OIF-Investments weisen eine erwartete Rendite von 2% p.a auf, bei einer Volatilität von 2% p.a. und einer Autokorrelation 1. Ordnung von a = 0,6.

Aktien: Der Internationale Aktienfonds investiert schwerpunktmäßig in US-amerikanische Aktien. Hierbei erwarten Sie für US-Aktien in lokaler Währung (also in US$) eine auf kontinuierlicher Basis berechnete (Log-)Rendite von 6% p.a. und eine Volatilität von 20% p.a. Für die ebenfalls auf kontinuierlicher Basis berechnete (Log-)Wechselkursrendite des US-Dollars relativ zum Euro beträgt der Erwartungswert 0% p.a., die Volatilität 5% p.a. und die Korrelation mit der lokalen Rendite von US-Aktien 0.

Unterstellen Sie im Folgenden zeitlich unabhängig und identisch normalverteilte Log-Renditen mit gegebenenfalls adjustierter Volatilität nach dem Blundell/Ward-Verfahren. Vernachlässigen Sie dabei Sterblichkeitsaspekte.

Konstruktion Auszahlungsplan:

- Der Kunde zahlt einen Einmalbeitrag von 100.000 Euro, der vollständig für den Kauf von Anteilen des Offenen Immobilienfonds (OIF) bzw. Internationalen Aktienfonds (IAF) verwendet wird.
- Der aktuelle Preis für einen Fondsanteil beträgt sowohl für den OIF als auch IAF jeweils EUR 100 zzgl. einem Ausgabeaufschlag von 5% auf den Anteilswert. Es können beliebige Bruchteile eines Anteils zum jeweiligen Marktwert erworben/zurückgegeben werden.
- Zu Beginn jeden Jahres werden so viele Fondsanteile zurückgegeben, so dass eine Auszahlung (B_t) an den Kunden in Höhe von 5% des zu Jahresbeginn jeweils noch vorhandenen Fondsvermögens (V_t) zustande kommt ($B_t = 0{,}05 * V_t$). Die erste Auszahlung erfolgt nach einem Jahr zum Zeitpunkt t=1 (d.h. $B_0 = 0$).

Fragen:

Beantworten Sie die folgenden Fragen jeweils bei Anlage der 100.000 Euro in den Immobilienfonds (OIF) und den Internationalen Aktienfonds (IAF). Beachten Sie die Hinweise 1 – 3:

a) Bestimmen Sie für die mögliche Auszahlungshöhe nach 10 bzw. 20 Jahren: (i) den Erwartungswert, (ii) den Median, (iii) die Standardabweichung, (iv) den Betrag der mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens erreicht wird und (v) die Wahrscheinlichkeit, dass nach Ablauf von t=10 bzw. t=20 Jahren die Auszahlung geringer ist als 5.000 Euro. **(20 Minuten)**

b) Bestimmen Sie für das noch vorhandene Restvermögen nach 10 bzw. 20 Jahren (i) den Erwartungswert, (ii) den Median, (iii) die Standardabweichung, (iv) den Betrag der mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens erreicht wird und (v) die Wahrscheinlichkeit, dass nach Ablauf von t=10 bzw. t=20 Jahren das Restvermögen geringer ist als 100.000 Euro. **(20 Minuten)**

Hinweise:

1) Sei X ~ LN(m, v²) eine logarithmisch normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern m und v², und N_α das α-Quantil der Standardnormalverteilung (siehe Tabelle im Anhang), dann gilt $aX^b \sim LN(\ln a + bm, b^2v^2)$ sowie für Erwartungswert, Varianz, und α-Quantil

$$E(X) = e^{m+0,5v^2}$$
$$Var(X) = E(X)^2\left(e^{v^2} - 1\right)$$
$$LN_\alpha(m, v^2) = e^{m+N_\alpha \cdot v} = e^{m-N_{1-\alpha} \cdot v}$$

2) Das Blundell/Ward-Verfahren korrigiert die Varianz gemäß: $VAR(r_t^*) = VAR(r_t)\dfrac{1-a^2}{(1-a)^2}$

3) Für die auf kontinuierlicher Basis berechnete (Log-)EUR-Rendite einer Anlage in US-Aktien gilt: $R_€ = R_{US\$} + e_{US\$/€}$, wobei $R_{US\$}$ die Log-Rendite von US-Aktien und $e_{US\$/€}$ die Log-Wechselkursrendite ist (keine Kreuzprodukte).

<u>Lösungsskizze:</u>

Korrektur von STD der Einperioden Logrendite des OIF gemäß dem BW-Verfahren:

$$\sigma_{OIF}(R_t) = STD(R_t^*)\sqrt{\frac{1-a^2}{(1-a)^2}} = 2\% \cdot \sqrt{\frac{1-0,6^2}{(1-0,6)^2}} = 4\%$$

Berechnung STD der Einperioden-Logrendite des IAF:

$$\sigma_{IAF}(R_t) = \sqrt{Var(R_{Lokal}) + Var(R_{WK})} = \sqrt{0,2^2 + 0,05^2} = 20,62\%$$

Für kumulierte Logrendite bis T gilt: $\sum_{t=1}^{T} R_t \sim N\left(T\mu; \sigma\sqrt{T}\right)$.

$$\sum_{t=1}^{T} R_t^{OIF} \sim N\left(T \cdot 0,02; \sqrt{T} \cdot 0,04\right) \text{ bzw. } \sum_{t=1}^{T} R_t^{IAF} \sim N\left(T \cdot 0,06; \sqrt{T} \cdot 0,2062\right)$$

Startvermögen: V_0 = 100.000/(1,05) = 95.238,10

Zeitliche Entwicklung des Fondsvermögens (t = 1, 2, …) vor Entnahme:

$$V_t = (0,95)^{t-1} V_0 \exp\left(\sum_{i=1}^{t} R_i\right)$$

Entwicklung der Entnahmen (t = 1, 2, …):

$$B_t = 0,05V_t = 0,05 \cdot (0,95)^{t-1} V_0 \exp\left(\sum_{i=1}^{t} R_i\right)$$

$$\ln\left(B_t\right) \sim N\left(m_t, v_t^2\right) \text{ mit } m_t = \ln\left(0,05 \cdot (0,95)^{t-1} V_0\right) + t \cdot \mu \; ; \quad v_t = \sigma \cdot \sqrt{t}$$

OIF: m(10) = 8,207; v(10) = 0,1265 bzw. m(20) = 7,894 ; v(20) = 0,1789
IAF: m(10) = 8,607; v(10) = 0,6519 bzw. m(20) = 8,694; v(20) = 0,922

Damit ergeben sich

$$E(B_t) = \exp(m_t + 0{,}5v_t^2) = \frac{100.000}{1{,}05} 0{,}05 \cdot (0{,}95)^{t-1} \exp\left(t \cdot \mu + 0{,}5\sigma^2 \cdot t\right)$$

$$STD(B_t) = E(B_t) \cdot \sqrt{(\exp(\sigma^2 t) - 1)}$$

$$LN_{50\%}(B_t) = \exp(m_t) = \frac{100.000}{1{,}05} 0{,}05 \cdot (0{,}95)^{t-1} \exp\left(t \cdot \mu\right)$$

$$LN_{95\%}(B_t) = \exp(m_t - 1{,}645 v_t) = \frac{100.000}{1{,}05} 0{,}05 \cdot (0{,}95)^{t-1} \exp\left(t \cdot \mu - 1{,}645 \cdot \sigma\sqrt{t}\right)$$

$$SW = P(B_t < 5000) = P\left(\frac{\ln(B_t) - m_t}{v_t} < \frac{\ln(5000) - m_t}{v_t}\right) = \Phi\left(\frac{\ln(5000) - m_t}{v_t}\right) = P\left(\frac{B_t}{0{,}05} = V_t < 100000\right)$$

Φ ist Wert der Standardnormalverteilung. Wegen $V_t = B_t / 0{,}05$ entsprechen die Werte für EW, STD, Median und Quantil für das Endvermögen dem zwanzigfachen der Werte für die Entnahmen. Die Shortfall-Wahrscheinlichkeiten ein Zielendvermögen von 100.000 = 5.000 / 5% zu verfehlen sind identisch mit denjenigen die Zielentnahme von 5000 zu verfehlen.

t	SW	EW	Median	LN_95%	STD
			Entnahme Immobilien		
10	99,3%	3.695	3.666	2.977	469
20	<99,9%	2.724	2.681	1.997	491
			Entnahme Aktien		
10	44,5%	6.763	5.469	1.871	4.922
20	42,4%	9.126	5.966	1.309	10.562
			Endvermögen Immobilien		
10	99,3%	73.902	73.313	59.542	9.385
20	<99,9%	54.479	53.614	39.948	9.824
			Endvermögen Aktien		
10	44,5%	135.266	109.370	37.428	98.437
20	42,4%	182.510	119.320	26.189	211.243

Anhang

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung Φ(x)

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000