Prüfung DAV-Spezialwissen in Finanzmathematik 2011

Block I (Albrecht)

Aufgabe 1: (25 Minuten)

Gegeben sei im Zeitpunkt t eine Futureposition mit Liefertermin T > t auf ein einkommensfreies Basisobjekt. Wie hoch ist der Value at Risk dieser Position über ein Intervall der Länge h, wenn für die Rendite des Basisobjekts gilt $R_h \sim N(\mu h, \sigma^2 h)$. Am Markt herrsche sowohl zum Zeitpunkt t als auch zum Zeitpunkt t+h < T derselbe (diskrete) fristigkeitsunabhängige Zins r und es bestehen sowohl in t als auch in t+h Cost of Carry-Preise.

Hinweis:
Die Cost of Carry-Formel lautet : $F(t,T) = K_t(1+r)^{T-t}$, dabei bezeichne $\{K_t\}$ die Kursentwicklung des Basisobjekts.

Lösungsskizze:

Es gilt zunächst:

$$\begin{aligned} L_h &= F(t,T) - F(t+h,T) = K_t(1+r)^{T-t} - K_{t+h}(1+r)^{T-t-h} \\ &= K_t(1+r)^{T-t} - K_t(1+R_h)(1+r)^{T-t-h} \\ &= K_t(1+r)^{T-t}[1-(1+R_h)\ (1+r)^{-h}] \end{aligned}$$

Für $L_h \sim N(E(L_h), Var(L_h))$ folgt damit:

$$\begin{aligned} E(L_h) &= K_t(1+r)^{T-t}[1-(1+\mu h)(1+r)^{-h}] \\ \sigma(L_h) &= K_t \sigma \sqrt{h}(1+r)^{T-t-h}. \end{aligned}$$

Und damit insgesamt :

$$VaR_\alpha = E(L_h) + N_{1-\alpha}\sigma(L_h)\ .$$

Aufgabe 2: (20 Minuten)

Unterstellen Sie das Kreditrisikomodell nach Merton sowie Black/Scholes-Optionspreise.

a) Bestimmen Sie den Wert des Fremdkapitals zum Zeitpunkt $0 \le t \le T$.

b) Berechnen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeiten p bzw. q des Unternehmens in $t = 0$ (bei gegebenem Ausfallzeithorizont T) unter dem "physischen" Wahrscheinlichkeitsmaß P bzw. unter dem "risikoneutralen" Wahrscheinlichkeitsmaß Q.

c) Weisen Sie den folgenden Zusammenhang nach, wobei *r* die risikolose Zinsrate bezeichne:

$$q = N\left[N^{-1}(p) + \frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{T}\right].$$

Hinweise:

1) Die Black/Scholes-Formel für eine Europäische Put-Option lautet:

$$P_t = F\exp(-r(T-t))N(-d_2) - S_t N(-d_1),$$

wobei $d_1 = d_1(t)$ und $d_2 = d_2(t)$.

2) Es gilt: $N(-x) = 1 - N(x)$

3) Allgemein gilt (für jedes feste t) für den Prozess $\{A_t\}$, der die stochastische Dynamik der Aktiva des Unternehmens kennzeichnet:

$$A_t = A_0 \exp[mt + \sigma\sqrt{t}W_t], \text{ mit } W_t \sim N(0,1),$$

wobei $m := \mu - \sigma^2/2$.

Lösungsskizze:

a) Allgemein gilt im Merton-Modell für den Wert des ausfallbedrohten Fremdkapitals:

$$L_t = F\exp(-r(T-t)) - P_t \ .$$

Gemäß den Hinweisen 1) und 2) folgt hieraus:

$$\begin{aligned} L_t &= A_t\, N(-d_1) + F\exp(-r(T-t))[1-N(-d_2)] \\ &= A_t[1-N(d_1)] + F\exp(-r(T-t))\,N(d_2) \ . \end{aligned}$$

b) Zu bestimmen ist $p := P(A_T < F)$ bzw. $q := Q(A_T < F)$.

Gemäß Hinweis 3) folgt:

$$\begin{aligned} p &= P(A_T < F) \\ &= P\left[mT + \sigma\sqrt{T}Z_T < \ln(F/A_0)\right] \\ &= P\left[Z_T < \frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= N\left[\frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right] . \end{aligned}$$

Im Falle des risikoneutralen Maßes liegt die gleiche stochastische Dynamik zugrunde, wobei nur der Parameter m durch den Parameter $m^* = r - \sigma^2/2$ zu ersetzen ist. Mithin gilt:

$$q = N\left[\frac{\ln(F/A_0) - m^*T}{\sigma\sqrt{T}}\right] .$$

c) Es gilt zunächst:

1. $N^{-1}(p) = \dfrac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}$.

2. $m^* = m + (r - \mu)$.

Damit folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} q &= N\left[\frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{(\mu - r)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= N\left[N^{-1}(p) + \frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{T}\right] . \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (15 Minuten)

Stellen Sie einen Zusammenhang her zwischen dem Preis B(0,T) eines ausfallfreien Zerobonds und dem Preis $B^d(0,T)$ eines ausfallbedrohten Zerobonds, jeweils mit Laufzeit T.

Unterstellen Sie einen Komplettausfall des Zerobonds sowie die stochastische Unabhängigkeit von Zinsprozess $\{R(t)\}$ und Ausfallzeit τ unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q.

Hinweis: Allgemein gilt für den arbitragefreien Preis P_0 in t = 0 einer Zahlung V_T in T:

$$P_0 = E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T R(s)\,ds\right)V_T\right].$$

Lösungsskizze:

Aufgrund von B(T,T) = 1 gilt zunächst für den Preis eines ausfallfreien Zerobond:

$$\begin{aligned} B(0,T) &= E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T R(s)\,ds\right)B(T,T)\right] \\ &= E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T R(s)\,ds\right)\right]. \end{aligned}$$

Für die Rückzahlung des ausfallbedrohten Zerobond gilt:

$$V_T = \begin{cases} 1 & \tau > T \\ 0 & \tau \le T\,. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} B^d(0,T) &= E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T R(s)\,ds\right)V_T\right] \\ &= E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T R(s)\,ds\right)\right] E_Q(V_T) \\ &= B(0,T)\cdot Q(\tau > T)\,. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung gilt aufgrund der angenommenen Unabhängigkeit von $\{R(t)\}$ und τ.

Block II (Bartels)

Aufgabe 4:

Bei einer aktienindexgebundenen Lebensversicherung mit Einmalbeitrag EB wird ein fester Prozentsatz i(p) der jährlichen Steigerungen eines Index durch Cliquet-Optionen abgesichert. Wenn S(t) den Verlauf des betreffenden Index beschreibt, so wird die folgende Ablaufleistung AL für den Kunden bei Ablauf T des Vertrages versprochen:

$$\mathrm{AL} = EB \cdot \prod_{t=1}^{T} \{1 + i(p)(\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1)^{+}\} \quad .$$

Es wird vorausgesetzt, dass S(t) einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt:

(*) $$d\,S(t) = \mu\ S(t)\,dt + v\,S(t)\,d\,w(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq T,$$

und dass der Zins wie in dem Black-Scholes-Modell konstant deterministisch ist mit exponentieller Zinsrate r. Der aktuelle Wert der Ablaufleistung AL berechnet sich dann zum heutigen Zeitpunkt $t = 0$ zu

$$\exp(-rT)\ E^*[AL] \ ,$$

wobei der Stern am Erwartungswert bedeutet, dass zur Berechnung des Erwartungswertes das äquivalente Martingalmaß, etwa Q benutzt wird.

(i) *Man berechne mit Hilfe der Black-Scholes-Formel E*[AL].*
(30 Minuten)

(Anleitung: Man beachte, dass nach Übergang zu dem neuen Maß Q S(t) der folgenden stochastischen Differentialgleichung genügt:

$d\,S(t) = r\,S(t)\,dt + v\,S(t)\,d\,w^*(t)$, $0 \leq t \leq T$, mit einer Q-Brownschen Bewegung w^*. Lösung dieser Differentialgleichung ist $S(t) = S(0)\exp((r - \frac{1}{2}v^2)\,t + v\,w^*(t))$, damit berechne man die Quotienten S(t)/S(t-1).)

(ii) *Man vergleiche den Wert der obigen indexgebundenen Versicherung mit einer zweiten, bei der neben sonst gleichen Daten die folgende Ablaufleistung versprochen wird:*

$$AL = EB\,(1 + i(p) \sum_{t=1}^{T} (\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1)^{+}).$$

Welches der beiden Ablaufversprechen ist aus Sicht des Kunden mehr wert?
(15 Minuten)

Lösungsskizze:

Zu (i) :

Da die Zufallsvariablen S(t)/S(t-1) unabhängig und gleichverteilt sind für t=1,2,..,T , ist

exp (- rT) E*[$EB \cdot \prod_{t=1}^{T} \{1 + i(p)(\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1)^+\}$] = $EB \cdot \prod_{t=1}^{T} \{e^{-r} + i(p)\, E^*[e^{-r}(\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1)^+]\}$.

Nun ist $E^*[e^{-r}(\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1)^+]$ = exp (- r) E*[(exp((r- $\frac{1}{2}$ v^2) + v w*(1))-1)$^+$] gerade der Black-Scholes-Preis C(1,1) einer Europäischen Call Option mit Ausübungszeitpunkt 1 , Ausübungspreis 1 und momentanem Preis 1 des zugrunde liegenden Basispapiers. Damit folgt dann:

$$\exp(-rT)\ E^*[AL] = EB \cdot \{e^{-r} + i(p)C(1,1)\}^T$$

Wenn man will, kann man hier auch noch die explizite Black-Scholes-Formel für C(1,1) ein-setzen.

Zu (ii):

Für nichtnegative reelle Zahlen x_i gilt offenbar

$$1 + \sum_{i=1}^{n} x_i \le \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) = 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i + \text{Terme höherer Ordnung in den } x_i \quad ,$$

und daher ist das Ablaufversprechen der nach (i) gestalteten Indexgebundenen Versicherung sicher mehr wert als das der Versicherung nach Typ (ii).

Aufgabe 5:

Bei einer Versicherung gegen Einmalbeitrag EB wird das nicht für die Deckung des biometrischen Risikos und für die Verwaltungskosten benötigte Kapital EB-K in einen Aktienfonds investiert. Der Preisprozess $\{F_t | 0 \le t \le T\}$ dieses Fondsbetrages folge einer geometrischen Brownschen Bewegung.

Das Versicherungsunternehmen A entscheidet sich für eine endfällige Garantie, das heißt, dem Kunden wird nur zum Ablauftermin T eine Ablaufleistung (EB-K)$\cdot e^{r_G T}$ versprochen mit einem Garantiezins r_G. Bei vorzeitigem Rückkauf orientiert sich der Wert der Auszahlung nach den Kapitalmarktverhältnissen.

Das Versicherungsunternehmen B gibt bei sonst gleichen Daten eine durchgängige Garantie, wie dies nach deutschem Aufsichtsrecht vorgeschrieben ist, das heißt, zu vorgegebenen Zeitpunkten

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = T$$

wird die Leistung (EB-K)$\cdot e^{r_G t_i}$ für i=1, 2,…, n garantiert.

Man betrachte die Shortfall-Wahrscheinlichkeiten für beide Produkte, dabei tritt ein Shortfall per definitionem genau dann ein, wenn für die entsprechende Kapitalanlage

$F_T < (EB - K) \cdot e^{r_G T}$ im Fall A

bzw.

$F_{t_i} < (EB - K) \cdot e^{r_G t_i}$ für ein $i \in \{1,2,..,n\}$ im Fall B eintritt.

Warum ist die Shortfall-Wahrscheinlichkeit für das Unternehmen A in jedem Fall nicht größer als die, die sich für das Unternehmen B ergibt?
Mit welchem Ansatz lässt sich im Fall A die Shortfall-Wahrscheinlichkeit im Prinzip berechnen, wenn der Preisprozess des Aktienfonds einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt?
(15 Minuten)

Lösungsskizze:

Es geht um die Wahrscheinlichkeiten

$P(F_T < (EB-K)\cdot e^{r_G T})$ im Fall A bzw.

$P(\{F_{t_1} < (EB-K)\cdot e^{r_G t_1}\} \cup \ldots \cup \{F_{t_i} < (EB-K)\cdot e^{r_G t_i}\} \cup \ldots \cup \{F_{t_n} < (EB-K)\cdot e^{r_G t_n}\})$
im Fall B,

und damit ist offensichtlich die Wahrscheinlichkeit im Fall B mindestens so groß wie im Fall A.

Zur prinzipiellen Berechenbarkeit der Wahrscheinlichkeit $P(F_T < (EB-K)\cdot e^{r_G T})$ hat man nur zu beachten, dass man die Zufallsvariable F_T als Wert einer geometrischen Brownschen Bewegung darstellen kann:
$F_T = F_0 \cdot e^{(\mu - \frac{v^2}{2})T + v\cdot W_T}$ mit Driftparameter μ und Volatilität v und einem Wienerprozess W_t; dabei ist W_T normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz T.

Block III (Maurer)

Aufgabe 6: Asset Allokation/Internationale Investments (11 Minuten)

Betrachten Sie eine Zwei-Länder-Welt mit Wertpapier 1 aus Land 1 (Heimatland des Investors) und Wertpapier 2 aus Land 2 (Ausland). Die erwarteten Ein-Perioden-Renditen μ_i sowie die zugehörigen Standardabweichungen σ_i (i = 1, 2) weisen die folgenden Werte auf:

$$\mu_1 = 0{,}2 \text{ bzw. } \sigma_1 = 0{,}3$$
$$\mu_2 = 0{,}1 \text{ bzw. } \sigma_2 = 0{,}2.$$

Ihnen steht im Folgenden keine risikolose Anlage zur Verfügung. Es werden folgende Bezeichnungen für die betrachtete Investmentperiode getroffen:

R_i := lokale Rendite des Wertpapiers i (i = 1, 2),
e_2 : = Wechselkursrendite zwischen Land 2 und Land 1.

Gegeben seien der Erwartungswert $\mu(e_2) = 0{,}06$ und die Standardabweichung $\sigma(e_2) = 0{,}18$ der Wechselkursrendite zwischen Land 2 und Land 1. Die Korrelationsmatrix ist gegeben durch:

	R_1	R_2	e_2
R_1	1	0	0
R_2		1	0,4
e_2			1

Die Forwardprämie beträgt $f_2 = 3\%$.

Hinweis:
- Führen Sie die folgenden Berechnungen aus der Sicht des inländischen Investors durch.
- Vernachlässigen Sie bei Ihren Berechnungen alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der (R_2e_2) Kreuzprodukte.
- Führen Sie alle Berechnungen mit 4 Nachkommastellen durch.

a) Berechnen Sie die Struktur, den Renditeerwartungswert und die Renditestandardabweichung des aus Wertpapier 1 und 2 gebildeten Minimum-Varianz-Portfolios (MVP), wenn der Investor eine vollständige Wechselkurssicherung durchführt.
(4 Minuten)

b) Der Investor wählt im Vorfeld eine Asset-Allokation von 50% in Wertpapier 1 und 50% in Wertpapier 2. Seine Präferenzfunktion hat die Form $U = \mu - 2\sigma^2$. Ermitteln Sie den optimalen Umfang der Wechselkurssicherung. Ist es sichergestellt, dass das global optimale Portfolio ermittelt wurde? **(7 Minuten)**

Lösungsskizze:

a) $\sigma^2_{MVP}(h=1) = x^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-x)^2 \sigma_2^2$

$$\frac{\partial \sigma^2_{MVP}(h=1)}{\partial x} = 2 \cdot \sigma_1^2 \cdot x - 2 \cdot (1-x) \cdot \sigma_2^2 \overset{!}{=} 0$$

$$x = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{0{,}2^2}{0{,}3^2 + 0{,}2^2} \approx 0{,}3077 \Rightarrow (1-x) = 0{,}6923$$

$$\mu_{MVP}(h=1) = \mu_1 \cdot x + (\mu_2 + f_2) \cdot (1-x)$$

$$\mu_{MVP}(h=1) = 0{,}2 \cdot 0{,}3077 + (0{,}1 + 0{,}03) \cdot 0{,}6923 \approx 0{,}1515$$

$$\sigma^2_{MVP}(h=1) = x^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-x)^2$$

$$\sigma^2_{MVP}(h=1) = 0{,}3077^2 \cdot 0{,}3^2 + 0{,}6923 \cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}0277 \Rightarrow \sigma_{MVP}(h=1) \approx 0{,}1664$$

b) Mit $U = \mu - 2 \cdot \sigma^2$

sowie

$$\mu = \mu_1 \cdot x + \left[\mu_2 + e_2 + h \cdot (f_2 - e_2)\right] \cdot (1-x)$$

und

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 \cdot x^2 + \left[\sigma_2^2 + (1-h)^2 \cdot \sigma_e^2 + 2 \cdot (1-h) \cdot \rho_{2,e} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_e\right] \cdot (1-x)$$

ergibt sich

$$\frac{\partial U}{\partial h} = (f_2 - e_2) \cdot (1-x) - 2 \cdot \left[2 \cdot (1-h) \cdot (-1) \cdot \sigma_e^2 - 2 \cdot \rho_{2,e} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_e\right] \cdot (1-x)^2$$

$$h = \frac{(f_2 - e_2) \cdot (1-x) + 4 \cdot \sigma_e^2 \cdot (1-x)^2 + 4 \cdot \rho_{2,e} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_e \cdot (1-x)^2}{4 \cdot \sigma_e^2 \cdot (1-x)^2}$$

Mit $x = \frac{1}{2}$ ergibt sich

$$h = \frac{0{,}5 \cdot (f_2 - e_2) + \sigma_e^2 + \rho_{2,e} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_e}{\sigma_e^2} = \frac{0{,}5 \cdot (0{,}03 - 0{,}06) + 0{,}0324 + 0{,}0144}{0{,}0324} \approx 0{,}9815$$

<u>Aufgabe 7:</u> "Devisenforwards" (19 Minuten)

Sie sind ein europäischer Investor. Der risikolose diskrete Zins in der Eurozone beträgt $r_{eu} = 3\%$ p.a. Der risikolose diskrete Zins im US-Dollarraum beträgt hingegen $r_{us} = 6\%$ p.a. Der Wechselkurs (Preisnotierung) ist aktuell $S = 0.80\ \frac{€}{\$}$.

a) Berechnen Sie den arbitragefreien Forwardkurs F und Forwardprämie f für einen Devisenforward mit Laufzeit 1 Jahr **(4 Minuten)**

Am Markt beobachten Sie hingegen einen Forwardkurs von $\tilde{\mathrm{F}} = 0.79\ \frac{€}{\$}$.

b) Formulieren Sie in Worten (Rechnung folgt in Aufgabenteil c)) eine Strategie, um diese Arbitrage auszunutzen, wenn Sie in der Eurozone Kredit aufnehmen können. Versuchen Sie bei Ihrer Antwort, die einzelnen Transaktionen in Bulletins/Punkte zu gliedern **(5 Minuten).**

c) Welchen Arbitragegewinn (in Euro) können Sie damit erzielen, wenn Sie in der Eurozone heute maximal 10.000€ Kredit aufnehmen können. (Kreditaufnahme in Dollar ist Ihnen nicht möglich.) **(5 Minuten)**

d) In der nachfolgenden Tabelle sind die Crossrates verschiedener Währungen enthalten. Ermitteln Sie die fehlenden Werte A bis E unter der Annahme, dass zwischen den Devisenmärkten keine (Dreiecks-) Arbitragemöglichkeiten existieren! **(5 Minuten)**

Währung	EUR	USD	GBP	SFR
EUR	1	B	0,8813	1,1342
USD	A	1	C	E
GBP	1,1347	1,6188	1	1,2868
SFR	0,8924	D	0,7817	1

Lösungsskizze:

a)

$$1 + r_{eu} = \frac{1}{S}\,(1 + r_{us})F \Leftrightarrow F = S \cdot \frac{1 + r_{eu}}{1 + r_{us}}$$

$$F = 0.80\,\frac{1.03}{1.06} = 0.7774\,\frac{€}{\$}$$

$$f = \frac{F}{S} - 1 = \frac{0.7774}{0.80} - 1 = -0.0283$$

b)

$$\tilde{F} = 0.79 > F = 0.7774$$

$$\Rightarrow 1 + r_{eu} < \frac{1}{S}\,(1 + r_{us})\tilde{F}$$

i) Heute: Geld in der Eurozone leihen zu r_{eu} für ein Jahr leihen

ii) Heute: Umtausch des geliehenen Geldes per $1/S$ in US-Dollar

iii) Heute: Anlage in Dollarraum zu $(1 + r_{us})$ über ein Jahr

iv) Nach einem Jahr: Rücktausch Dollar-Anlage in Euro zu <u>heute vereinbarten</u> Kurs $\tilde{F}$

v) In einem Jahr: Euro-Kredit tilgen; es sollte Geld übrig bleiben.

c)

Kreditaufnahme: in einem Jahr sind zu tilgen: $K_1 = 10\,000\,€ \cdot 1.03 = 10\,300\,€$

Umtausch in Dollar des Kredits: $10\,000€ \cdot \frac{1}{0.80}\frac{\$}{€} = 12500\,\$$

US-Geldmarktanlage in einem Jahr: $12500\,\$ \cdot 1.06 = 13\,250\,\$$

Rücktausch: $13\,250\,\$\ \ 0.79\frac{€}{\$} = 10467.50\,€$

Nach Tilgung bleiben übrig: $10467.5\,€ - 10\,300€ = 167.50€$

<u>**Alternative:**</u> Da nur 10 300 € getilgt werden müssen, braucht man nur folgenden Teil des Kredits in US-Geldmarkt anlegen (das ist quasi Reverse-Engineering)

$$K_1 \cdot \frac{1}{\tilde{F}} \cdot \frac{1}{1 + r_{us}} \cdot S = 10300\,€\frac{1}{0.79}\frac{1}{1.06}\,0.80 = 9840\,€$$

Entsprechend hätte man **heute** einen Arbitragegewinn von 10000-9840 = 160€

d)

A: 0,7009 EUR/USD B: 1.4267 USD/EUR

C: 0,6177 GBP/USD D: 1,2654 USD/SFR

E: 0,7903 SFR/USD

Aufgabe 8: "Anspar-/Entnahmepläne mit Immobilien" (30 Minuten)

Sie sind Assistent des Finanzvorstands eines Lebensversicherungsunternehmens und sind in der Produktentwicklung von fondsgebundenen Verträgen für die Altersversorgung involviert. Es geht um Anspar- bzw. Auszahlungspläne gegen Einmalbeitrag, wobei der vom Kunden geleistete Einmalbeitrag in Anteile an Offenen Immobilienfonds (OIF) investiert werden soll. Nach gründlicher Recherche erwarten Sie für die auf kontinuierlicher Basis berechneten jährlichen (Log-)Renditen R_t des OIF-Investments eine mittlere Rendite von 4% p.a, bei einer Volatilität von 2% p.a. und einer Autokorrelation 1. Ordnung von a = 0,7. Der aktuelle Preis für einen Fondsanteil beträgt EUR 100 zzgl. einem Ausgabeaufschlag von 5% auf den Anteilswert (es können beliebige Bruchteile eines Anteils zum jeweiligen Marktwert erworben/zurückgegeben werden). Unterstellen Sie im Folgenden normalverteilte iid-Renditen mit adjustierter Volatilität nach dem Blundell/Ward-Verfahren. Vernachlässigen Sie Sterblichkeitsaspekte.

a) Ansparplan: Berechnen Sie bei Investition der EUR 100.000 in Anteile des Offenen Immobilienfonds für das erzielbare Endvermögen nach vier und neun Jahren: den Erwartungswert, die Standardabweichung, den Median sowie das Mindestvermögen, welches mit einer Wahrscheinlichkeit von α = 95% nicht unterschritten wird. Berechnen Sie ferner die Wahrscheinlichkeit, dass sich das anfänglich investierte Kapital nach vier bzw. nach Ablauf von neun Jahren mindestens mit einer (kontinuierlichen) Rendite von 1,75% p.a. verzinst hat. **(15 Minuten)**

b) Auszahlungsplan: Der Auszahlplan ist wie folgt konstruiert:

- Der Kunde zahlt einen Einmalbeitrag von 100.000 Euro, der vollständig in Anteile des Offenen Immobilienfonds investiert wird.
- Zu Beginn jeden Jahres werden so viele OIF-Fondsanteile zurückgegeben, so dass eine Auszahlung (B_t) an den Kunden in Höhe von 4% des zu Jahresbeginn jeweils noch vorhandenen Fondsvermögens (V_t) zustande kommt ($B_t = 0{,}04V_t$). Die erste Auszahlung erfolgt nach einem Jahr t=1 (d.h. $B_0 = 0$).

  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach Ablauf von t=10 bzw. t=20 Jahren die Auszahlung geringer ist als 4.000 Euro. **(15 Minuten)**

Hinweise: Sei $X \sim LN(m, v^2)$ eine logarithmisch normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern m und v^2, und N_α das α-Quantil der Standardnormalverteilung (siehe Tabelle im Anhang), dann gilt $aX^b \sim LN(\ln a + bm, b^2v^2)$ sowie für Erwartungswert, Varianz, und α-Quantil

$$E(X) = e^{m+0,5v^2}$$
$$Var(X) = E(X)^2\left(e^{v^2} - 1\right)$$
$$LN_\alpha(m, v^2) = e^{m+N_\alpha \cdot v} = e^{m-N_{1-\alpha}\cdot v}$$

Das Blundell/Ward-Verfahren korrigiert die Varianz gemäß: $VAR(r_t^*) = VAR(r_t)\dfrac{1-a^2}{(1-a)^2}$

Lösungsskizze:

a) Korrektur von STD der Einperioden Log-Rendite gemäß dem Blundell/Ward-Verfahren:

$$\sigma(r_t^*) = STD(r_t)\sqrt{\frac{1-a^2}{(1-a)^2}} = 2\% \cdot \sqrt{\frac{1-0{,}7^2}{(1-0{,}7)^2}} = 4.76\%$$

Bei (bereinigten) iid. Einperioden-Renditen $r_t^* \sim \mathrm{N}(\mu;\sigma) =$ N(4%; 4,76%) resultiert für kumulierte Logrendite bis T $\sum_{t=1}^{T} r_t^* = r_{0,T} \sim \mathrm{N}\left(T\mu;\sigma\sqrt{T}\right)$. Für das Endvermögen nach T Jahren und Ausgabeaufschlag von 5% des Kaufpreises gilt bei einem Investitionsbudget von 100.000 $S_T = 1/(1{,}05)\cdot 100000 \cdot e^{r_{0,t}^*} \sim \mathrm{LN}\left(m; v^2\right) = \mathrm{LN}\left(\ln(0{,}952\cdot S_0) + T\mu; T\sigma^2\right)$.

Mit den Hinweisen ergibt sich für die interessierenden Kennzahlen:

$$E(S_T) = 100000/(1{,}05)\cdot e^{T(\mu+0{,}5\cdot\sigma^2)}$$
$$STD(S_T) = E(S_T)\cdot\sqrt{e^{T\cdot\sigma^2}-1}$$
$$LN_{\alpha=90\%}(S_T) = 100000/(1{,}05)\cdot e^{T\mu-\sqrt{T}\cdot 1{,}645\cdot\sigma)}$$
$$LN_{\alpha=50\%}(S_T) = 100000/(1{,}05)\cdot e^{T\mu}$$

Jahre (T)	4	9
E(T)	112270,75	137907,07
STD(T)	10714,59	19797,95
LN(T)_95%	95560,41	107926,23
LN(T)_50%	111762,94	136507,56

ShortfallWS: Für kumulierte Logrendite bis T nach Ausgabeaufschlag gilt:

$$r_{0,T}^{TK} = r_{0,T} + \ln\left(\frac{1}{1{,}05}\right) \sim N[T\mu + \ln\left(\frac{1}{1{,}05}\right), \sqrt{T}\sigma]$$

Bei einer kontinuierlichen Zielrendite von z = 1,75% p.a. resultiert für die kumulierte Zielrendite $z_{0,T} = Tz$

$$\rightarrow \mathrm{SW} = \mathrm{P}(r_{0,T}^{TK} < Tz) = \Phi\left(\frac{Tz - [T\mu - \ln(1{,}05)]}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

ShortfallWS:
Für $T = 4$ resultiert SW = Φ(-0,4328) = 33,26% bzw. 1-SW = 66,74%
Für $T = 9$ resultiert SW = Φ(-1,0762) = 14,09% bzw. 1-SW = 85,91%

b) Startvermögen: V_0 = 100.000/(1,05) = 95.238,10

Zeitliche Entwicklung des Fondsvermögens (t = 1, 2, …) vor Entnahme:

$$V_t = (1-0{,}04)^{t-1} V_0 \exp\left(\sum_{i=1}^{t} R_i\right)$$

Entwicklung der Entnahmen (t = 1, 2, …):

$$B_t = 0{,}04 V_t = 0{,}04(0{,}96)^{t-1} V_0 \exp\left(\sum_{i=1}^{t} R_i\right)$$

wobei $R_i \sim N$(m , v) = N(4% , 4,76%);

$$\ln\left(B_t\right) \sim N\left(n_t, v_t^2\right)$$

$$n_t = \ln\left(0{,}04(0{,}96)^{t-1} V_0\right) + t0{,}04$$

$$v_t = 0{,}0476\sqrt{t}$$

$$P(B_t < 4000) = P\left(\frac{\ln(B_t) - n_t}{v_t} < \frac{\ln(4000) - n_t}{v_t}\right) = \Phi\left(\frac{\ln(4000) - n_t}{v_t}\right)$$

T	n(t)	v(t)	Φ (t)	SW	1-SW
10	8,278	0,1506	0,1075	54,28%	45,72%
20	8,270	0,2129	0,1146	54,56%	45,44%

Anhang

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung Φ(x)

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000