DAV
DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Prüfung DAV-Spezialwissen in Finanzmathematik 2010

Version 4. September 2011

Block I (Albrecht)

Aufgabe 1: (30 Minuten)

a) Die Rendite $R_h = \Delta V_h / v_t$ einer Finanzposition über ein Zeitintervall der Länge h sei normalverteilt, $R_h \sim N(\mu h, \sigma^2 h)$. Leiten Sie den Value at Risk dieser Finanzposition zum Konfidenzniveau α her!

b) Gegeben sei ein Portfolio aus n Finanztiteln, dessen Wert V(t) zum Zeitpunkt t gegeben ist durch

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i S_i(t) .$$

Als Risikofaktoren werden die Größen $Z_i(t) = \ln S_i(t)$ definiert.

i) Stellen Sie die Wertänderung $\Delta V_h = V(t+h) - v(t)$ der Portfolioposition als Funktion der entsprechenden Wertänderungen $\Delta Z_i(h) = Z_i(t+h) - z_i(t)$ der Risikofaktoren dar!

ii) Leiten Sie die Delta-Approximation dieser Position her!

iii) Bestimmen Sie auf dieser Grundlage den (approximativen) Value at Risk der Portfolioposition zum Konfidenzniveau α, wenn $(\Delta Z_1(h), ..., \Delta Z_n(h))$ multivariat normalverteilt ist mit $E[\Delta Z_i(h)] = h\mu_i \quad (i = 1,...,n)$ und $Cov[\Delta Z_i(h), \Delta Z_j(h)] = h\sigma_{ij}$ $(i, j = 1,...,n)$!

Hinweis 1: Setzen Sie den Value at Risk einer normalverteilten Größe als bekannt voraus!

Hinweis 2: $\exp(x) \approx 1 + x$.

Lösungsskizze:

a) Es gilt zunächst $\Delta V_h = v_t R_h \sim N(v_t\,\mu h, v_t^2\,\sigma^2\,h)$ und damit

$$L_h = -\Delta V_h \sim N(-v_t\mu h, v_t^2\,\sigma^2 h).$$

Da L_h normalverteilt ist, gilt für den Value at Risk

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_\alpha(L_h) &= E(L_h) + N_{1-\alpha}\,\sigma(L_h)\\ &= -v_t\mu h + N_{1-\alpha}\,v_t\sigma\sqrt{h}\\ &= v_t(N_{1-\alpha}\,\sigma\sqrt{h} - \mu h).\end{aligned}$$

b) i) Es gilt

$$\begin{aligned}\Delta V_h &= \sum_{i=1}^n x_i[S_i(t+h) - s_i(t)]\\ &= \sum_{i=1}^n x_i s_i(t)\left[\frac{S_i(t+h)}{s_i(t)} - 1\right].\end{aligned}$$

Da andererseits

$$\begin{aligned}\Delta Z_i(h) &= Z_i(t+h) - z_i(t) = \ln S_i(t+h) - \ln s_i(t)\\ &= \ln[S_i(t+h)/s_i(t)],\end{aligned}$$

folgt insgesamt

$$\Delta V_h = \sum_{i=1}^n x_i\,s_i(t)(\exp[\Delta Z_i(h)] - 1).$$

ii) Die Delta-Approximation lautet nach Hinweis somit

$$\Delta V_h \approx \sum_{i=1}^n x_i\,s_i(t)\Delta Z_i(h).$$

iii) Es gilt

$$E(\Delta V_h) = \sum_{i=1}^n x_i\,s_i(t)\,E[\Delta Z_i(h)] = \sum_{i=1}^n x_i\,s_i(t)\,h\mu_i = h\sum_{i=1}^n x_i\,s_i(t)\,\mu_i.$$

$$\mathrm{Var}(\Delta V_h) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i x_j\,s_i(t)s_j(t)h\sigma_{ij} = h\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i x_j\,s_i(t)s_j(t)\sigma_{ij}.$$

Da $\Sigma x_i\,s_i(t)\Delta Z_i(h)$ normalverteilt ist, gilt mit $L := -\Delta V_h$ insgesamt

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_\alpha[\Delta V_h] &\approx -E(\Delta V_h) + N_{1-\alpha}\sqrt{\mathrm{Var}(\Delta V_h)}\\ &= -h\sum_{i=1}^n x_i\,s_i(t)\,\mu_i + N_{1-\alpha}\sqrt{h}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i x_j s_i(t)s_j(t)\sigma_{ij}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2: (15 Minuten)

Die Entwicklung $\{A_t\}$ der Marktwerte der Aktiva eines Unternehmens folge einer geometrischen Brownschen Bewegung, insbesondere gilt dann zum Zeitpunkt t = T

$$A_T = A_0 \exp\{mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T\},$$

wobei $Z_T \sim N(0,1)$.

a) Gehen Sie aus vom Merton-Modell, wobei die Ausfallschranke H vorgegeben sei. Bestimmen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit PD in Termen der Verteilungsfunktion $N(\cdot)$ der Standardnormalverteilung!

b) Unterstellen Sie nun für Z_T ein Einfaktormodell der Form

$$Z_T = \sqrt{\rho}\, F + \sqrt{1-\rho}\, U,$$

d.h. fassen Sie Z_T als normierten Bonitätsindikator auf.

i) Bestimmen Sie nun bei vorgegebener Ausfallwahrscheinlichkeit PD die damit implizit festgelegte (normierte) Ausfallschranke H^*.

ii) Wie lautet die damit implizit festgelegte Ausfallschranke H auf Ebene der Marktwertentwicklung der Aktiva?

Lösungsskizze:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} PD &= P(A_T < H) = P[A_0 \exp(mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T) < H] \\ &= P[mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T < \ln(H/A_0)] \\ &= P\left[Z_T < \frac{\ln(H/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}} \right] \\ &= P\left[Z_T \le \frac{\ln(H/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}} \right] \\ &= N\left[\frac{\ln(H/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}} \right] \end{aligned}$$

b) i) $PD = P(Z_T < H^*) = P(Z_T \le H^*) = N(H^*)$

Hieraus folgt:

$H^* = N^{-1}(PD)$

ii) Aus Aufgabenteil a) folgt:

$$N^{-1}(PD) = \frac{\ln(H/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}$$

Hieraus folgt

$$\ln(H/A_0) = mT + N^{-1}(PD)\,\sigma\sqrt{T}$$

und damit insgesamt

$$H = A_0 \exp\{mT + N^{-1}(PD)\sigma\sqrt{T}\}\,.$$

<u>Aufgabe 3:</u> (15 Minuten)

a) Definieren Sie die Größe Distance to Default (DD) im Rahmen des KMV-Modells!

b) Weisen Sie nach, dass im Rahmen des Merton-Modells die fundamentale Beziehung

$$PD = N(-DD)$$

gilt. Dabei bezeichne PD die Ausfallwahrscheinlichkeit im Zeitpunkt T und N die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

<u>Hinweis:</u> Die Entwicklung $\{A_t\}$ der Marktwerte der Aktiva wurde bereits in Aufgabe 2 spezifiziert.

<u>Lösungsskizze:</u>

a) Definition Distance to Default DD:

$$DD := \frac{E(\ln A_T) - \ln(DPT)}{\sigma\sqrt{T}}\,.$$

Dabei ist DPT der Default Point und es gilt

$$DPT := \text{Short Term Debt} + \tfrac{1}{2}\text{Long Term Debt}\,.$$

b) Es gilt nach Hinweis

$$A_T = A_0 \exp\{mT + \sigma\sqrt{T}\,Z_T\}$$

und damit:

$$\ln(A_T) = \ln A_0 + mT + \sigma\sqrt{T}\,Z_T\,.$$

Hieraus folgt zunächst

$$E(\ln A_T) = \ln A_0 + mT\,,$$

da $E(Z_T) = 0$.

Es folgt damit weiter

$$E(\ln A_T) - \ln(DPT) = \ln(A_0 / DPT) + mT\,.$$

Nach diesen Vorüberlegungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} PD &= P(A_T < DPT) = P(A_T \le DPT) \\ &= P[mT + \sigma\sqrt{T}\,Z_T \le \ln(DPT / A_0)] \\ &= P[mT + \sigma\sqrt{T}\,Z_T \le -\ln(A_0 / DPT)] \\ &= P\left[Z_T \le \frac{-\ln(A_0 / DPT) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= N\left[-\frac{\ln(A_0 / DPT) + mT}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= N(-DD). \end{aligned}$$

Block II (Bartels)

Aufgabe 4: (60 Minuten)

Um in einer zinsarmen Zeit noch halbwegs passable Erträge zu erwirtschaften, schließt ein 60-jähriger Mann eine zweijährige reine Erlebensfallversicherung ab mit zwei gleich hohen Jahresprämien π. Es sind folgende Daten bekannt: Die ein- bzw. zweijährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines 60-jährigen Mannes betragen

nach der DAV-Sterbetafel R2004RM : $p_{60} = 0.9972$, ${}_2p_{60} = 0.99427$.

(i) *Mit diesen Daten berechne man bei einer Ablaufleistung von € 100 000.- im Erlebensfall die notwendige Jahresnettoprämie bei einem Garantiezins von 2.25% bzw. alternativ von 3%.* (10 Minuten)

Die Anlagestrategie des Versicherungsunternehmens sieht nur Investments in Zerobonds mit dem gleichen Ablaufdatum wie die entsprechende Versicherung vor.

Die Vorgabe an den Aktuar lautet, dass nur solche Garantiezinsen bei der Kalkulation verwendet werden dürfen, die für diese Versicherungen keine Absicherung des Zinsversprechens etwa über Europäische Call-Optionen auf Zerobonds benötigen.

Hierbei wird unterstellt, dass auch nach einem Jahr die Preise für Zerobonds stets unter 1 liegen, d.h. dass auch in einem Jahr die Kapitalmärkte keine negativen Zinsen ausweisen.

Aufgrund der aktuell gültigen Zinsstrukturkurve kennt man die aktuellen Preise von ein- bzw. zweijährigen Zerobonds: $P(0,1) = 0.963$ $P(0,2) = 0.93$ sowie den Preis eines Europäischen Calls auf einen Zerobond mit Ausübungspreis 0.9846:

$$C_P(0,1,2,0.9846) = 0.004 .$$

Hierbei bezeichnen wie üblich:

- $P(t,T)$ den Preis eines Zerobonds zum Zeitpunkt t und Ablaufdatum T , so dass also zum Ablaufdatum T gilt $P(T,T) = 1$;
- $C_P(t,T,T_B,X)$ bezeichnet zum Zeitpunkt t den Preis einer Europäischen Call-Option mit Ausübungspreis X, Laufzeit T auf einen Zerobond, der zu einem Zeitpunkt $T_B \geq T$ fällig wird, so dass z.B. der Wert der Call-Option zum Zeitpunkt T gerade $C_P(T,T,T_B,X) = (P(T,T_B) - X)^+ = \max(P(T,T_B) - X, 0)$ ist.

(ii) *Wie kann generell für die genannte Versicherung eine Absicherung eines Garantiezinses mit Call-Optionen auf Zerobonds vorgenommen werden?* (15 Minuten)

(iii) *Man prüfe nach, ob bei einem Garantiezins von 2.25 % bzw. 3 % eine solche Absicherung in dem hier vorliegenden Fall wirklich benötigt wird.* (15 Minuten)

(iv) *Falls eine Absicherung notwendig ist, was wäre dann der Preis der Absicherung bei den hier vorliegenden numerischen Daten mittels Call-Optionen auf Zerobonds?* (10 Minuten)

Dem Kunden wird auch die Möglichkeit eingeräumt, beide Prämien in einer Einmalzahlung zu leisten; die zunächst nicht benötigte zweite Prämie wird dann in einem Prämiendepot für ein Jahr verzinst und steht dann für die zweite fällige Zahlung zur Verfügung.

(v) *Bei welchem einjährigen Zins für das Prämiendepot lässt sich in jedem der beiden Fälle stets eine Absicherung durch Call-Optionen vermeiden?* (10 Minuten)

Anleitung: Hierbei gehe man wie im Seminar von einem deterministischen Ansatz für die Biometrie aus, die einzige Unsicherheit besteht also hier in der zukünftigen Zinsentwicklung. Außerdem werden Abschluss- und Verwaltungskosten in dieser Betrachtung komplett außen vor gelassen.

Lösungsskizze:

Zu (i):

Der Zusammenhang zwischen der Erlebensfallsumme VS = 100 000 und der jährlichen Prämie π ergibt sich wie im Seminar aufgrund der Äquivalenzgleichung:

$$ {}_2p_x \cdot \frac{1}{(1+g)^2} \cdot \mathrm{VS} = \pi\left(1+\frac{1}{1+g}\cdot p_x\right) \quad . $$

Für g = 2.25% gilt:

$$ \pi = \frac{0.99427 \cdot 100000 \cdot (\frac{1}{1+g})^2}{1+\frac{1}{1+g}\cdot 0.9972} = 48\,145.33 $$

und für $g = 3$ % berechnet sich π zu 47 617.93 .

Zu (ii):

Investiert man die erste Prämie komplett in Zerobonds zum Preis von P(0,2), so erhält man dafür bei Ablauf der Versicherung nach zwei Jahren den Betrag $\frac{\pi}{P(0,2)}$. Die zweite Jahresprämie muss daher für die endfällige Erlebensfallsumme nur noch folgenden Betrag erwirtschaften:

$$ S := {}_2p_x \cdot \mathrm{VS} - \frac{\pi}{P(0,2)} \quad . $$

Der hierfür notwendigerweise zu erwirtschaftende Zinssatz y berechnet sich nach der folgenden Äquivalenzgleichung:

(1) $$ (1+y)\cdot p_x \cdot \pi = S \, . $$

Falls jetzt der benötigte Zinssatz $y < 0$ ist, wird keine Absicherung benötigt: Man erreicht in jedem Fall die aus der zweiten Prämie zu erwirtschaftende Summe S.
Für $y > 0$ gilt:
Ist zum Zeitpunkt T=1 der Preis von einjährigen Zerobonds höher als $1/(1+y)$, d.h. der dann gültige Marktzins zu niedrig, kann man mit der vorhandenen Prämie die Summe S durch Ze-

robonds nicht mehr erwirtschaften. Um für diesen Fall Vorsorge zu treffen, kauft man bei Vertragsabschluss Call-Optionen auf Zerobonds mit Ausübungspreis $\frac{1}{1+y}$ fällig zum Zeitpunkt 1, und zwar genau $(1+y)\cdot p_x \cdot \pi$ Stück zum Preis von $C_P(0,1,2,\frac{1}{1+y})$.

Zu (iii):

Bei den hier vorliegenden numerischen Daten ergeben sich folgende Werte:

Für g = 2.25% ist $\pi = 48\,145.33$ und daher $S = 99\,427 - \frac{48145.33}{0.93} = 47\,657.83$ und hieraus ergibt sich nach Gleichung (1) für 1+y ein Wert kleiner als 1, d.h. selbst ohne einen Zins kann man die Summe S aus der zweiten Prämie bestreiten. Für g = 2.25 % wird also in diesem konkreten Beispiel einer zweijährigen Versicherung keine Absicherung über Call-Optionen benötigt.

Für g = 3 % ist $\pi = 47\,617.93$ und daher $S = 99\,427 - \frac{47617.93}{0.93} = 48\,224.92$ und hieraus ergibt sich nach Gleichung (1) folgender Wert für 1+y: 1+y = 1.0156.. und damit ist $\frac{1}{1+y} \approx 0.9846$, das ist gerade der Ausübungspreis der angegebenen Call-Option. Hier wird in der Tat eine Absicherung für den Fall zu niedriger Marktzinsen nach einem Jahr benötigt.

Zu (iv):

Als Gesamtpreis für die Absicherung über Call-Optionen wie in (ii) beschrieben ergibt sich so: $48224.92 \cdot 0.004 \approx 192.90$ €.

Zu (v):

Falls im schlechtesten Fall im zweiten Jahr kein Zins zu erzielen ist, muss durch Aufzinsung im Prämiendepot der Wert S erreicht werden. Nur im Fall g = 3 % besteht überhaupt die eventuelle Notwendigkeit einer Absicherung nach (iii). Für g = 3 % hat man zur Bestimmung für den Zinssatz i(p) des Prämiendepots die folgende Gleichung: $47\,617.93 \cdot p_{60} \cdot (1+i(p)) =$ 48 224.92,
woraus sich der minimal notwendige Zinssatz i(p) für das Prämiendepot zu 1,56 % berechnet.

Block III (Maurer)

Aufgabe 5: „Schätzrisiken und Internationale Portfolio-Diversifikation“ (23 Minuten)

Gegeben sei eine Zwei-Länder-Welt mit einem Wertpapier 1 aus Land 1 (Heimatland des Investors) und einem Wertpapier 2 aus Land 2 (Ausland). Es werden folgende Bezeichnungen für die betrachtete Investmentperiode getroffen.

R_i := lokale Rendite von Wertpapier i (i = 1, 2),
e_2 : = Wechselkursrendite zwischen Land 2 und Land 1,

Gegeben seien die Erwartungswerte und Standardabweichungen der Renditen:

$\mu(R_1) = 0{,}2725$; $\mu(R_2) = 0{,}1075$; $\mu(e_2) = 0{,}04$
$\sigma(R_1) = 0{,}3$; $\sigma(R_2) = 0{,}1$; $\sigma(e_2) = 0{,}08$

Die Rendite-Kovarianzmatrix ist gegeben durch:

	R_1	R_2	e_2
R_1	0,09	0,0045	-0,0045
R_2		0,01	-0,0032
e_2			0,0064

- Führen Sie die folgenden Berechnungen aus der Sicht des inländischen Investors durch.
- Vernachlässigen Sie bei Ihren Berechnungen alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der (R_2e_2) Kreuzprodukte.
- Führen Sie alle Berechnungen mit 4 Nachkommastellen durch.
- Beachten Sie die Tabelle zur Standardnormalverteilung im Anhang.

a) Ein Investor fordert eine Portfoliorendite, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% über einer Mindestrendite von 2% liegt. Welche Struktur (relative Investitionsgewichte), welche Standardabweichung und welche erwartete Rendite besitzt das Portfolio aus Wertpapier 1 und 2, welches die obige Bedingung erfüllt, und die erwartete Rendite maximiert. Unterstellen Sie zur Lösung des Problems normalverteilte Renditen und gehen davon aus, dass der Investor keine Währungssicherung durchführt. **(9 Minuten)**

Hinweis: Der effiziente Rand (ohne Währungssicherung) der aus Wertpapier 1 und 2 konstruierbaren Portfolios hat die Form $\mu = 0{,}16 + \sqrt{0{,}15625(\sigma^2 - 0{,}009)}$.

b) Unterstellen Sie nunmehr, der Investor korrigiert die Schätzwerte für die erwarteten Renditen (ohne Währungssicherung) gemäß dem Bayes-Stein-Verfahren mit einem „Schrumpfungsfaktor“ ω (hin zum Minimum Varianz Portfolio). Berechnen Sie zunächst die korrigierten erwarteten Renditen. Unterscheiden Sie drei Fälle:

i) $\omega = 0{,}2$
ii) $\omega = 1$
iii) $\omega = 0$

Der Investor versucht wiederum die erwartete Portfoliorendite zu maximieren unter der Nebenbedingung, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% eine Mindestrendite von 2% erzielt wird. Welche Struktur (relative Investitionsgewichte), welche Standardabweichung und welche erwartete Rendite ergeben sich nun? Skizzieren Sie Ihre Ergebnisse in einer geeigneten Grafik. **(9 Minuten)**
Hinweis: Der effiziente Rand (ohne Währungssicherung) der aus Wertpapier 1 und 2 konstruierbaren Portfolios im Fall ω = 0,2 hat die Form $\mu = 0{,}16 + \sqrt{0{,}1(\sigma^2 - 0{,}009)}$.

c) Erläutern Sie kritisch die Resampling-Technik zur Berücksichtigung von Schätzfehlern bei der Bestimmung optimaler Portfolios. **(5 Minuten)**

Lösungsskizze:

Es ergibt sich für die ungesicherten Wertpapiere in inländischer Währung:

$\mu(R_1) = 0{,}2725$; $\mu(R_2 + e_2) = 0{,}1475$;
$\sigma(R_1) = 0{,}3$; $\sigma(R_2 + e_2) = 0{,}1$;

Weiterhin gilt: $\mathrm{Cov}(R_1, R_2 + e_2) = \mathrm{Cov}(R_1, e_2) + \mathrm{Cov}(R_1, R_2) = 0$.

a) 1) Effizienter Rand
$$\mu = 0{,}16 + \sqrt{0{,}15625(\sigma^2 - 0{,}009)}$$

2) Sei $N_{0.9}$ das 90% Quantil der Standardnormalverteilung dann resultiert für die Shortfallrestriktion $\mu = 0.02 + N_{0.9}\sigma$. Gemäß beigefügter Tabelle der N(0, 1)-Verteilung gilt $1{,}28 < N_{0,9} < 1{,}29$. Im Folgenden wird (approximativ von der sicheren Seite) $N_{0.9} = 1{,}29$ gesetzt.

$\rightarrow \mu = 0{,}02 + 1{,}29\,\sigma$

Setze 1) = 2)
$$0{,}02 + 1{,}29\sigma = 0{,}16 + \sqrt{0{,}15625(\sigma^2 - 0{,}009)}$$
Maximaler Erwartungswert unter Einhaltung der Shortfallrestriktion.
$\Rightarrow \sigma_{opt} = 0{,}1401$
$\rightarrow \mu = 0{,}2007 = 0{,}2725x + 0{,}1475(1-x)$;
$\rightarrow x_1 = 0{,}4261$; $x_2 = 0{,}5739$

b) i)

$E(R_{1,BS}) = 0{,}2725(1-\omega) + 0{,}16\omega = 0{,}25$

$E(R_{1,BS}+e_{2,BS}) = 0{,}1475(1-\omega) + 0{,}16\omega = 0{,}15$

1) Effizienter Rand $\mu = 0{,}16 + \sqrt{0{,}1(\sigma^2 - 0{,}009)}$

2) Shortfallrestriktion $\mu = 0{,}02 + 1{,}29\sigma$

1) = 2)

$$0{,}02 + 1{,}29\sigma = 0{,}16 + \sqrt{0{,}1(\sigma^2 - 0{,}009)}$$

Maximaler Erwartungswert unter Einhaltung der Shortfallrestriktion.

$\Rightarrow \sigma_{opt} = 0{,}1305$

$\rightarrow \mu = 0{,}1883 = 0{,}25x + 0{,}15(1-x)$

$\rightarrow x_1 = 0{,}3833;\ x_2 = 0{,}6167$

ii)

Der effiziente Rand schrumpft auf den Punkt des MVP zusammen. Das MVP erfüllt offensichtlich die Shortfall-Restriktion, d.h. Prob(R_{MVP} < 0,02) = M(-1,476) = 6,94% < 10%. In diesem Fall fällt das Ergebnis mit dem MVP aus Teilaufgabe b zusammen.

iii)

Keine Adjustierung der Erwartungswerte, d.h. der effiziente Rand ist identisch zu Teilaufgabe a. Ergebnisse siehe a).

c) Es existieren verschiedene Verfahren um Probleme aus Schätzrisiken im Rahmen einer Portfoliooptimierung zu berücksichtigen. Ausgangspunkt ist eine statistische Sichtweise der MV Optimierung: Die beobachteten (historischen) Renditen stellen nur eine Realisation des datengenerierenden Prozesses dar. Um die Variabilität zu berücksichtigen, werden wiederholt aus der historischen Renditeverteilung („resampling“) neue Renditen simuliert. Diese „resampled returns“ führen zu jeweils einem neuen Set an Inputparametern (Mittelwerte, Kovarianzen) für die anschließende (wiederholte) Optimierung. Die führt nicht zu einem, sondern einem Spektrum an Efficient Frontiers. Durch geeignete Durchschnittsbildung werden dann die optimalen Asset-Gewichte bestimmt. Problem dieser heuristischen Verfahren ist deren mangelnde theoretische Begründung; es wird an den Symptomen (schlechter Diversifikationsgrad) und nicht an den Ursachen (Unsicherheit bzgl. der Inputfaktoren) angesetzt (siehe Albrecht/Maurer 2008, S. 800f)

<u>Aufgabe 6:</u> "Devisenforwards" (17 Minuten)

Sie sind ein europäischer Investor. Der risikolose diskrete Zins in der Eurozone beträgt r_{EU} = 3% p.a. Der risikolose diskrete Zins im US-Dollarraum beträgt hingegen r_{US} = 6% p.a. Der Wechselkurs ist aktuell S = 0,80 €/USD.

a) Berechnen Sie den arbitragefreien Forwardkurs F (€/USD) und die Forwardprämie f für einen Devisenforward mit Laufzeit 1 Jahr. **(4 Minuten)**

b) Am Markt beobachten Sie hingegen einen Forwardkurs von F = 0,79 €/USD . Formulieren Sie eine Strategie, um diese Arbitrage auszunutzen, wenn Sie im Euroraum Kredit aufnehmen können. **(4 Minuten)**

c) Welchen Arbitragegewinn (in Euro) können Sie damit erzielen, wenn Sie heute maximal 10.000€ Kredit aufnehmen können. (Kreditaufnahme in Dollar ist Ihnen nicht möglich.) **(4 Minuten)**

d) In der nachfolgenden Tabelle sind die Crossrates verschiedener Währungen enthalten. Ermitteln Sie die fehlenden Werte A bis E unter der Annahme, dass zwischen den Devisenmärkten keine (Dreiecks-) Arbitragemöglichkeiten existieren! **(5 Minuten)**

Währung	EUR	USD	GBP	SFR
EUR	1	B	0,6758	1,5896
USD	A	1	0,5363	1,2612
GBP	1,4797	C	1	E
SFR	0,6291	0,7929	D	1

<u>Lösungsskizze:</u>

a)

$$\frac{F}{S} = \frac{1 + r_{eu}}{1 + r_{us}} \Leftrightarrow F = 0.80 \frac{1.03}{1.06} = 0.77736 \frac{€}{\$}$$

$$f = \frac{F}{S} - 1 = \frac{0.77736}{0.80} - 1 = -0.0283$$

b)

i)	Kreditaufnahme in Euro
ii)	Umtausch in USD
iii)	Anlage in US Geldmarkt
iv)	Forward für aufgezinsten Betrag eingehen
v)	Geld in einem Jahr zum Forwardkurs zurücktauschen
vi)	Kredit tilgen → Geld bleibt übrig, bzw. hätte nicht Strategie verwendet werden müssen.

c)

$$Aufgenommener\ Kredit = 10000€$$

$$Rückzahlbetrag: RB = 10300€$$

$$RB\ in\ Dollar: RB^* = RB \cdot \frac{1}{\tilde{\tilde{F}}} = \frac{10300}{0.79} = 13038\ \$$$

$$Benötigte\ Anlage: A^* = \frac{13038}{1.06} = 12300\ \$$$

$$Anlage\ in\ Euro\ heute: A = A^* \cdot S = 0.8 \cdot 12300 = 9840\ \$$$

Für Kredittilgung werden also nur 9840 benötigt. Heutiger Arbitragegewinn ist demnach 160€.

Ebenfalls volle Punkte gibt es für die Strategie, den kompletten Eurobetrag in den USA anzulegen:

$$A = 10000€$$

$$A^* = \frac{A}{S} = \frac{10000}{0.8} = 12500\ \$$$

$$Endbetrag\ in\ Euro: \ \ A_{end} = A^* \cdot 1.06 \cdot \tilde{F} = 12500 \cdot 1.06 \cdot 0.79 = 10467.5\ €$$

Da nur 10300€ zurückgezahlt werden müssen, liegt (in einem Jahr) ein Arbitragegewinn von 167.5€ vor.

d)

Währung	EUR	USD	GBP	SFR
EUR	1	B	0,6758	1,5896
USD	A	1	0,5363	1,2612
GBP	1,4797	C	1	E
SFR	0,6291	0,7929	D	1

A = 0,7936
B = 1,2601
C = 1,8646
D = 0,4252
E = 2,3517

Aufgabe 7: "Langfristinvestments in Immobilien" (20 Minuten)

Aufgrund des aktuellen niedrigen Zinsniveaus analysiert der Finanzvorstand eines Versorgungswerkes die Vorteile/Nachteile einer Investition in einen Offenen Immobilienfonds. Das verfügbare Investitionsvolumen beträgt EUR 50 Millionen. Nach gründlicher Recherche erwarten Sie für die auf kontinuierlicher Basis berechneten jährlichen (Log-)Renditen r_t des Investments eine mittlere Rendite von 4% p.a, bei einer Volatilität von 2% p.a. und einer Autokorrelation 1. Ordnung von a = 0,6. Der aktuelle Preis für einen Fondsanteil beträgt EUR 100 zzgl. einem Ausgabeaufschlag von 5% auf den Anteilswert (es können beliebige Bruchteile eines Anteils erworben werden). Bei Verkauf der Fondsanteile vor Ablauf von vier Jahren fallen weitere Transaktionskosten in Form eines Rücknahmeabschlags von 10% auf den dann erzielbaren Anteilswert an. Unterstellen Sie im Folgenden normalverteilte iid-Renditen mit adjustierter Volatilität nach dem Blundell/Ward-Verfahren.

a) Berechnen Sie bei Investition der 50 Mio. in Anteile des Offenen Immobilienfonds für das erzielbare Endvermögen nach vier und neun Jahren: den Erwartungswert, die Standardabweichung, den Median sowie das Mindestvermögen, welches mit einer Wahrscheinlichkeit von α = 90% nicht unterschritten wird. **(7 Minuten)**

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das anfänglich investierte Kapital nach vier bzw. nach Ablauf von neun Jahren mindestens mit einer (kontinuierlichen) Rendite von 2,25% p.a. verzinst hat? **(7 Minuten)**

c) Was versteht man versteht man unter einem hedonischen Immobilienindex? **(6 Minuten)**

Hinweise: Sei X ~ LN(m, v²) eine logarithmisch normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern m und v², und N_α das α-Quantil der Standardnormalverteilung (siehe Tabelle im Anhang), dann gilt $aX^b \sim LN(\ln a + bm, b^2v^2)$ sowie für Erwartungswert, Varianz, und α-Quantil

$$
\begin{aligned}
&E(X) = e^{m+0,5v^2}\\
&Var(X) = E(X)^2\left(e^{v^2}-1\right)\\
&LN_\alpha(m, v^2) = e^{m+N_\alpha \cdot v} = e^{m-N_{1-\alpha}\cdot v}
\end{aligned}
$$

Das Blundell/Ward-Verfahren korrigiert die Varianz gemäß: $VAR(r_t^*) = VAR(r_t)\dfrac{1-a^2}{(1-a)^2}$

Lösungsskizze:

a) Korrektur von STD der Einperioden Log-Rendite gemäß dem Blundell/Ward-Verfahren:

$$\sigma(r_t^*) = STD(r_t)\sqrt{\frac{1-a^2}{(1-a)^2}} = 2\% \cdot \sqrt{\frac{1-0,6^2}{(1-0,6)^2}} = 2\% \cdot 2 = 4\%$$

Bei (bereinigten) iid. Einperioden-Renditen $r_t^* \sim N(\mu;\sigma)$ = N(4%; 4%) resultiert für kumulierte Logrendite bis T $\sum_{t=1}^{T} r_t^* = r_{0,T} \sim N\left(T\mu;\sigma\sqrt{T}\right)$. Für das Endvermögen nach T Jahren und

Ausgabeaufschlag von a = 5% und Rücknahmegebühren von b=10% (für T>4) bzw. b=0% des Verkaufspreises gilt damit:

$$S_T = (1-b)/(1+a)\cdot 50Mio \cdot e^{r^*_{0,t}} \sim \mathrm{LN}\left(m;\, v^2\right) = \mathrm{LN}\left(\ln(50Mio(1-b)/(1+a)) + T\mu;\, T\sigma^2\right).$$

Mit den Hinweisen ergibt sich dann

$$E(S_T) = 50Mio*(1-b)/(1+a)\cdot e^{T(\mu+0{,}5\cdot\sigma^2)}$$
$$STD(S_T) = E(S_T)\cdot\sqrt{e^{T\cdot\sigma^2}-1}$$
$$LN_{\alpha=90\%}(S_T) = 50Mio*(1-b)/(1+a)\cdot e^{T\mu-\sqrt{T}\cdot 1{,}282\cdot\sigma)}$$
$$LN_{\alpha=50\%}(S_T) = 50Mio*(1-b)/(1+a)\cdot e^{T\mu}$$

Jahre (T)	4	9
E(T)	50,45	68,75
STD(T)	4,04	8,28
LN(T)_90%	45,39	58,52
LN(T)_50%	50,29	68,25

b) Für kumulierte Logrendite bis T nach Transaktionskosten i.H.v. a = 5% des Kaufpreises und b = 10% (bzw. 0%) des Verkaufspreises gilt:

$$r^{TK}_{0,T} = r_{0,T} + \ln\left(\frac{1-b}{1+a}\right) \sim N[T\mu + \ln\left(\frac{1-b}{1+a}\right), \sqrt{T}\sigma]$$

Bei einer kontinuierlichen Zielrendite von z = 2,25% per annum resultiert für die kumulierte Zielrendite $z_{0,T} = Tz$

$$\longrightarrow \ \mathrm{SW} = \mathrm{P}(r^{TK}_{0,T} < Tz) = \Phi\left(\frac{Tz - [T\mu + \ln(1-b) - \ln(1+a)]}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Für $T = 4$ resultiert 1-SW = 1-Φ(1,0519) = 14,64%
Für $T = 9$ resultiert 1-SW = 1-Φ(-0,9059) = 81,75%

c) **Hedonischer Immobilienindex: Es handelt sich um eine spezielle Form transaktionsbasierter Indizes.** Diese versuchen, die Heterogenitätsproblematik dadurch zu lösen, dass mittels eines ökonometrischen Modells die wertbeeinflussenden Faktoren von Immobilien erfasst und von den zeitlichen Einflussfaktoren separiert werden. Die theoretische Konzeption dieser Indizes basiert auf der Annahme, dass der Wert einer Immobilie vollständig durch einen Vektor von separat bewertbaren Eigenschaften (Größe, Lage, Alter, Ausstattung, Zahl der Räume, u.a.) beschrieben werden kann. Demnach bilden sich Preise für Immobilienobjekte als Summe der erworbenen einzelnen Eigenschaften wie beispielsweise Lage oder Größe. Statistisch liegt dem Ansatz ein multiples Regressionsmodell zugrunde mit den Transaktionspreisen als zu erklärende und den Eigenschaften als erklärende Variablen. Dies erlaubt es, die eigentlich heterogene Anlageklasse der Immobilien in homogene Attribute zu separieren und gleichzeitig deren Einfluss auf den Wert der Objekte zu bestimmen (siehe Albrecht/Maurer 2008, S. 833).

Anhang

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung Φ(x)

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000