Bericht zur Prüfung im Oktober 2009 über Finanzmathematik (Spezialwissen)

Peter Albrecht (Mannheim), Hans-Jochen Bartels (Mannheim)
und Raimond Maurer (Frankfurt)

Die Prüfung zum Spezialwissenseminar Finanzmathematik 2009 wurde am 24. Oktober 2009 durchgeführt. Hierbei waren 30 Teilnehmer zu verzeichnen.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der sechs Aufgaben gestellt wurden, die sämtlich zu bearbeiten waren. Die Aufgaben wurden, analog zum Aufbau des entsprechenden Spezialwissenseminars, drei Blöcken zugeordnet. Jeder Block wurde bei der Bewertung gleich gewichtet. Der Klausur wurde eine Tabelle (Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung) beigefügt. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 90 von 180 möglichen Punkten erreicht werden.

Block I (Albrecht)

Aufgabe 1: (30 Minuten)

a) Die Wertentwicklung $\{V_t\}$ eines Aktienportfolios folge einer Geometrischen Brownschen Bewegung. Bestimmen Sie den Value at Risk VaR dieser Wertentwicklung zum Konfidenzniveau α bei einem vorgegebenen Halteintervall [t, t+h]!

Hinweis 1: Es gilt (für festes t)
$$V_{t+h} = v_t \exp(mh + \sigma\sqrt{h}\, Z),$$
wobei $Z \sim N(0,1)$.

Hinweis 2: Benutzen Sie das α-Quantil N_α der Standard-Normalverteilung!

b) Gegeben sei das Faktormodell
$$R = a + b\, F_1 + c\, F_2 + \varepsilon$$
für die Rendite $R = (V_1 - v_0)/v_0$ einer Aktie.
Dabei gelte $Cov(F_i, \varepsilon) = 0$ für $i = 1, 2$ sowie $E(\varepsilon) = 0$.
Der Vektor (F_1, F_2, ε) sei ferner trivariat normalverteilt.
Bestimmen Sie den Value at Risk der Aktienposition zum Konfidenzniveau α !

Hinweis: Für $L \sim N(\mu, \sigma^2)$ gilt
$$VaR = E(L) + N_{1-\alpha}\, \sigma(L).$$

Lösungsskizze:

a) Für die Wertänderung ΔV über das Intervall [t, t+h] gilt:

$$\Delta V = V_{t+h} - v_t = v_t[\exp(mh + \sigma\sqrt{h}\,Z) - 1],$$

für die Verlustvariable $L = -\Delta V$ somit:

$$L = v_t[1 - \exp(mh + \sigma\sqrt{h}\,Z)].$$

Aus der Value at Risk-Definition ergibt sich die Forderung $P(L > VaR) = \alpha$.

Durch Umformen erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
P(L > VaR) &= P[1 - \exp(mh + \sigma\sqrt{h}\,Z) > VaR / v_t] \\
&= P[\exp(mh + \sigma\sqrt{h}\,Z) < 1 - VaR / v_t] \\
&= P[mh + \sigma\sqrt{h}\,Z < \ln(1 - VaR / v_t)] \\
&= P\left[Z < \frac{\ln(1 - VaR / v_t) - mh}{\sigma\sqrt{h}}\right] = \alpha\,.
\end{aligned}$$

Da auch für das α-Quantil N_α der Standardnormalverteilung gilt

$$P(Z \le N_\alpha) = P(Z < N_\alpha) = \alpha\,,$$

folgt hieraus durch Vergleich

$$\frac{\ln(1 - VaR / v_t) - mh}{\sigma\sqrt{h}} = N_\alpha\,.$$

Hieraus folgt weiter

$$\begin{aligned}
\ln(1 - VaR / v_t) &= mh + N_\alpha \sigma\sqrt{h}, \\
1 - VaR / v_t &= \exp(mh + N_\alpha \sigma\sqrt{h})
\end{aligned}$$

und somit insgesamt

$$VaR = v_t[1 - \exp(mh + N_\alpha \sigma\sqrt{h})]\,.$$

<u>Anmerkung:</u> Aufgrund von $N_{1-\alpha} = -N_\alpha$ ist auch

$$VaR = v_t[1 - \exp(mh - N_{1-\alpha} \sigma\sqrt{h})$$

korrekt.

b) Die zugehörige Verlustvariable L ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
L &= v_0 - V_1 = -v_0 R \\
&= -v_0(a + bF_1 + cF_2 + \varepsilon)\,.
\end{aligned}$$

Da (F_1, F_2, ε) trivariat normalverteilt, ist damit auch L normalverteilt und es gilt:

$$E(L) = -v_0[a + bE(F_1) + cE(F_2)]\,.$$

$$Var(L) = v_0^2[b^2 Var(F_1) + c^2 Var(F_2) + Var(\varepsilon) + 2bc\,Cov(F_1, F_2)]$$

Nach Hinweis gilt dann:

$$\text{Var} = E(L) + N_{1-\alpha}\sigma(L) \ .$$

Aufgabe 2: (30 Minuten)

a) Stellen Sie den Zusammenhang zwischen der Ausfallwahrscheinlichkeit über das Zeitintervall [0,T] unter dem "physischen" Wahrscheinlichkeitsmaß P sowie unter dem "risikoneutralen" Wahrscheinlichkeitsmaß Q dar.
Unterstellen Sie hierbei das Merton-Modell (Geometrische Brownsche Bewegung).

Hinweis: Zur Wertentwicklung der Geometrischen Brownschen Bewegung vergleiche den Hinweis 1 von Aufgabe 1a)! Es gilt ferner $m = \mu - \sigma^2/2$.

b) Stellen Sie einen Zusammenhang her zwischen dem Preis B(0,T) eines ausfallfreien Zerobonds und dem Preis $B^d(0,T)$ eines ausfallbedrohten Zerobonds, jeweils mit Laufzeit T.
Unterstellen Sie einen Komplettausfall des Zerobonds sowie die stochastische Unabhängigkeit von Zinsprozess {R(t)} und Ausfallzeit τ unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q.

Hinweis: Allgemein gilt für den Preis P_0 in t = 0 einer Zahlung V_T in T:

$$P_0 = E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T R(s)\,ds\right)V_T\right].$$

Lösungsskizze:

a) Vorbemerkung: Bei Übergang von P und Q geht bei der Geometrischen Brownschen Bewegung der Parameter μ in den Parameter r (risikolose Zinsrate) über.

Bezeichne H die Ausfallschranke. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} PD &= P(V_T < H) = P[v_0 \exp(mT + \sigma\sqrt{T}\,Z) < H] \\ &= P[mT + \sigma\sqrt{T}\,Z < \ln(H/v_0)] \\ &= P\left[Z < \frac{\ln(H/v_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= N\left[Z < \frac{\ln(H/v_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right], \end{aligned}$$

wobei gelte $m = \mu - \sigma^2/2$ und N(x) die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichne.

Analog gilt:

$$\text{RNPD} = Q(V_T < H) = N\left[\frac{\ln(H/v_0) - m^*T}{\sigma\sqrt{T}}\right], \text{ wobei } m^* = r - \sigma^2/2.$$

Es gilt nun

$$m^* - m = r - \sigma^2/2 - \mu + \sigma^2/2 = -(\mu - r).$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\text{RNPD} &= N\left[\frac{\ln(H/v_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{(\mu - r)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= N\left[N^{-1}(\text{PD}) + \frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{T}\right].\end{aligned}$$

b) Aufgrund von B(T,T) = 1 gilt zunächst für den Preis eines ausfallfreien Zerobond:

$$\begin{aligned}B(0,T) &= E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T R(s)\,ds\right)B(T,T)\right] \\ &= E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T R(s)\,ds\right)\right].\end{aligned}$$

Für die Rückzahlung des ausfallbedrohten Zerobond gilt:

$$V_T = \begin{cases} 1 & \tau > T \\ 0 & \tau \le T. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}B^d(0,T) &= E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T R(s)\,ds\right)V_T\right] \\ &= E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T R(s)\,ds\right)\right] E_Q(V_T) \\ &= B(0,T) \cdot Q(\tau > T).\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung gilt aufgrund der angenommenen Unabhängigkeit von $\{R(t)\}$ und τ.

<u>Block II</u> (Bartels)

<u>Aufgabe 3:</u>

Für eine zweijährige reine Erlebensfallversicherung für einen 60-jährigen Mann und mit zwei gleich hohen Jahresprämien π sind folgende Daten bekannt:

Die ein- bzw. zweijährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines 60-jährigen Mannes beträgt nach der DAV-Sterbetafel 2008-T : $p_{60} = 0.9896$, ${}_2p_{60} = 0.9782$; mit diesen Daten berechnet sich bei einer Ablaufleistung von € 100 000.- im Erlebensfall und einem Kalkulationszins von 3% die Jahresnettoprämie zu € 47024.76 .

Aufgrund der aktuell gültigen Zinsstrukturkurve kennt man die Preise von ein- bzw. zweijährigen Zerobonds: P(0,1) = 0.963 P(0,2) = 0.93 sowie den Preis Europäischer Put-Optionen auf einen Zerobond: $P_P(0,1,2,0.9848) = 0.02236$.

Hierbei bezeichnen wie üblich:

- P(t,T) den Preis eines Zerobonds zum Zeitpunkt t und Ablaufdatum T , so dass also zum Ablaufdatum T gilt P(T,T) = 1;
- $P_P(t,T,T_B,X)$ bzw. $C_P(t,T,T_B,X)$ bezeichnen zum Zeitpunkt t die Preise Europäischer Put- bzw. Call-Optionen mit gleichem Ausübungspreis X, Laufzeit T auf einen Zerobond, der zu einem Zeitpunkt $T_B \geq T$ fällig wird, so dass z.B. der Wert der Put-Option zum Zeitpunkt T gerade $P_P(T,T,T_B,X) = (X - P(T,T_B))^+ = \max(X - P(T,T_B),0)$ ist.

Die Anlagestrategie des Versicherungsunternehmens sieht nur Investments in Zerobonds mit dem gleichen Ablaufdatum wie die entsprechende Versicherung vor. Um das Zinsversprechen von jährlich 3% für die Erlebensfallleistung abzusichern, werden Europäische Call-Optionen auf Zerobonds eingesetzt.

(i) *Man berechne mittels der Put-Call-Relation den mit den genannten Daten konsistenten Preis* $C_P(0,1,2,0,0.9848)$ *der entsprechenden Europäischen Call-Option auf Zerobonds.* **(15 Minuten)**

(ii) *Wie kann eine Absicherung des Garantieversprechens mit den hier benötigten Call-Optionen vorgenommen werden* ? **(20 Minuten)**

(iii) *Was ist der Preis dieser Absicherung bei den hier vorliegenden numerischen Daten?* **(25 Minuten)**

<u>Anleitung:</u> Hierbei gehe man wie im Seminar von einem deterministischen Ansatz für die Biometrie aus, die einzige Unsicherheit besteht also hier in der zukünftigen Zinsentwicklung.
Außerdem werden Abschluss- und Verwaltungskosten in dieser Betrachtung komplett außen vor gelassen.

<u>Lösungsskizze:</u>

Zu (i):

Mit der Put-Call-Relation $P_P(t,T,T_B,X)+P(t,T_B)=C_P(t,T,T_B,X)+X\cdot P(t,T)$ ergibt sich als konsistenter Preis der entsprechenden Europäischen Call-Option:
$C_P(0,1,2,0.9848) \;=\; P_P(0,1,2,0.9848) \;+0.93-0.9848\;\cdot P(0,1)\approx\;0.004$.

Zu (ii):

Der Zusammenhang zwischen der Erlebensfallsumme VS = 100 000 und der jährlichen Prämie von 47 024.76 ergibt sich wie im Seminar aufgrund der Äquivalenzgleichung:

$$ {}_2p_x\cdot\frac{1}{(1+g)^2}\cdot VS=\pi\left(1+\frac{1}{1+g}\cdot p_x\right) \;. $$

Investiert man die erste Prämie komplett in Zerobonds zum Preis von P(0,2), so erhält man dafür bei Ablauf der Versicherung nach zwei Jahren den Betrag $\frac{\pi}{P(0,2)}$. Die zweite Jahresprämie muss daher für die endfällige Erlebensfallsumme nur noch folgenden Betrag erwirtschaften:

$$ S:=\;{}_2p_x\cdot VS-\frac{\pi}{P(0,2)} \;. $$

Der hierfür notwendigerweise zu erwirtschaftende Zinssatz y berechnet sich nach der folgenden Äquivalenzgleichung:

(1) $\quad (1+y)\cdot p_x\cdot\pi=S$.

Ist jetzt zum Zeitpunkt T=1 der Preis von einjährigen Zerobonds höher als 1/(1+y), d.h. der dann gültige Marktzins zu niedrig, kann man mit der vorhandenen Prämie die Summe S durch Zerobonds nicht mehr erwirtschaften. Um für diesen Fall Vorsorge zu treffen, kauft man bei Vertragsabschluss Call-Optionen auf Zerobonds mit Ausübungspreis $\frac{1}{1+y}$ fällig zum Zeitpunkt 1, und zwar genau $(1+y)\cdot p_x\cdot\pi$ Stück zum Preis von $C_P(0,1,2,\frac{1}{1+y})$.

Zu (iii):

Bei den hier vorliegenden numerischen Daten ergeben sich folgende Werte:

π = 47 024.76 ; S = 97 820 - $\frac{47024.76}{0.93}$ = 47 255.74 und hieraus ergibt sich nach Gleichung (1) folgender Wert für 1+y: 1+y = 1.015472798, d.h. $\frac{1}{1+y} \approx 0.9848$, das ist gerade der Ausübungspreis der angegebenen Put-Option sowie der unter (i) berechneten Call-Option.

Als Gesamtpreis für die Absicherung über Call-Optionen ergibt sich so:

$47255.74 \cdot 0.004 \approx 189.02$ €.

Block III (Maurer)

Aufgabe 4: Asset Allokation (10 Minuten)

Erörtern Sie kritisch die sogenannte Resampling-Technik zur Berücksichtigung von Schätzrisiken in der Asset Allokation.

Lösungsskizze:

Es handelt sich um ein heuristisches Verfahren zur Berücksichtigung von Schätzrisiken hinsichtlich der Inputparameter (Erwartungswerte, Kovarianzmatrix) einer Portfoliooptimierung. Zielsetzung ist die Erreichung eines höheren Diversifikationsgrades. Ausgangspunkt sind historische Renditezeitreihen für verschiedene Assetklassen. Aus diesen Renditezeitreihen werden zur Schätzung der gesuchten Parameter neue Renditezeitreihen erzeugt, etwa durch ein (Block-)Bootstrappingverfahren oder durch eine stochastisches Simulation. Die neuen Zeitreihen unterliegen damit der gleichen Zufallsgesetzmäßigkeit wie die Originalzeitreihen. Für jede Realisation werden die Mittelwerte sowie die Kovarianzmatrix geschätzt und darauf aufbauend die Investitionsgewichte der effizienten Portfolios ermittelt. Über die Menge der dadurch ermittelten effizienten Portfolios wird dann eine Mittelwertbildung durchgeführt; dies ist dann der neue (repräsentative) effiziente Rand.

Vorteil des Verfahrens ist dessen relativ einfache Umsetzbarkeit. Im Vergleich zur ausschließlichen Nutzung der Originalzeitreihe zur Ermittlung der Inputparameter resultiert meist ein höherer Diversifikationsgrad des Portfolios und stabilere Portfoliogewichte. Es besteht allerdings keine theoretische/ökonomische Fundierung des Verfahrens. Alternativen sind die Verwendung von Bayes-Verfahren oder die direkte Einführung von Gewichtsrestriktionen.

Aufgabe 5: Asset Allokation / Internationale Investments (30 Minuten)

Gegeben sei eine Zwei-Länder-Welt mit Wertpapier 1 aus Land 1 (Heimatland des Investors) und Wertpapier 2 aus Land 2 (Ausland). Es werden folgende Bezeichnungen für die betrachtete Investmentperiode getroffen.

R_i := lokale Rendite des Wertpapiers i (i = 1, 2),
e_2 : = Wechselkursrendite zwischen Land 2 und Land 1,

Gegeben seien die Erwartungswerte p.a. und Standardabweichungen p.a. der diskreten Renditen:

$\mu(R_1) = 0{,}30$; $\mu(R_2) = 0{,}20$; $\mu(e_2) = 0{,}08$
$\sigma(R_1) = 0{,}25$; $\sigma(R_2) = 0{,}2$; $\sigma(e_2) = 0{,}15$

Der Zinssatz für eine risikolose Anlage in Land 1 (Inland) bzw. Land 2 (Ausland) beträgt:

$r_1 = 0{,}08$ bzw. $r_2 = 0{,}05$.

Die Kovarianzmatrix p. a. ist gegeben durch:

	R_1	R_2	e_2
R_1	0,0625	0	0
R_2		0,04	0,01
e_2			0,0225

- Führen Sie die folgenden Berechnungen aus der Sicht des inländischen Investors durch.
- Vernachlässigen Sie bei Ihren Berechnungen alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der (R_2e_2) Kreuzprodukte.
- Führen Sie alle Berechnungen mit 4 Nachkommastellen durch.
- Gehen Sie von normalverteilten Renditen aus.
- Beachten Sie die Tabelle zur Standardnormalverteilung im Anhang.
- Gehen Sie davon aus, dass Forwardprämien gemäß dem Zinsparitätentheorem fair gepreist sind.

a) Berechnen Sie die Struktur, den Renditeerwartungswert und die Renditestandardabweichung des aus Wertpapier 1 und 2 gebildeten Minimum-Varianz-Portfolios (MVP), wenn der Investor eine vollständige Wechselkurssicherung des ursprünglich investierten Investitionsbetrags durchführt. **(6 Minuten)**

b) Berechnen Sie die Struktur, den Renditeerwartungswert und die Renditestandardabweichung des entsprechenden Portfolios, welches bestehend aus dem in- und ausländischen Wertpapier mit 95%iger Wahrscheinlichkeit eine Mindestverzinsung von 2% p.a. erwirtschaftet und gleichzeitig die erwartete Rendite maximiert. Gehen Sie davon aus, dass eine vollständige Wechselkurssicherung des ursprünglichen Investitionsbetrags durchgeführt wird. **(6 Minuten)**

   Hinweis: Das Tangentialportfolio bei vollständiger Wechselkurssicherung ist zu 48,66% in Wertpapier 1 und zu 51,34% in Wertpapier 2 investiert. Der effiziente Rand hat die Form $\mu = r_1 + SR_{TP} \cdot \sigma$, wobei SR_{TP} die Sharpe-Ratio des Tangentialportfolios bezeichnet.

c) Der Investor wählt im Vorfeld eine Asset-Allokation von 50% Wertpapier 1 und 50% Wertpapier 2. Sein Präferenzfunktional hat die Form $U = \mu - 3\sigma^2$. Ermitteln Sie den optimalen Umfang der Wechselkurssicherung. Ist es sichergestellt, dass das global optimale Portfolio ermittelt wurde? **(6 Minuten)**

d) Der Investor adjustiert die Schätzwerte für die erwarteten Renditen (ohne Wechselkurssicherung) gemäß dem Jorion-Verfahren. Er verwendet einen Schrumpfungsfaktor hin zum MVP von $\omega = 0{,}6$. Berechnen Sie die adjustierten erwarteten Renditen. Interpretieren Sie den ω-Parameter.

Hinweis: Der effiziente Rand im Falle rein riskanter Anlagen (ohne Wechselkurssicherung) hat die Form $\mu = 0{,}2914 + \sqrt{0{,}003(\sigma^2 - 0{,}0356)}$ **(6 Minuten)**

e) In der nachfolgenden Tabelle sind die Crossrates verschiedener Währungen enthalten. Ermitteln Sie die fehlenden Werte A bis F unter der Annahme, dass zwischen den Devisenmärkten keine (Dreiecks-) Arbitragemöglichkeiten existieren! **(6 Minuten)**

Währung	EUR	USD	YEN	GBP	SFR
EUR	1	1,4618	C	0,8823	1,5126
USD	A	1	90,90	0,6037	1,0350
YEN*	B	11,001	1	6,6366	11,3778
GBP	1,1334	1,6564	150,56	1	D
SFR	F	0,9662	87,8905	E	1

* Für 1.000 Einheiten YEN (sonstige Werte für jeweils 1 Währungseinheit).

Lösungsskizze:

a) Nach dem Zinsparitätstheorem gilt: $f = \frac{1+r_1}{1+r_2} - 1 \Rightarrow f = \frac{1{,}08}{1{,}05} - 1 \Leftrightarrow f = 2{,}8571\%$

Portfoliorendite aus Sicht des Inländischen Investors bei „vollständiger“ Wechselkurssicherung mit Devisenforwards (h=1):

$$R_{PF}^{h=1} = xR_1 + (1-x)[R_2 + f_2 + R_2 e_2] \approx xR_1 + (1-x)[R_2 + f_2]$$

Gemäß Maßgabe sind alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der (R_2e_2)-Kreuzproduktterme zu vernachlässigen, also:

$$Var(R_{PF}^{h=1}) = x^2 Var(R_1) + (1-x)^2 Var(R_2) + 2x(1-x)Cov(R_1, R_2)$$

$$= 0{,}1025x^2 - 0{,}08x + 0{,}04$$

Minimierung der Portfoliovarianz:

$$\frac{dVar(R_{PF}^{h=1})}{dx} = 0{,}205x - 0{,}08 \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{MVP}^{h=1} = 0{,}3902$$

$$\rightarrow E(R_{PF}^{h=1,MVP}) = 0{,}2565$$

$\rightarrow \mathrm{Var}(R_{PF}^{h=1,MVP}) = 0{,}0244 \quad ; \quad \mathrm{STD}(R_{PF.}^{h=1,MVP}) = 0{,}1562$

b) Sei $N_{0.95}$ das 95% Quantil der Standardnormalverteilung dann resultiert für die Shortfallrestriktion $\mu = 0.02 + N_{0.95}\sigma$. Gemäß beigefügter Tabelle der N(0, 1)-Verteilung gilt 1,64 < $N_{0,9}$ < 1,65. Im Folgenden wird (approximativ von der sicheren Seite) $N_{0.95}$ = 1,65 gesetzt.

$$\rightarrow \mu = 0{,}02 + 1{,}65\ \sigma$$

Effizienter Rand (bestehend aus risikolosem inländischen Asset und riskanten in-/ausländischen Assets gemäß Tangentialportfolio)

$$\mu = r_1 + SR \cdot \sigma = r_1 + \frac{\mu_{TP} - r_1}{\sigma_{TP}} \cdot \sigma = 0{,}08 + \frac{\mu_{TP} - 0{,}08}{\sigma_{TP}} \cdot \sigma$$

$$\mu_{TP} = 0{,}4866 \cdot \mu(R_1) + (1 - 0{,}4866) \cdot \mu(R_2 + f_2) = 0{,}4866 \cdot 0{,}3 + 0{,}5134 \cdot 0{,}2286 = 0{,}2633$$

$$\sigma_{TP} = \sqrt{0{,}4866^2 \sigma^2(R_1) + 0{,}5134^2 \sigma^2(R_2)} = \sqrt{0{,}4866^2 \cdot 0{,}0625 + 0{,}5134^2 \cdot 0{,}04} = 0{,}1591$$

$$\Rightarrow SR = \frac{0{,}2633 - 0{,}08}{0{,}1591} = 1{,}1521$$

$$\Rightarrow \mu = 0{,}08 + 1{,}1521 \cdot \sigma$$

Schnittpunkt Effizienzlinie / Shortfallgerade: $0{,}02 + 1{,}65\sigma = 0{,}08 + 1{,}1521\sigma$

$$\Rightarrow \sigma_{opt} = 0{,}1205$$

$$\Rightarrow \mu_{opt} = 0{,}2188$$

Sei a derjenige Teil des Portfolios, welcher in das (riskante) Tangentialportfolio investiert wird, dann gilt: $\sigma_{opt} = a \cdot \sigma_{TP}$ und somit

$$\Rightarrow a = \frac{\sigma_{opt}}{\sigma_{TP}} = \frac{0{,}1205}{0{,}1591} \approx 75{,}74\%$$

Insgesamt werden 0,7574*0,4866 = 36,86% in Wertpapier 1, 0,7574*0,5134 = 38,89% in Wertpapier 2 und 1-0,7574= 24,25% in die risikolose inländische Anlage angelegt.

c) <u>Bestimmung der erwarteten Rendite in Abhängigkeit von *h*:</u>

$$\mu = xE(R_1) + (1-x)E(R_2 + (1-h)e_2 + hf_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}5(0{,}2 + 0{,}08 - 0{,}08h + 0{,}0286h)$$
$$= 0{,}15 + 0{,}14 - 0{,}0257h = 0{,}29 - 0{,}0257h$$

<u>Bestimmung der Varianz in Abhängigkeit von *h*:</u>

$$\sigma^2 = x^2 \mathrm{Var}(R_1) + (1-x)^2[\mathrm{Var}(R_2) + (1-h)^2 \mathrm{Var}(e_2) + 2(1-h)\mathrm{Cov}(R_2, e_2)]$$
$$+ 2x(1-x)[\mathrm{Cov}(R_1, R_2) + (1-h)\mathrm{Cov}(R_1, e_2)]$$

$$\sigma^2 = 0{,}015625 + 0{,}25[0{,}04 + (1-h)^2 0{,}0225 + 2(1-h)0{,}01]$$
$$= 0{,}03625 + 0{,}005625h^2 - 0{,}01625h$$

<u>Maximierung Präferenzfunktional:</u>

$$U = (0{,}29 - 0{,}0257h) - 3(0{,}03625 + 0{,}005625h^2 - 0{,}01625h)$$

$$\frac{dU}{dh} = 0{,}02305 - 0{,}03375h = 0 \Rightarrow h = 0{,}6830$$

Es wurde ein Currency Overlay angewendet. Bei diesem vereinfachten Optimierungsverfahren wird i.d.R. nur ein lokales, nicht jedoch ein globales Optimum erreicht.

d) $h = 0$, $\omega = 0{,}6$ sowie $E(R_{MVP}) = 0{,}2914$ (gemäß effizienter Rand)

$$E(R_{1,\omega}^{h=0}) = (1-\omega)E(R_1) + \omega E(R_{MVP}) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}2914 = 0{,}2948$$

$$E(R_{2,\omega}^{h=0}) = (1-\omega)[E(R_2) + E(e_2)] + \omega E(R_{MVP}) = 0{,}4 \cdot 0{,}28 + 0{,}6 \cdot 0{,}2914 = 0{,}2868$$

$\omega = 0{,}6$ ist der Schrumpfungsfaktor, der angibt wie stark das Vertrauen in die (geschätzten) Erwartungswerte ist.

e) A: 0,6841 [EUR/USD]
B: 7,5257 [EUR/1000 YEN]
C: 132,8776 [YEN/EUR]
D: 1,7144 [SFR/GBP]
E: 0,5833 [GBP/SFR]
F: 0,6611 [EUR/SFR]

Aufgabe 6: Langfristinvestments in Immobilien (20 Minuten)

Als Finanzvorstand einer Pensionskasse wird Ihnen die Anlage in einen geschlossenen Immobilienfonds vorgeschlagen. Nach gründlicher Recherche erwarten Sie für die auf kontinuierlicher Basis berechneten jährlichen (Log-)Renditen r_t des Investments eine mittlere Rendite von 6% p.a. bei einer Standardabweichung von 4% p.a. und einer Autokorrelation 1. Ordnung von $a = 0{,}8$. Der heutige Kaufpreis für die Beteiligung beträgt € 50 Mio. zzgl. Transaktionskosten in Höhe von 5% des Kaufpreises. Hinsichtlich der Transaktionskosten bei Verkauf sind zwei Fälle zu unterscheiden: Wird die Beteiligung vor dem Ablauf von 5 Jahren veräußert, sind weitere Transaktionskosten in Höhe von 5% des dann erzielbaren Verkaufspreises zu bezahlen. Wird die Beteiligung länger als 5 Jahre gehalten, dann fallen nur 2% des dann erzielbaren Verkaufserlöses als Transaktionskosten an. Unterstellen Sie im Folgenden normalverteilte iid-Renditen mit adjustierter Volatilität nach dem Blundell/Ward-Verfahren.

a) Berechnen Sie für das erzielbare Endvermögen des Investments (nach sämtlichen Transaktionskosten) nach vier und neun Jahren: den Erwartungswert, die Standardabweichung sowie das Mindestvermögen, welches mit einer Wahrscheinlichkeit von $\alpha = 90\%$ nicht unterschritten wird? **(8 Minuten)**

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich Ihr anfänglich investiertes Kapital (inkl. Transaktionskosten) nach Ablauf von vier sowie nach Ablauf von neun Jahren mindestens mit einer (kontinuierlichen) Rendite von 3,5% p.a. verzinst hat? **(7 Minuten)**

c) Was versteht man unter einem Liegenschaftzins? **(5 Minuten)**

Hinweise: Sei X ~ LN(m, v^2) eine logarithmisch normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern m und v^2, und N_α das α-Quantil der Standardnormalverteilung (siehe Tabelle im Anhang), dann gilt $aX^b \sim LN(\ln a + bm, b^2v^2)$ sowie für Erwartungswert, Varianz, und α-Quantil

$$E(X)=e^{m+0,5v^2}$$
$$Var(X)=E(X)^2\left(e^{v^2}-1\right)$$
$$LN_\alpha(m,v^2)=e^{m+N_\alpha\cdot v}=e^{m-N_{1-\alpha}\cdot v}\ .$$

Das Blundell/Ward-Verfahren korrigiert die Varianz gemäß: $VAR(r_t^*)=VAR(r_t)\dfrac{1-a^2}{(1-a)^2}$.

<u>Lösungsskizze:</u>

a) Korrektur von STD der Einperioden Log-Rendite gemäß dem Blundell/Ward-Verfahren:

$$\sigma(r_t^*)=STD(r_t)\sqrt{\frac{1-a^2}{(1-a)^2}}=4\%\cdot\sqrt{\frac{1-0,8^2}{(1-0,8)^2}}=4\%\cdot 3=12\%.$$

Bei (bereinigten) iid. Einperioden-Renditen $r_t^* \sim N(\mu;\sigma) = N(6\%; 12\%)$ resultiert für kumulierte Logrendite bis T $\sum_{t=1}^{T} r_t^* = r_{0,T} \sim N\left(T\mu;\sigma\sqrt{T}\right)$. Für das Endvermögen nach T Jahren und Rücknahmegebühren von 5% bzw. 2% des Verkaufpreises gilt damit

$$S_4=0,95\cdot S_0\cdot e^{r^*_{0,4}} \sim LN\left(m;v^2\right)=LN\left(\ln(0,95\cdot S_0)+4\mu;4\sigma^2\right)$$
$$S_9=0,98\cdot S_0\cdot e^{r^*_{0,9}} \sim LN\left(m;v^2\right)=LN\left(\ln(0,98\cdot S_0)+9\mu;9\sigma^2\right)$$

Für das Endvermögen gilt dann

$$E(S_4)=0,95\cdot S_0\cdot e^{4(\mu+0,5\cdot\sigma^2)}=47.500.000\cdot e^{4(0,06+0,5\cdot 0,12^2)}$$
$$E(S_9)=49.000.000\cdot e^{4(0,06+0,5\cdot 0,12^2)}$$
$$STD(S_4)=E(S_T)\cdot\sqrt{e^{4\cdot\sigma^2}-1}$$
$$STD(S_9)=E(S_T)\cdot\sqrt{e^{9\cdot\sigma^2}-1}$$
$$LN_{\alpha=95\%}(S_4)=0,95\cdot S_0\cdot e^{T\mu-\sqrt{T}\cdot 1,29\cdot\sigma)}=47.500.000\cdot e^{4\cdot 0,06-\sqrt{4}\cdot 1,29\cdot 0,12)}$$
$$LN_{\alpha=95\%}(S_9)=49.000.000\cdot e^{9\cdot 0,06-\sqrt{9}\cdot 1,29\cdot 0,12)}$$

$E(S_4)$ = 62,15 Mio; $E(S_9)$ = 89,71 Mio.
$STD(S_4)$ = 15,13 Mio; $STD(S_9)$ = 33,37 Mio.
$LN_{95\%}(S_4)$ = 44,31 Mio; $LN_{95\%}(S_9)$ = 52,85 Mio

b) Für kumulierte Logrendite bis T nach Transaktionskosten i.H.v. a = 5% des Kaufpreises und b=5% bzw. 2% des Verkaufspreises gilt:

$$r_{0,T}^{TK}=r_{0,T}+\ln\left(\frac{1-b}{1+a}\right)\sim N[T\mu+\ln\left(\frac{1-b}{1+a}\right),\sqrt{T}\sigma]$$

Bei einer kontinuierlichen Zielrendite von z = 3,5% p.a. resultiert für die kumulierte Zielrendite $z_{0,T}$ = Tz

$$\rightarrow \text{SW} = P(r_{0,T}^{TK} < Tz) = \Phi\left(\frac{Tz - [T\mu + \ln(1-b) - \ln(1+a)]}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Für T = 4 resultiert 1-SW = 1-Φ(0,0003) = 49,99%
Für T = 9 resultiert 1-SW = 1-Φ(-0,4334) = 66,76%

c) Der Liegenschaftszins wird als Verhältnis des anfänglich erzielbaren Jahresreinertrags zum realisierten Kaufpreis, d.h. als anfänglich akzeptierte Mietrendite ausgedrückt:

$$LZ = \frac{\textit{Mieteinnahmen p.a.}}{\textit{Kaufpreis}}.$$

Durch die Multiplikation des relevanten Vervielfältigers mit den nachhaltig erzielbaren Mieteinnahmen kann damit ein Ausgangspunkt für den aktuellen Marktwert des zu bewertenden Objekts gefunden werden. Konzeptionell stellen Liegenschaftszinssätze Momentaufnahmen des aktuellen (normierten) Preisgefüges in bestimmten Teilsegmenten des Immobilienmarktes dar, berechnet auf der Basis innerhalb eines bestimmten Zeitraums abgeschlossener Transaktionen. Insofern sind Liegenschaftszinssätze keine zeitlich konstanten, sondern aufgrund von Marktschwankungen sich ändernde Größen.

Anhang

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $\Phi(x)$

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000