Bericht zur Prüfung im November 2008 über Finanzmathematik (Spezialwissen)

Peter Albrecht (Mannheim), Hans-Jochen Bartels (Mannheim)
und Raimond Maurer (Frankfurt)

Die Prüfung zum Spezialwissenseminar Finanzmathematik 2008 wurde am 08. November 2008 durchgeführt. Hierbei waren 45 Teilnehmer zu verzeichnen.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der sechs Aufgaben gestellt wurden, die sämtlich zu bearbeiten waren. Die Aufgaben wurden, analog zum Aufbau des entsprechenden Spezialwissenseminars, drei Blöcken zugeordnet. Jeder Block wurde bei der Bewertung gleich gewichtet. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 81 von 180 möglichen Punkten erreicht werden

Block I (Albrecht)

Aufgabe 1: (30 Minuten)

Gegeben sei ein Europäischer Call mit Laufzeit T, dessen heutiger Wert (Preis) C_t beträgt.

a) Wie lautet die approximative Änderung des Callwerts über das Zeitintervall [t, t+h] unter Anwendung der Delta-Approximation?

b) Bestimmen Sie für die Call-Position den Value at Risk zum Konfidenzniveau α über das Zeitintervall [t, t+h] auf der Basis einer Delta-Exakt-Approximation und unter der Annahme von Black/Scholes-Preisen. Unterstellen Sie dabei für die Log-Rendite $U_h = \ln(S_{t+h}/S_t)$ des Basisobjekts $U_h \sim N(mh, v^2h)$.

c) Approximieren Sie den Value at Risk aus Aufgabenteil b), indem Sie die Exponentialfunktion linear approximieren!

Hinweise: Das Call-Delta eines europäischen Call lautet im Falle von Black/Scholes-Preisen:

$$\Delta_C(t) = N(d_1) = N[d_1(t)]$$

Lösungsskizze:

a) Die Delta-Approximation lautet

$$C_{t+h} - C_t \approx \Delta_C(t)(S_{t+h} - S_t),$$

wobei $\Delta_C(t) = \partial C_t / \partial S_t$.

b) Definiere die Verlustvariable $L = C_t - C_{t+h}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} L = C_t - C_{t+h} &= -\frac{\partial C}{\partial S_t}(S_{t+h} - S_t) \\ &= -N(d_1)(S_{t+h} - S_t) \\ &= -N(d_1)S_t[S_{t+h}/S_t - 1] \\ &= -N(d_1)S_t(e^{U_h} - 1)\,. \end{aligned}$$

Die Bestimmungsgleichung für den Value at Risk lautet:

$$P(L > VaR) = \alpha\,.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \alpha &= P[-N(d_1)S_t(e^{U_h} - 1) > VaR] \\ &= P\left[U_h < \ln\left(1 - \frac{VaR}{N(d_1)S_t}\right)\right]. \end{aligned}$$

U_h ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit α-Quantil Q_α, d.h. $P(U_h \leq Q_\alpha) = \alpha$, und es gilt $Q_\alpha = mh - N_{1-\alpha}\, v\sqrt{h}$. Durch Vergleich folgt

$$\ln\left(1 - \frac{VaR}{N(d_1)S_t}\right) = mh - N_{1-\alpha}\, v\sqrt{h}$$

und damit insgesamt

$$VaR = N(d_1)S_t[1 - \exp(mh - N_{1-\alpha}\, v\sqrt{h})]\,.$$

c) Mit $\exp(x) \approx 1+x$ folgt aus b)

$$VaR \approx N(d_1)S_t[N_{1-\alpha}\, v\sqrt{h} - mh]\,.$$

Aufgabe 2: (30 Minuten)

Unterstellen Sie das Kreditrisikomodell nach Merton sowie Black/Scholes-Optionspreise.

a) Bestimmen Sie den Wert des Fremdkapitals zum Zeitpunkt $0 \leq t \leq T$.

b) Berechnen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeiten p bzw. q des Unternehmens in $t = 0$ (bei gegebenem Ausfallzeithorizont T) unter dem "physischen" Wahrscheinlichkeitsmaß P bzw. unter dem "risikoneutralen" Wahrscheinlichkeitsmaß Q.

c) Weisen Sie den folgenden Zusammenhang nach, wobei r die risikolose Zinsrate bezeichne:

$$q = N\left[N^{-1}(p) + \frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{T}\right].$$

d) Bestimmen Sie den *Credit Spread* $CS = CS(T)$ in $t = 0$ allgemein als Differenz zwischen den (konstanten) Zinsraten des ausfallbedrohten und des ausfallfreien Zerobonds mit jeweiligem Nennwert F = 1. Welches Resultat ergibt sich im Merton-Black/Scholes-Fall? Interpretieren Sie das Ergebnis!

Hinweise:

1) Die Black/Scholes-Formel für eine Europäische Putoption lautet:
$P_t = F\exp(-r(T-t))N(-d_2) - S_t N(-d_1)$,
wobei $N(d_1) = N[d_1(t)]$ und $N(d_2) = N[d_2(t)]$

2) Es gilt: $N(-x) = 1 - N(x)$

3) Allgemein gilt (für jedes feste t) für den Prozess $\{A_t\}$, der die stochastische Dynamik der Aktiva des Unternehmens kennzeichnet:
$A_t = A_0 \exp[mt + \sigma\sqrt{t}\, Z_t]$, mit $Z_t \sim N(0,1)$,
wobei $m := \mu - \sigma^2/2$.

Lösungsskizze:

a) Allgemein gilt im Merton-Modell für den Wert des ausfallbedrohten Fremdkapitals:

$$L_t = F\exp(-r(T-t)) - P_t\ .$$

Gemäß den Hinweisen 1) und 2) folgt hieraus:

$$\begin{aligned} L_t &= A_t N(-d_1) + F\exp(-r(T-t))[1 - N(-d_2)] \\ &= A_t[1 - N(d_1)] + F\exp(-r(T-t))N(d_2)\ . \end{aligned}$$

b) Zu bestimmen ist $p := P(A_T < F)$ bzw. $q := Q(A_T < F)$.

Gemäß Hinweis 3) folgt:

$$\begin{aligned} p &= P(A_T < F) \\ &= P\left[mT + \sigma\sqrt{T}Z_T < \ln(F/A_0)\right] \\ &= P\left[Z_T < \frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= N\left[\frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right]. \end{aligned}$$

Im Falle des risikoneutralen Maßes liegt die gleiche stochastische Dynamik zugrunde, wobei nur der Parameter m durch den Parameter $m^* = r - \sigma^2/2$ zu ersetzen ist. Mithin gilt:

$$q = N\left[\frac{\ln(F/A_0) - m^* T}{\sigma\sqrt{T}}\right].$$

c) Es gilt zunächst:

1. $N^{-1}(p) = \dfrac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}$.

2. $m^* = m + (r - \mu)$.

Damit folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} q &= N\left[\frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{(\mu - r)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= N\left[N^{-1}(p) + \frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{T}\right]. \end{aligned}$$

d) Für den ausfallfreien Zerobond gilt (F = 1) in t = 0:

$$B(0,T) = \exp(-rT)$$

Ansatz für den ausfallbedrohten Bond:

$$\begin{aligned} B^d(0,T) &= \exp(-r^* T) \\ &= \exp[-(r + CS)T] \\ &= B(0,T)\exp[-CS\,T] \end{aligned}$$

Folgerung:

$$CS = -\frac{1}{T}\ln[B^d(0,T)/B(0,T)]$$

Black/Scholes-Fall:

$$B^d(0,T) = A_0[1 - N(d_1)] + \exp(-rT)N(d_2).$$

Folgerung:

$$CS = -\frac{1}{T}\ln\left[N(d_2) + A_0[1 - N(d_1)]e^{rT}\right]$$

Determinanten des Credit Spreads sind somit der Zeithorizont T, der sichere (ausfallfreie) Zins, die Volatilität der Aktiva des Unternehmens (implizit in d_1 bzw. d_2), sowie die (anfängliche) Leverage Ratio $A_0/F = A_0$.

<u>Block II</u> (Bartels)

<u>Aufgabe 3:</u> (60 Minuten)

(i) Mit P(t,T) wird der Preis eines Zerobonds zum Zeitpunkt t und Ablaufdatum T bezeichnet, so dass also zum Ablaufdatum T gilt P(T,T) = 1.

$P_P(t,T,T_B,X)$ bzw. $C_P(t,T,T_B,X)$ bezeichnen zum Zeitpunkt t die Preise Europäischer Put- bzw. Call-Optionen mit gleichem Ausübungspreis X, Laufzeit T auf einen Zerobond, der zu einem Zeitpunkt $T_B \geq T$ fällig wird, so dass z.B. der Wert der Call-Option zum Zeitpunkt T gerade
$C_P(T,T,T_B,X) = (P(T,T_B) - X)^+ = \max(P(T,T_B) - X, 0)$ ist.

Welche Put-Call-Relation besteht zwischen den Preisen
$P_P(t,T,T_B,X)$, $C_P(t,T,T_B,X)$, $P(t,T)$ und $P(t,T_B)$ *in jedem arbitragefreien Zinsmodell?*

(15 Minuten)

(ii) Man betrachte eine zweijährige reine Erlebensfallversicherung für einen x-jährigen Mann mit zwei gleich hohen Jahresprämien π. Es wird ein jährlicher Garantiezins g = 3% für die Dauer von zwei Jahren versprochen. Die Anlagestrategie des Versicherungsunternehmens sieht nur Investments in Zerobonds mit dem gleichen Ablaufdatum wie die entsprechende Versicherung vor. Um das Garantieversprechen für die Erlebensfallleistung abzusichern, werden Europäische Call-Optionen auf Zerobonds eingesetzt.

Zum Zeitpunkt heute, d.h. t=0 sind folgende Daten bekannt:
Die ein- bzw. zweijährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-jährigen Mannes beträgt für x = 60: $p_x = 0.98$, ${}_2p_x = 0.96$; die Ablaufleistung beträgt im Erlebensfall € 100 000.-, danach berechnet sich mit dem deterministischen Modell bei einem Kalkulationszins von 3% die Jahresnettoprämie zu € 46 370,09.

Aufgrund der aktuell gültigen Zinsstrukturkurve kennt man die Preise von ein- bzw. zweijährigen Zerobonds: P(0,1) = 0.963   P(0,2) = 0.93 sowie den Preis Europäischer Call-Optionen auf einen Zerobond: $C_P(0,1,2,0.985) = 0.0174$.

Wie kann eine Absicherung des Garantieversprechens mit der hier vorliegenden Option vorgenommen werden?

(20 Minuten)

Was ist der Preis dieser Absicherung bei den hier vorliegenden numerischen Daten?

(20 Minuten)

(iii) *Man berechne den mit den oben genannten Daten konsistenten Preis* $P_P(0,1,2,0.985)$ *der entsprechenden Europäischen Put-Option.*

(5 Minuten)

Anleitung: Hierbei gehe man wie im Seminar von einem deterministischen Ansatz für die Biometrie aus, die einzige Unsicherheit besteht also hier in der zukünftigen Zins-entwicklung. Außerdem werden Abschluss- und Verwaltungskosten in dieser Betrachtung komplett außen vor gelassen.

Lösungsskizze:

Zu (i):

Mit der gleichen Begründung wie bei der herkömmlichen Put-Call-Relation (Zusammenstellung zweier Portfolien, die am Ende denselben Wert haben, Ausnutzung der Arbitragefreiheit,…) leitet man ab:

$$P_P(t,T,T_B,X)+P(t,T_B)=C_P(t,T,T_B,X)+X\cdot P(t,T)$$

Zu (ii):

Der Zusammenhang zwischen der Erlebensfallsumme VS = 100 000 und der jährlichen Prämie von 46 370.09 ergibt sich wie im Seminar aufgrund der Äquivalenzgleichung:

$${}_2p_x\cdot\frac{1}{(1+g)^2}\cdot VS=\pi\left(1+\frac{1}{1+g}\cdot p_x\right)\quad .$$

Investiert man die erste Prämie komplett in Zerobonds zum Preis von P(0,2), so erhält man dafür bei Ablauf der Versicherung nach zwei Jahren den Betrag $\frac{\pi}{P(0,2)}$. Die zweite Jahresprämie muss daher für die endfällige Erlebensfallsumme nur noch folgenden Betrag erwirtschaften:

$$S:={}_2p_x\cdot VS-\frac{\pi}{P(0,2)}\quad .$$

Der hierfür notwendigerweise zu erwirtschaftende Zinssatz y berechnet sich nach der folgenden Äquivalenzgleichung:

(1) $$(1+y)\cdot p_x\cdot\pi=S\,.$$

Ist jetzt zum Zeitpunkt T = 1 der Preis von einjährigen Zerobonds höher als 1/(1+y), d.h. der dann gültige Marktzins zu niedrig, kann man mit der vorhandenen Prämie die Summe S durch Zerobonds nicht mehr erwirtschaften. Um für diesen Fall Vorsorge zu treffen, kauft man bei Vertragsabschluss Call-Optionen auf Zerobonds mit Ausübungspreis $\frac{1}{1+y}$ fällig zum Zeitpunkt 1, und zwar genau $(1+y)\cdot p_x\cdot\pi$ Stück zum Preis von $C_P(0,1,2,\frac{1}{1+y})$.

Bei den hier vorliegenden numerischen Daten ergeben sich folgende Werte:

$\pi = 46\ 370.09$; $S = 96\ 000 - \dfrac{46370.09}{0.93} = 46\ 139.69$ und hieraus ergibt sich nach Gleichung (1) folgender Wert für 1+y: 1+y = 1.0153, d.h. $\dfrac{1}{1+y} \approx 0.985$, das ist gerade der Ausübungspreis der angegebenen Call-Option.

Als Gesamtpreis für die Absicherung über Call-Optionen ergibt sich so:

$46139.69 \cdot 0.0174 \approx 802.83$.

Zu (iii):

Aufgrund der Put-Call-Relation $P_P(t,T,T_B,X) + P(t,T_B) = C_P(t,T,T_B,X) + X \cdot P(t,T)$

ergibt sich hier als Preis der korrespondierenden Put-Option :

$P_P(0,1,2,0.985)$ + 0.93 = 0.0174 + 0.985 * 0.963

und hieraus folgt: $P_P(0,1,2,0.985)$ = 0.035955.

<u>Block III</u> (Maurer)

<u>Aufgabe 4: Asset Allokation</u> (15 Minuten)

a) Erörtern Sie und grenzen Sie ab die Ziele und Eigenschaften der strategischen, taktischen und dynamischen Asset Allokation. **(7,5 Minuten)**

b) Welche Lösungsansätze zur Berücksichtigung von Schätzfehlern bei der Bestimmung optimaler Portfolios gibt es? Was sind Vor-/Nachteile? **(7,5 Minuten)**

<u>Lösungsskizze:</u>

a) Die *Strategische Asset Allocation* beinhaltet die Entscheidung über die langfristige (insbesondere typischerweise konjunkturzyklusübergreifende) adäquate Mittelallokation. Gegeben die Restriktionen seitens des Investors ist es das Ziel der SAA, denjenigen Anlagemix zu identifizieren, der über einen langfristigen Zeitraum die optimale Balance zwischen erwarteter Rendite und eingegangenem Risiko besitzt. Umgekehrt geben SAA-Analysen Aufschluss über die bei gegebenem Risikograd und bei gegebenem anteiligem Investment in die einzelnen Anlageklassen im Mittel langfristig erzielbare Rendite. Methodisch basieren die Verfahren der SAA regelmäßig auf den Ansätzen der Portfoliotheorie.

Die *Taktische Asset Allocation* versucht, durch eine gezielte, von der Einschätzung der kurzen oder mittelfristigen Entwicklung der einzelnen Anlageklassen abhängige, Abweichung von der durch die SAA bestimmten Langfristposition, eine höhere Performance unter Berücksichtigung der gewählten Risikoposition zu erreichen. In diesem Zusammenhang ist insbesondere die Prognostizierbarkeit von Renditeentwicklungen auf den einzelnen Märkten von Bedeutung.

Die *Dynamische Asset Allocation* beinhaltet eine dynamische, d.h. (zumindest approximativ) zeitkontinuierliche Änderung der Anlagemischung. Das Kernziel hierbei ist es, einerseits den Wert des Portfolios in Zeiten von adversen Wertentwicklungen zu schützen und andererseits an positiven Wertentwicklungen zu partizipieren. In der Praxis kommen dabei insbesondere Varianten der dynamischen Portfolio Insurance oder das CPPI-Verfahren zum Einsatz.

b) **Heuristische Verfahren:** Etwa durch Restriktionen bzgl. der Gewichte (Höchstgrenzen/Mindestgrenzen) oder durch Resampling- oder Bootstrapping-Techniken zur Erzeugung eines höheren Diversifikationsgrades. Vorteil ist die relativ leichte technische Umsetzung; Nachteil: Keine theoretische/ökonomische Fundierung damit keine optimale Ausschöpfung von Rendite-/Risikopotentialen.

Bayes-Ansätze: Idee dieser Verfahren ist die „Glaubwürdigkeit“ der Datenbasis zur Parameterschätzung zu beurteilen, erwartete Renditen bzw. Renditeprognosen je nach Noise-Gehalt zu adjustieren bzw. zusätzliche Informationen („A priori Verteilung“) einzubeziehen und damit das Schätzrisiko im Rahmen der Portfoliooptimierung zu berücksichtigen. So ist die Idee des Verfahrens von Jorion (1986), die Struktur eines Portfolios an die des MVP anzunähern (Alternative von Pastor: Schrumpfung hin zum Marktportfolio). Dies wird dadurch bewerkstelligt, indem die erwarteten Renditen zur Rendite des MVP hin „geschrumpft“ werden. Technisch gesprochen handelt es sich bei dem Bayes/Stein-Schätzer um einen „shrinkage estimator“. Das Ausmaß dieser Bewegung wird von dem „Noise“-Gehalt der Daten bestimmt.

<u>Aufgabe 5: Asset Allokation/Internationale Investments</u> (25 Minuten)

Betrachten Sie die beiden Wertpapiere 1 und 2. Die erwarteten Ein-Perioden-Renditen μ_i sowie die zugehörigen Standardabweichungen σ_i (i = 1, 2) weisen die folgenden Werte auf:

$$\mu_1 = 0{,}2 \text{ bzw. } \sigma_1 = 0{,}3$$
$$\mu_2 = 0{,}1 \text{ bzw. } \sigma_2 = 0{,}2.$$

Die Korrelation der beiden Renditen beträgt null.

Als dritte Anlagemöglichkeit (neben Wertpapier 1 und 2) steht dem Investor zusätzlich eine risikofreie Geldmarktanlage mit einer Verzinsung von r_f = 8% zur Verfügung. Die Steigung der Effizienzgerade aus allen drei Anlagemöglichkeiten beträgt a = 0,4058 und die Standardabweichung des Tangentialportfolios beträgt σ_T = 0,2348.

a) Der Investor fordert, die Portfolio-Rendite habe mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% über einer Mindestrendite von 3,5% zu liegen. Welche Struktur (relative Investitionsgewichte), welche Standardabweichung und welche erwartete Rendite besitzt das Portfolio (aus der risikolosen Anlage und dem Tangentialportfolio), welches die obige Shortfallrestriktion einhält und die erwartete Rendite maximiert? **(4 Minuten)**

(**Hinweis:** Unterstellen Sie zur Lösung des Problems normalverteilte Renditen.)

Gehen Sie jetzt davon aus, dass die beiden riskanten Wertpapiere eine Zwei-Länder-Welt mit Wertpapier 1 aus Land 1 (Heimatland des Investors) und Wertpapier 2 aus Land 2 (Ausland) darstellen. Ihnen steht im Folgenden keine risikolose Anlage zur Verfügung. Es werden folgende Bezeichnungen für die betrachtete Investmentperiode getroffen:

R_i := lokale Rendite des Wertpapiers i (i = 1, 2),
e_2 : = Wechselkursrendite zwischen Land 2 und Land 1,
Gegeben seien der Erwartungswert $\mu(e_2) = 0{,}06$ p.a. und die Standardabweichung $\sigma(e_2) = 0{,}18$ p. a. der Wechselkursrendite zwischen Land 2 und Land 1.
Die Korrelationsmatrix p. a. ist gegeben durch:

	R_1	R_2	e_2
R_1	1	0	0
R_2		1	0,4
e_2			1

Die Forwardprämie beträgt $f_2 = 3\%$.

Hinweis:
- Führen Sie die folgenden Berechnungen aus der Sicht des inländischen Investors durch.
- Vernachlässigen Sie bei Ihren Berechnungen alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der ($R_2 e_2$) Kreuzprodukte.
- Führen Sie alle Berechnungen mit 4 Nachkommastellen durch.
- Gehen Sie von normalverteilten Renditen aus.
- Beachten Sie die Tabelle zur Standardnormalverteilung im Anhang.

b) Berechnen Sie die Struktur, den Renditeerwartungswert und die Renditestandardabweichung des aus Wertpapier 1 und 2 gebildeten Minimum-Varianz-Portfolios (MVP), wenn der Investor eine vollständige Wechselkurssicherung durchführt. **(4 Minuten)**

c) Der Investor wählt im Vorfeld eine Asset-Allokation von 50% in Wertpapier 1 und 50% in Wertpapier 2. Seine Präferenzfunktion hat die Form $U = \mu - 2\sigma^2$. Ermitteln Sie den optimalen Umfang der Wechselkurssicherung. Ist es sichergestellt, dass das global optimale Portfolio ermittelt wurde? **(5 Minuten)**

d) Zeigen Sie, dass für die EUR-Rendite einer ausländischen Anlage folgende Beziehung gilt: $R_{i,EUR} = R_i + e_i + R_i \cdot e_i$,

wobei: $R_{i,EUR} = \frac{P_{i,t+1} \cdot S_{i,t+1} - P_{i,t} \cdot S_{i,t}}{P_{i,t} \cdot S_{i,t}}$, $R_i = \frac{P_{i,t+1} - P_{i,t}}{P_{i,t}}$ und $e_i = \frac{S_{i,t+1} - S_{i,t}}{S_{i,t}}$ **(3 Minuten)**

e) Was versteht man unter einer Money-Market-Hedgeposition? **(4 Minuten)**

f) Nehmen Sie an, dass zwischen den Devisenmärkten keine (Dreiecks-) Arbitragemöglichkeiten existieren. Ermitteln Sie die fehlenden Werte (gekennzeichnet durch die Buchstaben A – E) in der nachfolgenden Tabelle! **(5 Minuten)**

Währung	EUR	USD	GBP	SFR
EUR	1	1,2601	B	C
USD	0,7936	1	0,5363	E
GBP	A	1,8646	1	2,3521
SFR	0,6291	D	0,4252	1

Lösungsskizze:

a) Entscheidet sich der Investor für eine varianzminimale Position, dann wird er 100% in die sichere Anlage investieren. Maximiert der Investor unter der genannten Restriktion den Erwartungswert, so liegt das optimale Portfolio auf dem Schnittpunkt der Effzienzgerade und der Restriktionsgerade

1) Effizienzgerade: $\mu = 0{,}08 + 0{,}4058\sigma$

2) Restriktion: $\mu - 1{,}65\ \sigma = 0{,}035$

1) abzgl. 2) $1{,}2442\sigma = 0{,}045$

$\sigma = 0{,}0362$

$\mu = 0{,}08 + 0{,}4058 * 0{,}0362 = 0{,}0947$

$\sigma = x\sigma_T$

$0{,}0362 = x\ 0{,}2348$

$x = 0{,}1542, \qquad 1-x = 0{,}8458$

Struktur: 84,58% in risikofreie Anlage, 15,42% in Tangentialportfolio.

b) $\sigma^2_{MVP}(h=1) = x^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-x)^2 \sigma_2^2$

$$\frac{\partial \sigma^2_{MVP}(h=1)}{\partial x} = 2 \cdot \sigma_1^2 \cdot x - 2 \cdot (1-x) \cdot \sigma_2^2 \overset{!}{=} 0$$

$$x = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{0{,}2^2}{0{,}3^2 + 0{,}2^2} \approx 0{,}3077 \Rightarrow (1-x) = 0{,}6923$$

$$\mu_{MVP}(h=1) = \mu_1 \cdot x + (\mu_2 + f_2) \cdot (1-x)$$

$$\mu_{MVP}(h=1) = 0{,}2 \cdot 0{,}3077 + (0{,}1 + 0{,}03) \cdot 0{,}6923 \approx 0{,}1515$$

$$\sigma^2_{MVP}(h=1) = x^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-x)^2$$

$$\sigma^2_{MVP}(h=1) = 0{,}3077^2 \cdot 0{,}3^2 + 0{,}6923 \cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}0277 \Rightarrow \sigma_{MVP}(h=1) \approx 0{,}1664$$

c) Mit $U = \mu - 2 \cdot \sigma^2$

sowie

$$\mu = \mu_1 \cdot x + \left[\mu_2 + e_2 + h \cdot (f_2 - e_2)\right] \cdot (1-x)$$

und

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 \cdot x^2 + \left[\sigma_2^2 + (1-h)^2 \cdot \sigma_e^2 + 2 \cdot (1-h) \cdot \rho_{2,e} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_e\right] \cdot (1-x)$$

ergibt sich

$$\frac{\partial U}{\partial h} = (f_2 - e_2) \cdot (1-x) - 2 \cdot \left[2 \cdot (1-h) \cdot (-1) \cdot \sigma_e^2 - 2 \cdot \rho_{2,e} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_e\right] \cdot (1-x)^2$$

$$h = \frac{(f_2 - e_2) \cdot (1-x) + 4 \cdot \sigma_e^2 \cdot (1-x)^2 + 4 \cdot \rho_{2,e} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_e \cdot (1-x)^2}{4 \cdot \sigma_e^2 \cdot (1-x)^2}$$

Mit $x = \frac{1}{2}$ ergibt sich

$$h = \frac{0{,}5 \cdot (f_2 - e_2) + \sigma_e^2 + \rho_{2,e} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_e}{\sigma_e^2} = \frac{0{,}5 \cdot (0{,}03 - 0{,}06) + 0{,}0324 + 0{,}0144}{0{,}0324} \approx 0{,}9815$$

d) $$R_{i,EUR} = \frac{P_{i,t+1} \cdot S_{i,t+1} - P_{i,t} \cdot S_{i,t}}{P_{i,t} \cdot S_{i,t}} = \frac{P_{i,t+1} \cdot S_{i,t+1}}{P_{i,t} \cdot S_{i,t}} - 1 = \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} \cdot \frac{S_{i,t+1}}{S_{i,t}} - 1$$

$$= (1 + R_i) \cdot (1 + e_i) - 1 = R_i + e_i + R_i \cdot e_i$$

e) Hierbei handelt es sich um eine Technik der Wechselkursabsicherung von Investments in Fremdwährung. Hierbei wird simultan eine Kreditaufnahme in ausländischer Währung (in Höhe des in fremder Währung investierten Kapitals) und eine Anlage des resultierenden Betrags am inländischen Geldmarkt eingegangen. Aus dem Zinsparitätentheorem ergibt sich, dass ein Money-Market-Hedge finanzwirtschaftlich äquivalent zu einem Devisenforward ist.

f) A: 1,4797 [EUR/GBP]
B: 0,6758 [GBP/EUR]
C: 1,5896 [SFR/EUR]
D: 0,7927 [USD/SFR]
E: 1,2615 [SFR/USD]

Aufgabe 6: Langfristinvestments in Immobilien (20 Minuten)

Sie analysieren die Vorteile/Nachteile einer Investition in ein Immobilienprojekt (Direktanlage). Nach gründlicher Recherche erwarten Sie für die auf kontinuierlicher Basis berechneten jährlichen (Log-)Renditen r_t des Investments eine mittlere Rendite von 8% p.a, bei einer Volatilität von 4% p.a. und einer Autokorrelation 1. Ordnung von a = 0,6. Der heutige Kaufpreis für das Objekt beträgt € 100 Mio. zzgl. Transaktionskosten in Höhe von 7% des Kaufpreises. Bei Verkauf des Objekts ist mit weiteren Transaktionskosten in Höhe von 3% des dann erzielbaren Verkaufspreises zu rechnen. Unterstellen Sie im Folgenden normalverteilte iid-Renditen mit adjustierter Volatilität nach dem Blundell/Ward-Verfahren.

a) Berechnen Sie für das erzielbare Endvermögen des Investments nach einem und neun Jahren: den Erwartungswert, die Standardabweichung sowie das Mindestvermögen, welches mit einer Wahrscheinlichkeit von $\alpha = 95\%$ nicht unterschritten wird. **(7 Minuten)**

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich Ihr anfänglich investiertes Kapital (inkl. Transaktionskosten) nach einem bzw. nach Ablauf von neun Jahren mindestens mit einer (kontinuierlichen) Rendite von 4% p.a. verzinst hat? **(7 Minuten)**

c) Welche grundsätzlichen Techniken der Konstruktion von Immobilienindizes gibt es? Diskutieren Sie kurz Vor- und Nachteile. **(6 Minuten)**

Hinweise: Sei $X \sim LN(m, v^2)$ eine logarithmisch normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern m und v^2, und N_α das α-Quantil der Standardnormalverteilung (siehe Tabelle im Anhang), dann gilt $aX^b \sim LN(\ln a + bm, b^2v^2)$ sowie für Erwartungswert, Varianz, und α-Quantil

$$E(X) = e^{m+0,5v^2}$$
$$Var(X) = E(X)^2\left(e^{v^2} - 1\right)$$
$$LN_\alpha(m, v^2) = e^{m+N_\alpha \cdot v} = e^{m-N_{1-\alpha}\cdot v}$$

Das Blundell/Ward-Verfahren korrigiert die Varianz gemäß: $VAR(r_t^*) = VAR(r_t)\dfrac{1-a^2}{(1-a)^2}$

Lösungsskizze:

a) Korrektur von STD der Einperioden-Logrendite gemäß dem Blundell/Ward-Verfahren:

$$\sigma(r_t^*) = STD(r_t)\sqrt{\frac{1-a^2}{(1-a)^2}} = 2\% \cdot \sqrt{\frac{1-0,6^2}{(1-0,6)^2}} = 4\% \cdot 2 = 8\%.$$

Bei (bereinigten) iid-Einperioden-Renditen $r_t^* \sim N(\mu;\sigma) = N(8\%;\, 8\%)$ resultiert für die kumulierte Logrendite bis T: $\sum_{t=1}^{T} r_t^* = r_{0,T} \sim N\left(T\mu; \sigma\sqrt{T}\right)$. Für das Endvermögen nach T Jahren und Rücknahmegebühren von 3% des Verkaufpreises gilt damit

$$S_T = 0,97 \cdot S_0 \cdot e^{r_{0,T}^*} \sim LN\left(m;\, v^2\right) = LN\left(\ln(0,97 \cdot S_0) + T\mu;\, T\sigma^2\right)$$

Für das Endvermögen gilt dann

$$E(S_T) = 0,97 \cdot S_0 \cdot e^{T(\mu + 0,5\cdot\sigma^2)} = 97.000.000 \cdot e^{T(0,08+0,5\cdot 0,08^2)}$$
$$STD(S_T) = E(S_T) \cdot \sqrt{e^{T\cdot\sigma^2} - 1}$$
$$LN_{\alpha=5\%}(S_T) = 0,97 \cdot S_0 \cdot e^{T\mu - \sqrt{T}\cdot 1,645\cdot\sigma} = 97.000.000 \cdot e^{T\cdot 0,08 - \sqrt{T}\cdot 1,645 \cdot 0,08}$$

$E(S_1) = 105.415.636$; $E(S_9) = 205.102.731$

$STD(S_1) = 8.446.762$; $STD(S_9) = 49.943.070$

$LN_{5\%}(S_1) = 92.084.900$; $LN_{5\%}(S_{10}) = 134.116.789$

b) Für kumulierte Logrendite bis T nach Transaktionskosten i.H.v. a = 7% des Kaufpreises und b=3% des Verkaufspreises gilt:

$$r_{0,T}^{TK} = r_{0,T} + \ln\left(\frac{1-b}{1+a}\right) \sim N[T\mu + \ln\left(\frac{1-b}{1+a}\right), \sqrt{T}\sigma]$$

Bei einer kontinuierlichen Zielrendite von z = 4% per annum resultiert für die kumulierte Zielrendite $z_{0,T} = Tz$:

$$SW = P(r_{0,T}^{TK} < Tz) = \Phi\left(\frac{Tz - [T\mu + \ln(1-b) - \ln(1+a)]}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

für T = 1 resultiert 1-SW = 1-Φ(0,73) = 23,27%
für T = 10 resultiert 1-SW = 1-Φ(-1,09) = 0,8621%

c) **Gutachtenbasierte Indizes (Appraisal Based Indizes):**
Index-Konstruktion: Auswertung von Mieten und (geschätzten) Wertsteigerungen von einzelnen Immobilien im Bestand institutioneller Investoren
Vorteil: Portfolio-Kontinuität, Total-Return-Index
Nachteil: Keine Marktpreise, Smoothing-Effekte

Transaktionsbasierte Indizes:
Index-Konstruktion: Auswertung von tatsächlichen Transaktionspreisen auf Immobilienmärkten. Erfassung von Qualitätsschwankungen durch sog. hedonische Regressionen.
Vorteil: Basierend auf realisierten Marktpreisen
Nachteil: Keine Portfolio-Kontinuität, nur Preisveränderungen

Indizes vom Immobilien-Aktiengesellschaften
Index-Konstruktion: Auswertung von Kursen börsennotierter Aktiengesellschaften mit Fokus auf dem Immobiliengeschäft.
Vorteil: Marktpreise, Portfolio-Kontinuität, Total-Return-Index
Nachteil: Einfluss des Börsenrisikos, untypische Rendite-Risikoprofile

Anhang

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung Φ(x)

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000