DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen (PO 3)

Finanzmathematik

am 20. Oktober 2018

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 8 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Block I (Albrecht)

Aufgabe 1: (20 Minuten)

Gegeben sei eine Europäische Calloption auf einen dividendenfreien Basistitel mit Laufzeit T, deren heutiger Wert (Preis) C_t beträgt und die nach Black/Scholes bewertet ist.

a) Wie lautet die approximative Änderung des Callwerts über das Zeitintervall [t, t+h] unter Anwendung der Delta-Approximation? **(2 min)**

b) Wie hoch ist der Value at Risk der Option über ein Intervall der Länge h unter Anwendung der Delta-Normal-Methode? Dabei sei die Rendite R_h des Basistitels gegeben durch $R_h \sim N(\mu h, \sigma^2 h)$. **(5 min)**

c) Wie lautet die approximative Änderung des Callwerts über das Zeitintervall [t, t+h] unter Anwendung der Delta-Exakt-Approximation? **(3 min)**

d) Bestimmen Sie nun für die Call-Position den Value at Risk zum Signifikanzniveau α über das Zeitintervall [t, t+h] auf der Basis einer Delta-Exakt-Approximation. Unterstellen Sie dabei für die Log-Rendite des Basisobjekts $U_h \sim N(0, v^2 h)$. **(8 min)**

e) Approximieren Sie den Value at Risk aus Aufgabenteil d), indem Sie die Exponentialfunktion linear approximieren! **(2 min)**

Hinweise:

1) Das Call-Delta eines Europäischen Call lautet im Falle von Black/Scholes-Preisen $\Delta_C(t) = N[d_1(t)]$.
2) Setzen Sie den Value at Risk im Normalverteilungsfall als bekannt voraus und ebenso die Transformationseigenschaften von Quantilen.

Lösungshinweis:

a) Deltaapproximation der Optionsposition:

$$\Delta C := C_{t+h} - C_t \approx \Delta_C(t)(S_{t+h} - s_t),$$

wobei $\Delta_C(t) = \partial C / \partial S$ („Optionsdelta“) .

Im Black/Scholes-Falle gilt dabei:

$$\Delta_C(t) = \partial C / \partial S = N[d_1(t)].$$

b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta C &= N[d_1(t)]s_t R_h \\
E(\Delta C) &= N[d_1(t)]s_t \mu h \\
\sigma(\Delta C) &= N[d_1(t)]s_t \sigma\sqrt{h} \\
L_C &= -\Delta C, \quad E(L_C) = -E(\Delta C) = -N[d_1(t)]s_t\mu h, \ \ \sigma(L_C) = \sigma(\Delta C)
\end{aligned}$$

ΔC und damit L_C normalverteilt, somit gilt insgesamt:

$$\begin{aligned}
VaR_h &= E(L_C) + N_{1-\alpha}\sigma(L_C) \\
&= N[d_1(t)]s_t\left[N_{1-\alpha}\sigma\sqrt{h} - \mu h\right]
\end{aligned}$$

c) Definiere die Verlustvariable $L_C = -\Delta C$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
L_C &= -\frac{\partial C}{\partial S_t}\Delta S \\
&= -N[d_1(t)]\Delta S \\
&= -N[d_1(t)]s_t(e^{U_h} - 1).
\end{aligned}$$

d) Die Funktion $f(u) = -N[d_1(t)]\, s_t(e^u - 1)$ ist eine monoton fallende Funktion in u. Aufgrund der Transformationseigenschaften von Quantilen gilt somit

$$\begin{aligned}
VaR_\alpha &= Q_{1-\alpha}(L_C) \\
&= -N[d_1(t)]s_t\{\exp[Q_\alpha(U_h)] - 1\} \\
&= -N[d_1(t)]s_t\{\exp[-N_{1-\alpha}v\sqrt{h}] - 1\} \\
&= N[d_1(t)]s_t\{1 - \exp[-N_{1-\alpha}v\sqrt{h}]\}.
\end{aligned}$$

e) Mit $\exp(x) \approx 1+x$ folgt aus d)

$$VaR \approx N[d_1(t)]s_t N_{1-\alpha}v\sqrt{h}\,.$$

<u>Aufgabe 2:</u> (10 Minuten)

Betrachten Sie einen dreijährigen Zerobond mit Rückzahlungsbetrag 500. Die dreijährige annualisierte Spot Rate betrage $r_3 = 1\%$. Die zufallsabhängige Wertänderung ΔR_3 der dreijährigen Spot Rate auf täglicher Basis sei normalverteilt, $\Delta R_3 \sim N(0, \sigma^2)$. Die tägliche Volatilität betrage $\sigma(\Delta R_3) = 0.05\%$.

Bestimmen Sie den Mean-Value at Risk zum Signifikanzniveau α auf Tagesbasis unter Zugrundelegung der Delta-Normal-Approximation sowie unter Benutzung der Key Rate-Duration!

Lösungshinweis:

Es gilt zunächst

$$P_0 = N(1+r_3)^{-3} = 500\,(1.01)^{-3} = 500\,(0.9705) = 485.295.$$

Die Key Rate-Duration eines Zerobond entspricht seiner Laufzeit (hier: T=3), für die Preisänderung gilt damit approximativ

$$\Delta P = -P\frac{3}{1+r_3}\Delta R_3 = -485.295\,\frac{3}{1.01}\Delta R_3 = -1441.47\cdot\Delta R_3\,.$$

Für die Standardabweichung der täglichen Wertänderung gilt entsprechend mit L:= - ΔP

$$\sigma(L) = \sigma(\Delta P) = 1441.47\cdot\sigma(\Delta R_3) = 1441.47\cdot 0.0005 = 0.7207\,.$$

Für den MVaR zum Signifikanzniveau α gilt dann

$$\text{MVaR} = 0.7207\cdot N_{1-\alpha}\,,$$

wobei $N_{1-\alpha}$ das (1-α)-Quantil der Standardnormalverteilung bezeichne.

Aufgabe 3: (15 Minuten)

Unterstellen Sie das Kreditrisikomodell nach Merton. Es bezeichne dabei $\{A_t\}$ die Entwicklung des Marktwerts der Aktiva, die einer geometrischen Brownschen Bewegung folge. Das Fremdkapital bestehe aus einem Zerobond mit Nennwert F und Laufzeit T.

a) Bestimmen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit PD(0,T) im Zeitpunkt t = 0 in Termen der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. **(5 min)**

Hinweis: Die stochastische Differentialgleichung $dS_t/S_t = \mu\,dt + \sigma\,dW_t$, besitzt die Lösung $S_t = S_0 \exp\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}\,Z_t\}$, wobei $Z_t \sim N(0,1)$.

b) Bestimmen Sie die korrespondierende risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit RNPD(0,T). Explizieren Sie den Zusammenhang zwischen PD(0,T) und RNPD(0,T). **(10 min)**

Hinweis: Der Übergang vom physischen zum risikoneutralen Maß entspricht bei der geometrischen Brownschen Bewegung dem Übergang von dem Driftkoeffizient μ zu dem Driftkoeffizienten r (der risikolosen Zinsrate).

Lösungshinweis:

a) Mit $m := \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ gilt nach Hinweis

$$A_T = A_0 \exp(mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T),\ Z_T \sim N(0,1).$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} PD(0,T) &= P(A_T < F) = P(A_T \le F) \\ &= P(A_0 \exp(mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T) \le F) \\ &= P[mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T \le \ln(F/A_0)] \\ &= P\left[Z_T \le \frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= \Phi\left[\frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right]. \end{aligned}$$

b) Gemäß Hinweis gilt $m^* := r - \frac{1}{2}\sigma^2$ unter Q

$$A_T = A_0 \exp(m^* T + \sigma\sqrt{T}\, Z_T)$$

und damit analog zu a)

$$\begin{aligned} RNPD(0,T) &= Q(A_T < F) \\ &= \Phi\left[\frac{\ln(F/A_0) - m^* T}{\sigma\sqrt{T}}\right]. \end{aligned}$$

Aus a) folgt ferner

$$\Phi^{-1}[PD(0,T)] = \frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Nun gilt $m^* = m + (r - \mu) = m - (\mu - r)$ und hieraus folgt insgesamt

$$\begin{aligned} RNPD(0,T) &= \Phi\left[\frac{\ln(F/A_0) - m\,T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{(\mu - r)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= \Phi\left[\Phi^{-1}[PD(0,T)] + \frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{T}\right]. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (15 Minuten)

Betrachten Sie ein Portfolio aus 2 Krediten, dessen Verlustverteilung durch ein Einfaktor-Defaultmodell beschrieben wird. Die einperiodigen Verluste der Kredite betragen $L_1 = 500 \cdot D_1$ und $L_2 = 250 \cdot D_2$, wobei D_1 und D_2 die Defaultindikatoren der Kredite bezeichnen. Deren Verteilung wird durch Bonitätsvariablen Y_i und Ausfallschranken H_i auf Basis von

$$D_i = 1 \Leftrightarrow Y_i < H_i \qquad \text{und} \qquad D_i = 0 \Leftrightarrow Y_i \ge H_i$$

für i=1,2 bestimmt. Die Bonitätsvariablen werden durch

$$Y_1 = \sqrt{\rho}\, F + \sqrt{1 - \rho}\, U_1 \text{ und } Y_2 = \sqrt{\rho}\, F + \sqrt{1 - \rho}\, U_2$$

mit $\rho = 0{,}64$ modelliert, wobei F, U_1, U_2 unabhängig und standardnormalverteilt sind. Für die individuelle Ausfallwahrscheinlichkeiten gelten $P(D_1 = 1) = 5\%$ und $P(D_2 = 1) = 1\%$.

a) Bestimmen Sie den erwarteten Portfolioverlust, d.h. den Erwartungswert von $L = L_1 + L_2$. **(5 min)**

b) Berechnen Sie die Ausfallschranken H_1 und H_2 sowie die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit der beiden Kredite. **(10 min)**

Hinweise:

1) Aus den dargestellten Annahmen lässt sich folgern, dass Y_1 und Y_2 gemeinsam normalverteilt sind, wobei $E(Y_1) = E(Y_2) = 0$, $Var(Y_1) = Var(Y_2) = 1$ und $\rho(Y_1, Y_2) = \rho$.
2) Approximativ gilt für die univariate Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung

$$\Phi(-2{,}33) = 0{,}01 \qquad \Phi(-1{,}96) = 0{,}025 \qquad \Phi(-1{,}64) = 0{,}05$$

$$\Phi(-1{,}27) = 0{,}1 \qquad \Phi(-0{,}12) = 0{,}45.$$

3) Für die Verteilungsfunktion der zweidimensionalen Standardnormalverteilung mit dem Korrelationsparameter $\rho = 0{,}64$ gilt $\Phi_2(-1{,}64, -2{,}33; \rho) = 0{,}005$.

Lösungshinweis:

a) Für den erwarteten Verlust gilt

$$\begin{aligned} E(L) &= E(L_1 + L_2) \\ &= 500 \cdot E(D_1) + 250 \cdot E(D_2) \\ &= 500 \cdot P(D_1 = 1) + 250 \cdot P(D_2 = 1) \\ &= 500 \cdot 0{,}05 + 250 \cdot 0{,}01 = 27{,}5 \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass

$$E(D_1) = 1 \cdot P(D_i = 1) + 0 \cdot P(D_i = 0) = P(D_i = 1).$$

b) Für die individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten gilt

$$P(D_i = 1) = P(Y_i < H_i) = P(Y_i \leq H_i) = \Phi_1(H_i),$$

wobei wir im letzten Schritt Hinweis 1) verwenden. Somit müssen

$$\Phi_1(H_1) = 0{,}05 \qquad \text{und} \qquad \Phi_1(H_2) = 0{,}01$$

gelten, was mit Hinweis 2) zu

$$H_1 = -1{,}64 \qquad \text{und} \qquad H_2 = -2{,}33$$

führt. Aus der Definition der D_i und mit Hinweis 1) erhalten wir für die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(D_1 = 1, D_2 = 1) &= P(Y_1 < H_1, Y_2 < H_2) \\ &= \Phi_2(H_1, H_2; \rho) \\ &= \Phi_2(-2{,}33\ , -1{,}64; \rho) = 0{,}005. \end{aligned}$$

Dabei wird im letzten Schritt offenbar auf Hinweis 3) rekurriert.

<u>Block II</u> (Bartels)

<u>Aufgabe 5:</u> (20 Minuten)

Bei einer Lebensversicherungspolice hat der Kunde jährlich die Möglichkeit, zwischen zwei Formen der Überschussbeteiligung in dem jeweiligen Versicherungsjahr zu wählen:
Entweder er wählt einen für das Jahr angebotenen Überschusszins auf das relevante Guthaben G oder aber er entscheidet sich stattdessen für die Partizipation an der einjährigen Steigerung eines Aktienindexes. Bei dieser Partizipation verspricht das Unternehmen dem Kunden einen Partizipationssatz i(p) auf das genannte Guthaben G, d.h. es wird für den zweiten Fall eine Überschussbeteiligung in Höhe von Max $\left(0,\ \left(\frac{x(1)}{x(0)} - 1\right) \cdot i(p) \cdot G\right)$ von dem Versicherungsunternehmen angeboten, dabei bezeichnet x(1) den Stand des Aktien-Indexes nach Ablauf eines Jahres und x(0) den Stand Indexes zu Beginn des Versicherungsjahres.
Für den Aktuar des Versicherungsunternehmens stellt sich zu Beginn des Versicherungsjahres die Lage am Kapitalmarkt so dar:
Der erzielbare Jahreszins für risikolose Anlagen ist 1,2 %, der Stand des Aktienindexes beträgt 10500 Punkte und europäische Call mit einjähriger Laufzeit auf den Index zum Ausübungspreis 10500 werden an der Terminbörse angeboten. 0,5 % des Guthabens G sollen zur Deckung von Verwaltungskosten und Biometrie zum Ende des Versicherungsjahres bei dem Unternehmen nach Überschusszuteilung noch verbleiben. Dem Kunden wird ein Partizipationssatz i(p) von 50% angeboten.

Was darf ein einjähriger Call auf den Index mit Ausübungspreis 10500 maximal kosten, damit der Aktuar das in Aussicht gestellte Gewinnversprechen über den genannten Call kongruent decken kann?

<u>Lösungshinweis:</u>

Der Aktuar hat mit seiner Vermögensanlage folgende Leistungen zum Jahresende zu duplizieren:

- Falls der Kunde sich für den Garantiezins entscheidet, ist offenbar ein Zins von 0,7% maximal möglich, wenn 0,5% des Guthabens G zum Jahresende dem Unternehmen noch zur Verfügung stehen sollen.
- Falls der Kunde sich für die Indexpartizipation entscheidet, müssen folgende Beträge zum Jahresende verfügbar sein: Neben dem Betrag von 0,5% von G natürlich auch das Guthaben G selbst und eine Überschussbeteiligung in Höhe von

Max (0, $(\frac{x(1)}{x(0)} - 1) \cdot i(p) \cdot G)$) , also insgesamt: 1,005 $\cdot$ G + Max (0, $(\frac{x(1)}{x(0)} - 1) \cdot i(p) \cdot G)$) = 1,005 $\cdot$ G + i(p) $\frac{G}{x(0)}(x(1) - x(0))^+$, und das erreicht man sicher dann, wenn man den Geldbetrag 1,005 $\cdot$ G sowie i(p) $\frac{G}{x(0)}$ Calls auf den Index mit dem Ausübungspreis x(0) zur Verfügung hat. Daher wird er zur kongruenten Deckung des Gewinnversprechens zu Beginn des Jahres i(p) $\frac{G}{x(0)}$ Calls auf den Index kaufen und den Geldbetrag (1,005 $\cdot$ G)/1,012 festverzinslich zu 1,2% Verzinsung risikolos anlegen.

Der maximale Call-Preis c berechnet sich demnach aus der aus der Gleichung

G = $\frac{1.005 \cdot G}{1.012} + i(p)\frac{G}{x(0)} \cdot c$ (c ist der Preis des Calls auf den Index zum Ausübungspreis x(0)). Bei den hier vorliegenden numerischen Daten ergibt sich dann:

c = $(1 - \frac{1.005}{1.012}) \cdot \frac{x(0)}{i(p)} = (1 - \frac{1.005}{1.012}) \cdot \frac{10500\,)}{0.5} =$ 36,314....

Bei den hier vorliegenden Finanzmarktdaten darf der Call also nicht mehr als 36,31 € kosten, damit 50% Partizipation zugesagt werden können.

<u>Aufgabe 6:</u> (30 Minuten)

Der Vermögensanleger eines Versicherungsunternehmens verfolgt kontinuierlich eine Anlagestrategie, die b = 5% Anteile des Gesamtvermögens in einen Aktienfonds und komplementär 1-b = 95% Anteile des Anlagevermögens in einen risikolosen Geldmarktfonds investiert. Der Preisprozess $\{S_t | 0 \le t \le T\}$ des genannten Aktienfonds folge einer geometrischen Brownschen Bewegung, etwa $S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{v^2}{2})t + vW_t}$ mit einem zu schätzenden Drift μ und v = 0,2.

Der risikolose Geldmarktfonds entwickelt sich kontinuierlich mit einer festen exponentiellen Zinsrate r weiter, etwa: $B_t = B_0 \cdot e^{rt}$, so dass der Aufzinsungsfaktor in einem Jahr e^r = 1,009 beträgt, d.h. der Zinssatz für ein Jahr ist 0,9%. Man unterstellt, dass in einem zeitstetigen Modell idealisiert diese kontinuierliche Anlagestrategie mit den anvisierten proportionalen Anteilen wirklich möglich ist, so dass der Wert des Gesamtvermögens V(t) zur Zeit t sich bei einem Anfangsvermögen von 1 so darstellt: $V(t) = \exp((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2})t + bv \cdot W_t)$.

Wie hoch muss in diesem Modell der Drift μ mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei diesen Modellannahmen in einem Jahr mindestens das Anfangskapital erhält, größer oder gleich 95% ist? Man gebe explizite numerische Werte μ an und verwende hierbei den Wert $\Phi(1{,}645) \approx 0.95$ der Standard-Normalverteilung!

Lösungshinweis:

Es ist 1 = exp(0), deswegen berechnet sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit den Parametern der Aufgabe folgendermaßen:

$$P(V(1)\geq 1) = P(\exp((b\mu+(1-b)r-\frac{b^2v^2}{2})+bv\cdot W_1)\geq e^0) =$$

$$= P(((b\mu+(1-b)r-\frac{b^2v^2}{2})+bv\cdot W_1)\geq 0) = P(W_1 \geq \frac{-(b\mu+(1-b)r-\frac{b^2v^2}{2})}{b\cdot v}) =$$

$$1 - N(\frac{-(b\mu+(1-b)r-\frac{b^2v^2}{2})}{b\cdot v}) = N(\frac{(b\mu+(1-b)r-\frac{b^2v^2}{2})}{b\cdot v}) ,$$

wenn N(.) die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung bezeichne. Der in der letzten Gleichung rechts stehende Term ist offenbar streng monoton wachsend als Funktion des Drifts μ: Für größeres μ ergeben sich größere Erfolgswahrscheinlichkeiten. Daher genügt es, die Gleichung $N(\frac{(b\mu+(1-b)r-\frac{b^2v^2}{2})}{b\cdot v}) = 0{,}95$ folgendermaßen nach μ aufzulösen:

$$\frac{(b\mu+(1-b)r-\frac{b^2v^2}{2})}{b\cdot v} = 1.645 \text{, also } \mu = \frac{1}{b}(1.645\cdot bv+\frac{b^2v^2}{2}-(1-b)r) \;.$$

Nun ist r = ln(1,009) = 0,008959741.. , so dass sich bei den hier vorliegenden numerischen Daten ergibt:

μ = 20 (0,01645 + 0,00005 - 0,008511754) = 0,15976492…

Das heißt: Der Driftterm müsste schon knapp 16% betragen, damit man mit der angegebenen Strategie in diesem Modellkontext mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% ein Kapitalerhalt bei diesem Modell gesichert ist.

Aufgabe 7: (10 Minuten)

Ein Hedgefonds-Manager studiert den Kurszettel für die Preise von einjährigen europäischen Put- bzw. Call-Optionen. Dabei findet er für die Aktien eines Unternehmens U unter anderem folgende Put- und Call-Preise mit gleichem Ausübungszeitpunkt in einem Jahr und demselben Ausübungspreis K = 100 € :
Preis der Put-Option: 2,50 €
Preis der Call-Option: 3,20 €
Der aktuelle Zins am Markt beträgt 0,9% für einjährige Kapitalanlagen und der aktuelle Kurs der Aktie des Unternehmens U beträgt 100 €.
(i) Mit welcher Arbitrage-Strategie kann er hieraus aufgrund der obigen Preisrelation seinen Nutzen ziehen?
(ii) Man beschreibe explizit numerisch den resultierenden Arbitragegewinn.

Hinweis: Leerverkäufe von Aktien und Derivaten werden als erlaubt und möglich vorausgesetzt.

Lösungshinweis:

Es bezeichnen:
$S = S(t)$ den Preis einer Aktie; $P(S,t)$ bzw. $C(S,t)$ die Preise für europäische Put- bzw. Call-Optionen auf die Aktie mit Ausübungspreis K und Ausübungszeitpunkt T . Dann gilt für $t < T$ in allen arbitragefreien Modellen die Put-Call-Relation:

$$P(S,t) + S(t) = K \exp[-r(T-t)] + C(S,t) .$$

Begründung:

Zum Ausübungstermin T liefern die beiden folgenden Portfolios denselben Wert:

Portfolio 1 : 1 Aktie + 1 Put-Option auf diese Aktie mit Ausübungspreis K zum Ausübungszeitpunkt T ;

Portfolio 2 : 1 Call-Option auf die betreffende Aktie mit Ausübungspreis K und Ausübungszeitpunkt T + Barbetrag K zum Zeitpunkt T

Diese Put-Call Relation ist bei der angegebenen einjährigen Zinsrate offenbar nicht erfüllt:

Wegen 100/1,009 = 99,11 hat man einerseits für den Preis der Put-Option und Basispapier 2,50 + 100 = 102,50 und dem stehen gegenüber: 99,11 + 3,20 = 102,31 .
Eine explizite Arbitrage-Strategie zur Ausnutzung dieser Preisinkonsistenz bei den Puts und Calls ist daher:

Verkaufe je eine Aktie und eine Put-Option zur Zeit t = 0, Ergebnis: 102,50 € .
Kaufe gleichzeitig je einen Call und legt den Geldbetrag 99,11 = 100/1,009 zu 0,9% für ein Jahr an, der Aufwand ist: 102,31 € und deckt die Verpflichtungen zum Jahresende aus dem Verkauf der Aktie und der Put-Option. Die Differenz: 112,50 – 102,31 = 0,19 ist dann der Arbitragegewinn pro Position zum Jahresbeginn.

Block III (Maurer)

Aufgabe 8: Internationale Investments und Währungssicherung (20 Minuten)

Betrachten Sie eine Zwei-Länder-Welt mit Asset 1 aus Land 1 (Heimatland des Investors) und Asset 2 aus Land 2 (Ausland). Die erwarteten Ein-Perioden-Renditen μ_i sowie die zugehörigen Standardabweichungen σ_i (i = 1, 2) weisen die folgenden Werte auf:

$$\mu_1 = 0{,}05 \text{ bzw. } \sigma_1 = 0{,}2$$
$$\mu_2 = 0{,}1 \text{ bzw. } \sigma_2 = 0{,}3.$$

Ihnen steht im Folgenden keine risikolose Anlage zur Verfügung. Die Forwardprämie beträgt $f = 0\%$. Es werden folgende Bezeichnungen für die betrachtete Investmentperiode getroffen:

R_i := lokale Rendite des Wertpapiers i (i = 1, 2),
e_2 : = Wechselkursrendite zwischen Land 2 und Land 1.
Gegeben seien der Erwartungswert $\mu(e_2) = 0$ und die Standardabweichung $\sigma(e_2) = 0{,}1$ der Wechselkursrendite zwischen Land 2 und Land 1. Die Korrelationsmatrix ist gegeben durch:

	R_1	**R_2**	**e_2**
R_1	1	0	0
R_2		1	0,2
e_2			1

Hinweise:
- Führen Sie die folgenden Berechnungen aus der Sicht des inländischen Investors durch.
- Vernachlässigen Sie bei Ihren Berechnungen alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der (R_2e_2) Kreuzprodukte.
- Führen Sie alle Berechnungen mit 4 Nachkommastellen durch.

a) Bestimmen Sie die Portfoliogewichte und die Varianz der Rendite des Minimum-Varianz-Portfolios (MVP) aus den beiden Assets, wenn das Wechselkursrisiko der zweiten Aktie nicht abgesichert wird. **(5 Minuten)**
b) Sie wollen nun eine Währungssicherung des ursprünglichen Investitionsbetrages in das ausländische Asset mittels Devisenforwards durchführen. Bestimmen Sie die Portfoliogewichte und die Varianz der Rendite des MVP, wenn das Wechselkursrisiko des ausländischen Assets mit einer Hedge Ratio von 100% ($h = 1$) des ursprünglichen Investitionsbetrags abgesichert wird. **(5 Minuten)**
c) Sie wollen nun eine Währungssicherung mittels Devisenforwards im Kontext eines Currency Overlay durchführen, wobei die in a) ermittelten Portfoliogewichte fixiert sind. Bestimmen Sie die Hedge Ratio h, welche die Varianz der Portfoliorendite minimiert. Was ist die resultierende Rendite-Varianz dieses MVP?
Hinweis: Sollten Sie Aufgabe a) nicht gelöst habe, verwenden Sie als Portfoliogewicht in die erste Aktie 75% ($x = 0{,}75$) **(5 Minuten)**
d) Bestimmen Sie die Portfoliogewichte, die Hedge Ratio und die resultierende Rendite-Varianz für das MVP, wenn über Portfoliogewichte und Hedge Ratio simultan optimiert wird. **(5 Minuten)**

Lösungsskizze:

Varianzen lokale Renditen:

$$Var[R_1] = \sigma_1^2 = 0.2^2 = 0.04$$
$$Var[R_2] = \sigma_2^2 = 0.3^2 = 0.09$$

Wechselkurskovarianz und Gesamtrendite (Sicht europäischer Investor) zweite Aktie :

$$Cov[R_2, e] = \rho\ \sigma_2\sigma_e = 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.1 = 0.006$$

$$\begin{aligned} Var\left[R_2^{€}\right] &= Var[R_2 + e] = Var[R_2] + Var[e] + 2 \cdot Cov[R_2, e] \\ &= 0.09 + 0.01 + 2 \cdot 0.006 = 0.112 \end{aligned}$$

a) Da keine Korrelation zwischen inländischen und ausländischen Aktie besteht, ergibt sich die Varianz eines Portfolios aus beiden Aktien zu (x relatives Gewicht Aktie 1):

$$\begin{aligned} Var[R_{PF}] &= x^2\, Var[R_1] + (1-x)^2\, Var\left[R_2^{€}\right] \\ &= x^2 \cdot 0.04 + (1-x)^2 \cdot 0.112 \end{aligned}$$

Minimierung $\frac{d}{dx}(\dots) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= 2x\, Var[R_1] - 2(1-x) Var\left[R_2^{€}\right] \\ \Leftrightarrow x &= \frac{Var\left[R_2^{€}\right]}{Var[R_1] + Var\left[R_2^{€}\right]} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{0.112}{0.04 + 0.112} = 73.68\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[R_{MVP}] &= 0.7368^2 \cdot 0.04 + (1 - 0.7368)^2 \cdot 0.112 \\ &= 0.02947 \qquad (\rightarrow Std[R_{MVP}] = 17.17\%) \end{aligned}$$

b) Bei Absicherung h = 1 ergibt sich $Var[R_2^{h=1}] = Var[R_2 + e + h(f-e)] = Var(R_2 + f) = Var(R_2) = 0.3^2$. Gewichte MVP analog zu Aufgabe a)

$$x = \frac{Var[R_2^{h=1}]}{Var[R_1] + Var[R_2^{h=1}]} = \frac{0.3^2}{0.4^2 + 0.3^2} = 0.6923$$

$$Var[R_{MVP}] = 0.02769 \qquad (\rightarrow Std[R_{MVP}] = 16.64\%)$$

c)

$$\begin{aligned} R_2^{€,h} &= R_2 + e + h \cdot (f - e) \\ &= R_2 + (1-h) \cdot e + h \cdot f \end{aligned}$$

Da Forwardprämie f keine Zufallsvariable, ist Varianz der gehedgeten Rendite:

$$\begin{aligned} Var\left[R_2^{€,h}\right] &= Var[R_2] + Var[(1-h) \cdot e] + 2 \cdot Cov[R_2, (1-h) \cdot e] \\ &= 0.09 + (1-h)^2\, 0.01 + (1-h) \cdot 0.012 \end{aligned}$$

Minimierung$\frac{d}{dh}(\dots) = 0$:

$$0 = 0 - 2(1-h)\, 0.01 - 0.012$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{0.01 + 0.006}{0.01} = \frac{Var[e] + Cov[R_2, e]}{Var[e]} = 1.6$$

Benutzen wir die Portfoliogewichte aus a) und wenden diesen Währungshedge an (was eben einem *Currency Overlay* entspricht), so ergibt sich für die Varianz des MVP:

$$\begin{aligned} Var[R_{MVP}^{CO}] &= 0.7368^2 \cdot 0.04 + (1 - 0.7368)^2 \cdot 0.0864 \\ &= 0.0277 \qquad (\rightarrow Std[R_{MVP}^{CO}] = 16.64\%) \end{aligned}$$

d) Die Varianz eines Portfolios mit Währungshedge ist:

$$Var[R_{PF}] = x^2\, Var[R_1] + (1-x)^2\, Var\left[R_2^{€,h}\right]$$

wobei $Var\left[R_2^{€,h}\right] = Var[R_2] + (1-h)^2 \cdot Var[e] + 2\,(1-h) \cdot Cov[R_2, e]$

Bei simultaner Optimierung über x und h müssen folgende zwei Gleichungen gelten:

$$\frac{d}{dx}\, Var[R_{PF}] = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dh} Var[R_{PF}] = 0$$

Da $Var[R_1]$ unabhängig von der Hedgeratio, erhält man für die zweite Gleichung:

$$0 = 0 + (1-x)^2 \frac{d}{dh}\, Var\left[R_2^{€,h}\right]$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dh} Var\left[R_2^{€,h}\right]$$

Diese Gleichung ist unabhängig von x und wir können somit zuerst für die Hedgeratio lösen (wurde bereits in c) gelöst mit $h = 1.6$ und $Var\left[R_2^{h=1.6}\right] = 0.0864$). Im Gegensatz zum Currency Overlay aus c), verwenden wir nun diese Varianz um Portfoliogewichte zu bestimmen (Rechnung analog zu c):

$$\frac{d}{dx}\, Var[R_{PF}] = 0$$
$$\Leftrightarrow\ 0 = 2x\, Var[R_1] - 2(1-x) Var\left[R_2^{€,h=1.6}\right]$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{Var\left[R_2^{€,h=1.6}\right]}{Var[R_1] + Var\left[R_2^{€,h=1.6}\right]}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{0.0864}{0.04 + 0.0864}$$
$$\Leftrightarrow x = 68.35\%$$

Somit ergibt sich die Varianz für unser optimales MVP:

$$\begin{aligned} Var\left[R_{MVP}^{opt}\right] &= 0.6835^2 \cdot 0.04 + (1-0.6835)^2 \cdot 0.0864 \\ &= 0.02734 \qquad (\rightarrow Std\left[R_{MVP}^{opt}\right] = 16.54\%\,) \end{aligned}$$

Aufgabe 9: Devisenmärkte (20 Minuten)

a) Nehmen Sie an, dass zwischen den Devisenmärkten (Dreieck-)Arbitragemöglichkeiten nicht existieren. Ermitteln Sie die fehlenden Werte (A bis E) in der nachfolgenden Cross-Rates-Tabelle! **(5 Minuten)**

Währung	USD	EUR	GBP	YEN	SFR
USD	1	**B**	0,7459	**E**	**D**
EUR	**A**	1	0,8817	133,08	1,1449
GBP	1,3406	1,1342	1	150,92	1,2989
YEN*	**C**	0,7514	0,6626	1	0,8603
SFR	1,0318	0,8734	0,7696	116,24	1

*Yen: 100 Einheiten

Sie investieren 100 Mio. Euro in den schweizerischen Aktienmarkt repräsentiert durch den SMI (einem wichtigen Aktienindex). Der Investitionszeitraum beträgt ein Jahr. Der aktuelle Wechselkurs des Schweizer Franken zum Euro beträgt 1,1449 SFR/EUR und der SMI notiert heute bei 9.000 Punkten. Sie können den ursprünglichen Investitionsbetrag in Fremdwährung vollständig durch Devisenforwards (Laufzeit 1 Jahr) sichern, die arbitragefrei bewertet sind. Das Zinsniveau in der Schweiz liegt bei 0% p.a. und im Euroraum ebenfalls bei 0% p.a. Ein Jahr später notiert der Wechselkurs bei 1,0 SFR/EUR und der SMI steht bei 10.000 Punkten.

b) Berechnen Sie den heutigen fairen Forward Preis [EUR/SFR]. **(3 Minuten)**
c) Was ist der Wert des Investments (in Euro) nach einem Jahr **ohne** Wechselkurssicherung? **(6 Minuten)**
d) Was ist der Wert des Investments (in Euro) nach einem Jahr **mit** Wechselkurssicherung? **(6 Minuten)**

<u>Lösungsskizze:</u>

a) A = 1,1820; B = 0,8460; C = 0.8882; D = 0,9692; E = 112.59;

b) $F = S * \frac{1+r_{EU}}{1+r_{CH}} = 0.9734$
c) $V_1^{h=0} = \frac{V_0}{S_0} * \frac{SMI_1}{SMI_0} * S_1$=100 Mio. *1.1449*10000/9000 =127.21 Mio EUR
d) Gewinn aus Forward-Hedge = € 100 Mio. *1.1449*(0.8734-1) = € -14.49 Mio.
Wer Investment $V_1^{h=1} = 127.21 - 14.49 = € \, 112.72 \; Mio.$

<u>Aufgabe 10:</u> Entnahmepläne und Shortfallrisiken (20 Minuten)

Nach erfolgreicher Aktuar-Prüfung sind Sie in der Produktabteilung eines Pensionsfonds mit der Konstruktion von Auszahlplänen gegen Einmalbeitrag beschäftigt und erstellen Beispielrechnungen mit folgenden Annahmen. Der vom Kunden eingezahlte Betrag in Höhe von 200.000 Euro soll vollständig für den Erwerb von Immobilienfonds-Anteile (IF) verwendet werden. Es können beliebige Bruchteile eines Anteils zum jeweiligen Marktwert erworben/zurückgegeben werden. Der aktuelle Preis für einen Fondsanteil beträgt EUR 100. Bei Kauf wird ein Ausgabeaufschlag von 5% auf den Anteilspreis erhoben. Sie erwarten für die auf kontinuierlicher Basis berechneten jährlichen (Log-)Renditen R_t der IF-Anteile eine mittlere Rendite von 4% p.a., bei einer Rendite-Standardabweichung von 4% p.a. und einer Autokorrelation 1. Ordnung von $a = 0{,}6$. Unterstellen Sie im Folgenden für die Fondsanteile normalverteilte iid-(Log)-Renditen mit adjustierter Volatilität nach dem Blundell/Ward-Verfahren. Vernachlässigen Sie Sterblichkeitsaspekte und betrachten folgende Auszahlpläne:

a) <u>Auszahlungsplan mit variablen Entnahmen</u>: Zu Beginn jeden Jahres werden so viele Fondsanteile zurückgegeben, dass eine Auszahlung (B_t) an den Kunden in Höhe von 10% des zu Jahresbeginn jeweils noch vorhandenen Fondsvermögens (V_t) zustande kommt ($B_t = 0{,}1V_t$). Die erste Auszahlung erfolgt nach einem Jahr $t = 1$ ($B_0 = 0$). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach $t = 5$ bzw. $t = 20$ Jahren die Auszahlung geringer als 20.000 Euro ist? **(14 Minuten)**

b) <u>Auszahlungsplan mit festen Entnahmen</u>: Zu Beginn des Jahres werden so viele Fondsanteile zurückgegeben, dass eine Auszahlung an den Kunden in Höhe von (mög-

lichst) 20.000 Euro erreicht wird. Sie sind weiterhin an der Wahrscheinlichkeit interessiert, dass nach Ablauf von $t = 5$ bzw. $t = 20$ Jahren die Auszahlung geringer als 20.000 Euro ist.
Ist eine analytische Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeiten möglich? Im Vergleich zu Aufgabe a), sind die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten nach $t = 5$ bzw. $t = 20$ Jahren höher oder geringer?
(Anmerkung: Es sind keine expliziten Berechnungen nötig; geeignete Argumente genügen). **(6 Minuten)**

Hinweis:

Das Blundell/Ward-Verfahren korrigiert die Varianz gemäß: $\mathrm{VAR}(r_t^*) = \mathrm{VAR}(r_t)\dfrac{1-a^2}{(1-a)^2}$

Lösungsskizze:

a) Korrektur von STD (=v) der Einperioden-Logrendite (U_t) gemäß BW-Verfahren:

$$v = 4\% \cdot \sqrt{\frac{1-0{,}6^2}{(1-0{,}6)^2}} = 8\% \text{ damit Logrendite } U_t \sim N(4\%, 8\%)$$

Startvermögen $V_0 = \frac{€200{,}000}{1.05}$. Entwicklung des Fondsvermögens (t = 1, 2, …) mit $Z_t \sim N(0,1)$

$$V_t = 0.9^{t-1} * V_0 * e^{tm+v*\sqrt{t}*Z_t}$$

Entwicklung Auszahlungen $B_t = 0.1 * V_t$

$$B_5 = 0{,}1 * 0{,}9^4 * \frac{200.000}{1.05} * e^{0.04*5+0.08*\sqrt{5}*Z_t}$$

$$B_{20} = 0{,}1 * 0{,}9^{19} * \frac{200.000}{1.05} * e^{0.04*20+0.08*\sqrt{20}*Z_t}$$

$$P(B_5 < 20.000) = P(15.264.04 * e^{0.17889*Z_t} < 20.000) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{20.000}{15.264}\right)}{0{,}17889}\right)$$

$$= 93.45\%$$

$$P(B_{20} < 20.000) = P(5.726.43 * e^{0.35777*Z_t} < 20.000) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{20.000}{5.726.43}\right)}{0{,}35777}\right)$$

$$= 98.98\%$$

b) Die zeitliche Entwicklung des Fondsvermögen ergibt sich wie folgt

$$V_1 = \max(190.476{,}19 * \exp(U_1) - 20.000; 0)$$
$$V_2 = \max(V_1 * \exp(U_2) - 20.000; 0)$$
$$= \max[190.476{,}19 * \exp(U_1) * \exp(U_2) - 20.000 * \exp(U_2) - 20.000; 0]$$

Das Vermögen ergibt sich als Summe log-normalverteilter Zufallsvariablen deren Verteilung nicht bekannt ist. Die zeitliche Entwicklung der Auszahlungen ergibt sich

$$B_t = \min(20.000; V_t)$$

Damit kann auch die Verteilung von B_t nicht in geschlossener analytischer Form bestimmt werden. Insofern ist man auf numerische Verfahren, etwa Monte-Carlo Simulation angewiesen

Abschätzung Shortfallwahrscheinlichkeit: Ein Shortfall tritt erst dann ein, wenn das Fondsvermögen aufgebraucht (bzw. geringer als 20.000) ist. Das moderat riskant (Vola = 8%) angelegte Fondsvermögen von 190.476 (nach Kosten) wird mit hoher Wahrscheinlichkeit reichen, die Auszahlungen der ersten fünf Jahre i.H.v. 5 * 20.000 = 100.000 zu finanzieren. Die Shortfallwahrscheinlichkeit von Plan 2 ist daher geringer als von Plan 1. Über 20 Jahren müssen 400.000 finanzieren werden, was bei einem Startvermögen von 190.476, Drift von 4% und Entnahme von 10% kaum möglich ist. Das Fondsvermögen bei Plan 2 wird daher mit hoher Wahrscheinlichkeit völlig aufgebraucht sein. Insofern wird die Shortfall-Wahrscheinlichkeit weniger als 20.000 zu erhalten ähnlich hoch sein wie bei Plan 1 (in der sie bei fast 100% liegt).

Anhang

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung Φ(x)

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000