Prüfung DAV-Spezialwissen in Finanzmathematik 2017

Block I (Albrecht)

Aufgabe 1: (15 Minuten)

Bezeichnen Sie die heutige Spot Rate für eine Restlaufzeit von i Jahren mit r_i und notieren Sie deren wöchentliche Änderung mit ΔR_i. Nehmen Sie an, dass diese Änderungen für i=1,2 gemeinsam normalverteilt sind, wobei $E(\Delta R_i) = 0$ und $Var(\Delta R_i) = \sigma_i^2$. Verwenden Sie für die Korrelation der Spot Rate-Änderungen die Notation $\rho_{12} = \rho(\Delta R_1, \Delta R_2)$.

Betrachten Sie eine zweijährige Kuponanleihe mit einem Nominalwert in Höhe von N und Kuponzahlungen der Höhe Z.

a) Geben Sie einen formalen Ausdruck für den Barwert P_0 der Anleihe in t = 0 an und bestimmen Sie die absoluten Key Rate-Durationen KRD_1^A und KRD_2^A der Kuponanleihe bzgl. r_1 und r_2. **(6 min)**

b) Bestimmen Sie die Delta-Approximation der wöchentlichen Wertänderung der Kuponanleihe ΔP in Termen der absoluten Key Rate-Durationen. Verwenden Sie dabei r_1 und r_2 als Risikofaktoren. **(2 min)**

c) Berechnen Sie (formal) den Erwartungswert und die Varianz des gemäß b) approximierten Verlusts $L_P = -\Delta P$. **(6 min)**

d) Geben Sie nun eine formale Darstellung des Value at Risk zum Signifikanzniveau α für L_P an. **(1 min)**

Hinweis zu d): Setzen Sie den VaR einer normalverteilten Verlustvariable als bekannt voraus!

Lösungsskizze:

a) Der Barwert der Anleihe beträgt

$$P_0 = Z(1 + r_1)^{-1} + (Z + N)(1 + r_2)^{-2}.$$

Für die absoluten Key Rate-Durationen gilt

$$KRD_i^A = -\frac{\partial P_0}{\partial r_i}, \quad i = 1,2.$$

Konkret gilt im vorliegenden Fall

$$KRD_1^A = 1 \cdot Z \cdot (1 + r_1)^{-2},$$

$$KRD_2^A = 2 \cdot (Z + N) \cdot (1 + r_2)^{-3}.$$

b) Die Delta-Approximation lautet

$$\Delta P = \frac{\partial P_0}{\partial r_1} \Delta R_1 + \frac{\partial P_0}{\partial r_2} \Delta R_2$$

$$= -KRD_1^A\ \Delta R_1 - KRD_2^A\ \Delta R_2.$$

c) Für die Verlustapproximation gilt

$$L_P = KRD_1^A\ \Delta R_1 + KRD_2^A\ \Delta R_2.$$

Daraus folgt für den Erwartungswert

$$E[L_P] = KRD_1^A\ E[\Delta R_1] + KRD_2^A\ E[\Delta R_2] = 0.$$

Die Varianz berechnet sich gemäß

$$Var[L_P] = (KRD_1^A)^2\ \sigma_1^2 + (KRD_2^A)^2\ \sigma_2^2 + 2\ KRD_1^A\ KRD_2^A\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2\ .$$

d) Als Linearkombination gemeinsam normalverteilter Zufallsvariablen ist auch L_P normalverteilt und somit gilt

$$VaR_\alpha = N_{1-\alpha} \sqrt{Var\ [L_P]}\ .$$

Dabei bezeichnet $N_{1-\alpha}$ das $(1 - \alpha)$-Quantil der Standardnormalverteilung

<u>Aufgabe 2:</u> (15 Minuten)

Bestimmen Sie den Value at Risk zum Signifikanzniveau α über das Zeitintervall $[t, t+h]$ für eine Call-Position auf der Basis einer Delta-Exakt-Approximation unter der Annahme von Black/Scholes-Preisen. Unterstellen Sie dabei für die Log-Rendite U_h des Basisobjekts $U_h \sim N(0, v^2h)$!

<u>Hinweis:</u> Das Call-Delta ist gegeben durch $\Delta_C(t) = \Phi[d_1(t)]$.

<u>Lösungsskizze:</u>

Die Delta-Approximation bei Annahme von Black/Scholes-Preisen lautet (Hinweis)

$$\Delta C = \Phi[d_1(t)]\Delta S \quad \text{bzw.} \quad L_C = -\Delta C = -\Phi[d_1(t)] \cdot \Delta S$$

und damit lautet die Delta-Exakt-Approximation

$$L_C = -\Phi[d_1(t)]s_t\ \{\exp(U_h) - 1\}.$$

Die Funktion $f(u) = -\Phi[d_1(t)]\ s_t(e^u - 1)$ ist eine monoton fallende Funktion von u. Damit gilt aufgrund der Transformationseigenschaften von Quantilen

$$\begin{aligned} VaR_\alpha &= Q_{1-\alpha}(L_C) \\ &= -\Phi[d_1(t)]s_t\{\exp[Q_\alpha(U_h)] - 1\} \\ &= \Phi[d_1(t)]s_t\{1 - \exp[Q_\alpha(U_h)]\} \\ &= \Phi[d_1(t)]s_t\{1 - \exp[-N_{1-\alpha}v\sqrt{h}]\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 : **(10 Minuten)**

Weisen Sie nach, dass der Credit-VaR im Falle der LHP-Approximation gegeben ist durch

$$\mathrm{CrVaR} = \Phi\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\rho}}\left[\Phi^{-1}(\mathrm{PD}) + \sqrt{\rho}\, N_{1-\alpha}\right]\right\}.$$

Hinweis: Die Verteilungsfunktion der Vasicek-Verteilung ist gegeben durch

$$F_\infty(x) = \Phi\left\{\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left[\sqrt{1-\rho}\,\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(\mathrm{PD})\right]\right\}.$$

Lösungsskizze:

Zu zeigen ist $F_\infty(\mathrm{CrVaR}) = 1-\alpha$, wobei

$$\mathrm{CrVaR} = \Phi\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\rho}}\left[\Phi^{-1}(\mathrm{PD}) + \sqrt{\rho}\, N_{1-\alpha}\right]\right\}$$

und gemäß Hinweis

$$F_\infty(x) = \Phi\left\{\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left[\sqrt{1-\rho}\,\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(\mathrm{PD})\right]\right\}.$$

Es gilt

$$\Phi^{-1}(\mathrm{CrVaR}) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho}}\left[\Phi^{-1}(\mathrm{PD}) + \sqrt{\rho}\;\; N_{1-\alpha}\right]$$

und daher

$$\begin{aligned} F_\infty(\mathrm{CrVaR}) &= \Phi\left\{\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left[\Phi^{-1}(\mathrm{PD}) + \sqrt{\rho}\, N_{1-\alpha} - \Phi^{-1}(\mathrm{PD})\right]\right\} \\ &= \Phi(N_{1-\alpha}) = 1-\alpha\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 4 : **(20 Minuten)**

Betrachten Sie ein Portfolio aus zwei Krediten, dessen Verlustverteilung durch ein Einfaktor-Defaultmodell beschrieben wird. Die einperiodigen Verluste der Kredite betragen $L_1 = 250 \cdot D_1$ und $L_2 = 1000 \cdot D_2$, wobei D_1 und D_2 die Defaultindikatoren der Kredite bezeichnen. Deren Verteilung wird durch Bonitätsvariablen Y_i und Ausfallschranken H_i auf Basis von

$$D_i = 1 \Leftrightarrow Y_i < H_i \qquad \text{und} \qquad D_i = 0 \Leftrightarrow Y_i \geq H_i$$

für i=1,2 bestimmt. Die Bonitätsvariablen werden durch

$$Y_1 = \sqrt{\rho}\, F + \sqrt{1-\rho}\, U_1 \text{ und } Y_2 = \sqrt{\rho}\, F + \sqrt{1-\rho}\, U_2$$

mit $\rho = 0.64$ modelliert, wobei F, U_1, U_2 unabhängig und standardnormalverteilt sind. Für die individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten gilt $P(D_1 = 1) = 2\%$ und $P(D_2 = 1) = 4\%$.

a) Bestimmen Sie den erwarteten Portfolioverlust, d.h. den Erwartungswert von $L = L_1 + L_2$. **(2 min)**
b) Berechnen Sie die Ausfallschranken H_1 und H_2 sowie die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit der beiden Kredite. **(7 min)**
c) Bestimmen Sie die auf F = -1.4 bedingten *individuellen* Ausfallwahrscheinlichkeiten. **(8 min)**
d) Bestimmen Sie die auf F = -1.4 bedingte *gemeinsame* Ausfallwahrscheinlichkeit der beiden Kredite. **(3 min)**

Hinweise:

1) Aus den dargestellten Annahmen lässt sich folgern, dass Y_1 und Y_2 gemeinsam normalverteilt sind, wobei $E(Y_1) = E(Y_2) = 0$, $Var(Y_1) = Var(Y_2) = 1$ und $\rho(Y_1, Y_2) = \rho$.
2) Approximativ gilt für die univariate Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung (nicht alle Werte werden benötigt)

$$\Phi(-2.05) = 0.02 \qquad \Phi(-1.75) = 0.04 \qquad \Phi(-1.55) = 0.06$$

$$\Phi(-1.05) = 0.15 \qquad \Phi(-0.12) = 0.45.$$

3) Für die Verteilungsfunktion der zweidimensionalen Standardnormalverteilung mit dem Korrelationsparameter $\rho = 0.64$ gilt $\Phi_2(-2.05, -1.75; \rho) = 0.008$.

Lösungsskizze:

a) Für den erwarteten Verlust gilt

$$\begin{aligned} E(L) &= E(L_1 + L_2) \\ &= 250 \cdot E(D_1) + 1000 \cdot E(D_2) \\ &= 250 \cdot P(D_1 = 1) + 1000 \cdot P(D_2 = 1) \\ &= 250 \cdot 0,02 + 1000 \cdot 0,04 = 45. \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass

$$E(D_1) = 1 \cdot P(D_i = 1) + 0 \cdot P(D_i = 0) = P(D_i = 1).$$

b) Für die individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten gilt

$$P(D_i = 1) = P(Y_i < H_i) = P(Y_i \le H_i) = \Phi_1(H_i),$$

wobei wir im letzten Schritt Hinweis 1) verwenden. Somit müssen

$$\Phi_1(H_1) = 0,02 \qquad \text{und} \qquad \Phi_1(H_2) = 0,04$$

gelten, was mit Hinweis 2) zu

$$H_1 = -2,05 \qquad \text{und} \qquad H_2 = -1,75$$

führt. Aus der Definition der D_i und mit Hinweis 1) erhalten wir für die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit

$$P(D_1 = 1, D_2 = 1) = P(Y_1 < H_1, Y_2 < H_2)$$
$$= \Phi_2(H_1, H_2; \rho)$$
$$= \Phi_2(-2{,}05\ , -1{,}75; \rho) = 0{,}008.$$

Dabei wird im letzten Schritt Hinweis 3) verwendet.

c) Für die bedingten individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten gilt

$$P(D_i = 1|F = -1{,}4) = P(Y_i < H_i|F = -1{,}4)$$
$$= P\left(\sqrt{\rho}\, F + \sqrt{1-\rho}\, U_i\middle|F = -1{,}4\right)$$
$$= P(-0{,}8 \cdot 1{,}4 + 0{,}6 \cdot U_i < H_i)$$
$$= \Phi\left(\frac{H_i + 1{,}2}{0{,}6}\right),$$

da $U_i \sim N(0{,}1)$.

Hieraus resultiert gemäß Hinweis 2)

$$P(D_1 = 1|F = -1{,}4) = \Phi\left(\frac{-2{,}05 + 1{,}12}{0{,}6}\right) = \Phi(-1{,}55) = 0{,}06$$

$$P(D_2 = 1|F = -1{,}4) = \Phi\left(\frac{-1{,}75 + 1{,}12}{0{,}6}\right) = \Phi(-1{,}05) = 0{,}15$$

d) Für die bedingte gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit folgt analog (man beachte die Unabhängigkeit von U_1 und U_2):

$$P(D_1 = 1, D_2 = 1|F = -1{,}4)$$
$$= P(U_1 < -1{,}55, U_2 < -1{,}05)$$
$$= P(U_1 < -1{,}55)\, P(U_2 < -1{,}05)$$
$$= 0{,}06 \cdot 0{,}015 = 0{,}009$$

<u>Block II</u> (Bartels)

<u>Aufgabe 5:</u> (30 Minuten)

Bei der Konstruktion einer aktienindexgebundenen Lebensversicherung geht der Aktuar von einem Kapitalmarkt aus, der exakt den Voraussetzungen des Black-Scholes-Modells entspricht:

Neben einer konstanten exponentiellen Zinsrate r für eine risikolose Anlage: d B(t) = r B(t) dt mit r = 0.02 gibt es einen Indexfonds S(t) , der einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt:

(*) d S(t) = μ S(t) dt + v S(t) d w(t) , 0 $\leq$ t $\leq$ T , mit μ = 0.05 und v = 0.20.

Es wird eine Versicherung gegen Einmalbeitrag in Höhe von € 10 000.- abgeschlossen, die Dauer der Versicherung beträgt 12 Jahre. Neben dem Kapitalerhalt wird zusätzlich eine Gewinnbeteiligung G geboten, die bezogen auf den Betrag von € 9500.- fünfzig Prozent der jährlichen Steigerungen des Indexes am Ende der Vertragslaufzeit T vorsehen: G $\cdot$ 9500 = $0.5 \cdot \sum_{t=1}^{T} (\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1)^{+} \cdot 9500$.

An der Terminbörse werden europäische Put- und Call-Optionen gehandelt, die exakt dem Black-Scholes-Preis entsprechen, d.h. etwa für den Preis eines Calls zum Zeitpunkt t mit Ausübungsdatum T und Ausübungspreis K:

C = $S(t)N(d_1) - K \cdot e^{-r(T-t)}N(d_2)$ mit N: Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung, und

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S(t)}{K}) + (r + \frac{v^2}{2})(T-t)}{v \cdot \sqrt{T-t}} \text{ sowie } d_2 = \frac{\log(\frac{S(t)}{K}) + (r - \frac{v^2}{2})(T-t)}{v \cdot \sqrt{T-t}}.$$

Die zwölfjährige Erlebensfallwahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung von Storno ${}_{12}p_x^s$ betrage 0.61. Der aktuelle Wert der Gewinnbeteiligung G in Zeit t= 0 berechnet sich dann zu

exp (-rT) E*[G] ,

wobei der Stern am Erwartungswert bedeutet, dass zur Berechnung des Erwartungswertes das äquivalente Martingalmaß benutzt wird.

(i) Man berechne mit Hilfe der Black-Scholes-Formel exp (-rT) E*[G]. **(15 Minuten)**

<u>Hinweis:</u> Man benutze ohne Beweis, d.h. eigene Berechnung, dass der Wert C(1,1) einer Europäischen Call-Option mit Ausübungszeitpunkt 1, Ausübungspreis 1 und Preis 1 in t = 0 des zugrundeliegenden Basispapiers sich nach Black-Scholes zu 0.2803 berechnet.

(ii) Wie lässt sich die endfällige Verpflichtung zu Beginn der Versicherung kongruent decken, wenn man während der Versicherungsdauer keine garantierten Rückkaufswerte vorsieht und man bei der Biometrie von der genannten Erlebensfallwahrscheinlichkeit ausgeht? Ist das genannte Leistungsbild dieser Police überhaupt darstellbar? **(10 Minuten)**

(iii) Man nenne wenigstens drei Aspekte, die die Anwendbarkeit des zugrundeliegenden Modells ohnehin für die Praxis fragwürdig erscheinen lassen. **(5 Minuten)**

<u>Lösungsskizze:</u>

Nach Übergang zu dem Martingalmaß schreibt sich die Dynamik des Indexfonds S(t) folgendermaßen:

d S(t) = r S(t) dt + v S(t) d w*(t) , 0 $\leq$ t $\leq$ T , mit einer Brownschen Bewegung w* unter dem neuen Maß. Lösung dieser Differentialgleichung ist

$S(t) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{1}{2} v^2\right) t + v\, w^*(t)\right)$, und damit lassen sich die Quotienten S(t)/S(t-1) berechnen.

Es ist $\exp(-rT)\, E^*\left[i(p) \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1\right)^+ \right] =$

$= i(p) \exp(-rT) \sum_{t=1}^{T} E^*\left[\left(\exp\left(\left(r - \frac{1}{2} v^2\right) + v\, w^*(1)\right) - 1\right)^+ \right]$, da $w^*(t) - w^*(t-1)$ und $w^*(1)$ gleich verteilt sind. Andererseits ist $E^*\left[\left(\exp\left(\left(r - \frac{1}{2} v^2\right) + v\, w^*(1)\right) - 1\right)^+ \right]$ bis auf den Faktor e^{-r} gerade der Black-Scholes-Preis C(1,1) einer Europäischen Call Option mit Ausübungszeitpunkt 1 , Ausübungspreis 1 und momentanem Preis 1 des zugrundeliegenden Basispapiers. Damit folgt dann:

(*) $\exp(-rT)\, E^*[G] = i(p) \exp(-rT)\, T \exp(r)\, C(1,1) = i(p) \exp(-r(T-1))\, T\, C(1,1)$.

Die explizite Black-Scholes-Formel ergibt für C(1,1) wie angegeben hier den Wert 0.2803 , so dass sich für die Gleichung (*) wegen $i(p) \cdot \exp(-r(T-1)) \cdot 12 = 0.5 \cdot 0.802518798 \cdot 12 = 4.815113$ insgesamt der Wert 1.34968 ergibt.

Dies hat man noch mit dem Referenzwert 9500 und der Erlebensfallwahrscheinlichkeit von 0.61 zu multiplizieren, also € 7821.37.

(ii) Die kongruente Deckung erfordert zunächst einmal die Sicherung des gezahlten Einmalbeitrags, also unter Berücksichtigung der Erlebenswahrscheinlichkeit von 0.61 , den Betrag $0.61 \cdot \exp(-0.02 \cdot 12) \cdot 10\,000 = 0.61 \cdot 0.78662786 \cdot 10\,000 = 4798.30$, der zum sicheren Zins anzulegen ist.

Darüber hinaus hat man den in (i) berechneten Betrag für den Kauf der Cliquet-Optionen, die das Gewinnversprechen abbilden, zu reservieren. Dabei hat man dann wieder die Erlebensfallwahrscheinlichkeit von 0.61 berücksichtigen, so dass sich insgesamt ein Aufwand von € 12619.67 ergibt.

Damit ergibt sich, dass unter den gemachten Annahmen dieser Tarif so nicht darstellbar ist, d.h. man hat eine deutlich niedrigere Indexpartizipation vorzusehen.

(iii) Fragwürdig sind u.a. folgende Modellannahmen:

- die Annahme von konstanten Volatilitäten über so einen langen Zeitrahmen,
- die exakten Black-Scholes Preise für Call-Optionen sind ohne Kostenaufschläge auch nicht zu haben,
- eine konstante Zinsrate über 12 Jahre ist ebenso unrealistisch wie die Normalverteilungsannahmen des Black-Scholes Modells.

Aufgabe 6 : (20 Minuten)

Der Vermögensanleger eines Versicherungsunternehmens verfolgt kontinuierlich eine Anlagestrategie, die 5% Anteile des Gesamtvermögens in einen Aktienfonds und komplementär 95% Anteile des Anlagevermögens in einen risikolosen Geldmarktfonds investiert.
Der Preisprozess $\{S_t | 0 \le t \le T\}$ des genannten Aktienfonds folge einer geometrischen Brownschen Bewegung, etwa $S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{v^2}{2})t + vW_t}$ mit einem Drift μ =0.04 und v =0.2.
Der risikolose Geldmarktfonds entwickelt sich kontinuierlich mit einer festen exponentiellen Zinsrate r weiter, etwa: $B_t = B_0 \cdot e^{r\,t}$, so dass der Aufzinsungsfaktor in einem Jahr e^r = 1.01 beträgt, d.h. der Zinssatz für ein Jahr ist 1.0%. Man unterstellt, dass in einem zeitstetigen Modell idealisiert diese kontinuierliche Anlagestrategie mit den anvisierten proportionalen Anteilen wirklich möglich ist, so dass der Wert des Gesamtvermögens V(t) zur Zeit t sich bei einem Anfangsvermögen von 1 so darstellt: $V(t) = \exp((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2})t + bv \cdot W_t)$.

(i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei diesen Modellannahmen in einem Jahr mindestens einen Zins von 0.9 % erwirtschaftet? Man gebe explizite numerische Werte an mit der beigefügten Tabelle der Normalverteilung! **(15 Minuten)**

(ii) Wie hoch ist der Erwartungswert E[V(1)]? (**5 Minuten**)

Lösungsskizze:

Zu (i):

Man definiere r_G durch 1.009 = exp(r_G), d.h. r_G = 0.00895974…, dann ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(V(1) \ge e^{r_G \cdot 1}) = P(\exp((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}) + bv \cdot W_1) \ge e^{r_G}) =$$

$$= P(((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}) + bv \cdot W_1) \ge r_G) = P(W_1 \ge \frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b \cdot v}) =$$

$$1 - N(\frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b \cdot v}),$$

wenn wie üblich N(.) die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist.
Nun ist r = log(1.01) = 0.00995033.. und damit ergeben sich bei den hier vorliegenden numerischen Daten:

$$(\frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b \cdot v}) = \frac{0.00895974 - (0.05 \cdot 0.04 + 0.95 \cdot 0.00995033 - 0.00005}{0.01} \approx$$

- 0.24430… und daher berechnet sich wegen N(-0.2443) = 0.4035 die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu etwa 59,65 % .

Zu (ii):

Es ist E[V(1)] = E[$\exp((b\mu+(1-b)r-\frac{b^2v^2}{2})1+bv\cdot W_1)$] = E[$\exp((b\mu+(1-b)r)$] =

$\exp(b\mu+(1-b)r)$ unter Beachtung von E[$\exp(-\frac{b^2v^2}{2}t+b\nu W_t)$]= 1, und damit berechnet sich E[V(1)] wegen exp(0.0149) = 1.015 hier konkret zu : exp(0.05 *0.04+0.95*0.00995033)= exp (0.011452813) = 1.011518….

<u>Aufgabe 7 :</u> (10 Minuten)

In der Hoffnung, die Durchschnittsverzinsung des Kapitalanlagebestandes auf einem hohen Niveau zu halten, kauft der Vermögensanleger eines Versicherungsunternehmens VU zu Jahresbeginn 10 000 Aktien eines Unternehmens U zum aktuellen Börsenpreis von 40 Euro. An der Terminbörse werden Optionen gehandelt, unter anderem auch europäische Put-Optionen auf Aktien des Unternehmens U zu verschiedenen Ausübungspreisen und Ausübungszeitpunkten an zu Preisen gemäß folgender Tabelle:

Basispreis \ Ausübungstermin	**30.6.**	**30.9.**	**31.12.**
38	0.77	1.54	2.50
40	1.78	2.61	3.44
42	1.96	3.11	3.58
44	2.02	3.25	3.75

Der aktuelle Zins am Markt beträgt 2.75% p.a. für einjährige Kapitalanlagen.

(i) Wie kann der Vermögensanleger des Versicherungsunternehmens die Anlage von 10 000 Aktien des Unternehmens U so absichern, dass der Wert der Geldanlage 10 000 * 40 Euro zum Zeitpunkt des Bilanzstichtags 31.12. nicht unter 95% des Anfangsanlagebetrages fällt?
Welche "Versicherungsprämie" hat er für diese Portfolio-Absicherung zu entrichten? **(3 Minuten)**

(ii) Um die Kosten dieser Absicherung zu senken, verkauft er pro gekaufter Aktie zeitgleich einjährige Calls auf diese mit einem Ausübungspreis von 44 Euro. Welche zusätzliche Prämie erhält er dafür, wenn die Put-Call-Parität erfüllt ist? **(4 Minuten)**

(iii) Was ist das maximale bzw. minimale Jahresendergebnis aus dieser Anlagestrategie?

(3 Minuten)

(Anmerkung: Der Einfachheit halber werden Transaktionskosten und eventuell anfallende Dividenden unberücksichtigt gelassen)

Lösungsskizze:

Zu (i):

10 000 Put-Optionen zum Ausübungstag 31.12. und Ausübungspreis 38 (= 0,95∗40) sichern die Kapitalanlage so ab, dass zum 31.12. der Wert von 380 000 Euro für das Versicherungsunternehmen nicht unterschritten wird.
Als "Versicherungsprämie" für diese Art der Portfolio-Absicherung ist also der Kaufpreis dieser 10 000 Put-Optionen zu entrichten, das sind 25 000 Euro.

Zu (ii):
Der Preis der Calls C zum Ausübungspreis 44 berechnet sich mit der die Put-Call-Relation: P(S,t) + S(t) = exp[-r(T-t)] K + C(S,t), mit den hier vorliegenden numerischen Daten also C = 3,75 + 40 - 44/1.0275 = 0.927616 und daraus ergibt sich als Einnahme aus dem Verkauf der Call-Optionen insgesamt der Betrag von € 9278.16, insgesamt hat man also 425 000 - 9278.16 = 415721.84 investiert.

Zu (iii):

Zu den möglichen Jahresergebnissen: Fällt der Aktienpreis unter € 38, so behält man wegen der Absicherung durch die Put-Optionen noch € 380 000.-. Bei einer positiven Aktienkursentwicklung wird allerdings durch den Verkauf der Call-Optionen das Jahresergebnis nach oben „gedeckelt“: Geht der Kurs über € 44, so behält man als Gesamtergebnis auch nur € 440 000.- , da die Put-Optionen nichts mehr wert sind und die Käufer der Call-Optionen ihr Kaufrecht wahrnehmen. Immerhin ergibt das auf den investierten Gesamtbetrag noch eine Rendite von 5,84% .

Block III (Maurer)

Aufgabe 8: Internationales Investment (15 Minuten)

Sie sind ein europäischer Investor. Der risikolose diskrete Zins in der Eurozone beträgt $r_{eu} = 0\%$ p.a. Der risikolose diskrete Zins im US-Dollarraum beträgt $r_{us} = 2\%$ p.a. Der Wechselkurs (Preisnotierung) liegt aktuell bei $S = 0{,}80\ \frac{€}{\$}$.

a) Berechnen Sie den arbitragefreien Forwardkurs F und die Forwardprämie f für einen Devisenforward mit Laufzeit 1 Jahr. **(3 Minuten)**
b) Sie wollen in die amerikanische Aktie Goopple investieren. Die (US-)Rendite R von Goopple und die Wechselkursrendite e haben folgende (Ko)Varianzen: $Var(R) = 0{,}0196$; $Var(e) = 0{,}0025$; $Cov(R,e) = 0{,}0010$.
Sie wollen Ihr Investment durch einen einjährigen Währungsforward absichern. Leiten Sie die Hedgeratio h her, welche die Varianz der Gesamtrendite $R^{€,h}$ minimiert!
Hinweis: Vernachlässigen Sie Kreuzproduktterme. **(4 Minuten)**

c) Sie investieren insgesamt 100.000€ in Goopple und gehen den in b) errechneten Währungshedge ein (falls Sie b) nicht bearbeitet haben, benutzen Sie $h = 1$). Welchen Gewinn/Verlust erzielen Sie allein aus dem Währungshedge, wenn der Wechselkurs nach einem Jahr auf $S_1 = 0{,}88\ \frac{€}{\$}$ steigt? **(4 Minuten)**

d) Innerhalb des Jahres steigt auch der Kurs von Goopple von $P_0 = 100\$$ auf $P_1 = 120\$$. Welchen Gewinn erzielen Sie mit dem Investment insgesamt? **(4 Minuten)**

<u>Lösungsskizze:</u>

a) $FF = \frac{0{,}8}{1{,}02} = 0{,}7843\,\frac{EUR}{USD}; f = -0{,}0196$

b) $Var(R + e + h(f - e) \to h^{min} = 1{,}4$

c) Gewinn Forward: $100.000 * h * (f - e) = 100.000 * 1{,}4 * (-0{,}0196 - 0{,}1) = -16.744$

d) Gewinn Aktie: $100.000 * (R + e + R * e) = 100.000 * (0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}02) = 32.000$

Gesamtgewinn: 32.000-16.744 = 15.256

<u>Aufgabe 9:</u> Schätzrisiken und Internationale Asset Allokation (30 Minuten)

Einem im Euroraum ansässigen Investor stehen drei Assets (i = 0, 1, 2) zur Verfügung: (i) eine risikolose Geldmarktanlage im Euroraum mit Rendite von $r_0 = 0{,}02$, (ii) inländische Aktien (repräsentiert durch einen breiten Marktindex) mit Rendite R_1 und (iii) ausländische Aktien im Dollarraum mit (lokaler) Rendite R_2 und Wechselkursrendite e. Die Volatilität der inländischen Aktien beträgt $\sigma_1 = Std[R_1] = 0{,}15$, die Volatilität der lokalen Rendite der ausländischen Aktien ist $\sigma_2 = Std[R_2] = 0{,}25$ und die Volatilität der Wechselkursrendite ist $\sigma_e = Std[e] = 0{,}07$. Die Schätzwerte für die erwarteten Renditen betragen $\mu(R_1) = 0{,}1$; $\mu(R_2) = 0{,}15$; $\mu(e_2) = 0$. Alle Renditen sind unkorreliert zueinander, d.h. $\rho(R_1, e) = \rho(R_1, R_2) = \rho(R_2, e) = 0$.

Gemäß seiner Zielfunktion möchte der Investor die erwartete Rendite eines Portfolios aus den drei Assets maximieren unter der Shortfall-Nebenbedingung, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% eine Mindestrendite von 0% erzielt wird.

<u>Hinweise:</u> Gehen Sie bei allen Rechnungen davon aus, dass die Kreuzproduktterme bei der Gesamtrendite verschwinden, dass also gilt: $R_2^{€} = R_2 + e$. Unterstellen Sie normalverteilte Renditen und beachten die Tabelle zur Standardnormalverteilung im Anhang.

a) Der Investor ist zunächst äußerst misstrauisch gegenüber den Schätzwerten für die erwarteten Renditen der beiden riskanten Anlagen. Er korrigiert daher diese Schätzwerte gemäß dem Bayes-Stein-Verfahren mit einem „Schrumpfungsfaktor“ ω = 1 (hin zum MVP aus den zwei riskanten Assets). Welche Struktur (relative Investitionsgewichte der drei Assets), welche Standardabweichung und welche erwartete Rendite besitzt das Portfolio, das die obige Shortfall-Nebenbedingung erfüllt, und die erwartete Portfoliorendite maximiert. **(10 Minuten)**

b) Nach eingehenden Beratungen mit der Research-Abteilung findet der Investor nunmehr vollständiges Vertrauen in die angegebenen Schätzwerte für die erwarteten Renditen. Welche Auswirkungen hat die neue Situation auf die optimale Portfolioallokation? **(10 Minuten)**

c) Der Zinssatz für die risikolose Anlage im Euroraum reduziert sich aufgrund einer überraschenden Änderung der Geldpolitik der Europäischen Zentralbank auf $r_0 = -0{,}005$. Der Investor wird daraufhin wieder äußerst misstrauisch gegenüber den geschätzten erwarteten Renditen und korrigiert diese nach dem Bayes-Stein-Verfahren hin zum MVP (ω = 1). Weiterhin beschließt er, Währungsrisiken bei ausländischen Anlagen vollständig durch (arbitragefrei bewertete) Devisenforwards abzusichern, wobei der risikolose Zinssatz im Dollarraum ebenfalls -0,5% beträgt. Welche Auswirkungen hat die neue Situation auf die optimale Portfolioallokation? **(10 Minuten)**

<u>Lösungsskizze:</u>

a) Shortfallgerade: $\mu = 1{,}65 * \sigma$
MVP (= Tangentialportfolio $\omega = 1$) aus riskanten Assets fällt mit effizienten Rand aus riskanten Asset zusammen, wobei $x = 0{,}7497$; σ_{MVP}=12,99%; $\mu_{MVP} = 11{,}25\%$.
MVP hält Shortfall-NB nicht ein, daher Mischung MVP mit risikolosem Asset nötig.
Effizienzlinie mit risikolosem Asset $(1-a)r + a\mu_{MVP}$.
Gleichsetzen mit Shortfallgerade $(1-a) * 0{,}02 + a * 0{,}1125 = 1{,}65 * 0{,}1299 * a$
$a = 16{,}42\%$ in riskante Assets (12,31% in Asset 1 und 4,11% in Asset 2) sowie $1 - a$ = 83,58% in risikolose Anlage

b) Der effiziente Rand aus riskanten Assets fällt nunmehr nicht mit dem MVP aus riskanten Assets zusammen. Allerdings verläuft der neue effiziente Rand aus den beiden riskanten Assets mit $\mu = 0{,}1125 + \sqrt{0{,}0278(\sigma^2 - 0{,}011)}$ sehr flach und mit geringer Krümmung. Das neue Tangentialportfolio aus risikoloser Anlage $r_0 = 0{,}02$ und diesem effizienten Rand wird damit sehr ähnlich mit dem MVP sein. Insofern ergeben sich (nahezu) keine Änderungen der Asset Allokation im Vergleich zu Aufgabe a).

c) Forwardprämie bei identischen Zinssätzen ergibt $f = 0$; Hedgeratio $h = 1$,
Für neues MVP folgt $x = 73{,}53\%$ σ_{MVP}=12,86%; $\mu_{MVP} = 11{,}32\%$
Gleichsetzen neue Effizienzlinie mit Shortfallgerade $(1-a) * 0{,}02 + a * 0{,}1132 = 1{,}65 * 0{,}1286 * a$
$a = 16{,}81\%$ in riskante Assets (12,36% in Asset 1 und 4,45% in Asset 2) sowie $1 - a$ = 83,19% in risikolose Anlage

<u>Aufgabe 10:</u> Immobilieninvestments (15 Minuten)

Ein Lebensversicherungsunternehmen möchte Teile seines Sicherungsvermögens in Immobilienspezialfonds investieren. Die Auswertung historischer Zeitreihen der jährlich auf kontinuierlicher Basis berechneten (Log-)Renditen ergibt für die mittlere Rendite μ(R) = 5%, die Volatilität σ(R) = 5% und die Autokorrelation 1. Ordnung AR(1) = 0,6. Unterstellen Sie im Folgenden normalverteilte iid-Renditen mit adjustierter Volatilität nach dem Blundell/Ward-Verfahren. Bei Kauf fallen Transaktionskosten in Höhe von 5% des Kaufpreises an und bei Verkauf fallen Transaktionskosten in Höhe von 2% des Verkaufspreises an.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das anfänglich investierte Kapital (inkl. Transaktionskosten) nach Ablauf von t = 1 bzw. t = 25 Jahren mindestens mit einer (kontinuierlichen) Rendite von 1% p.a. verzinst hat? **(9 Minuten)**

b) Welche Unterschiede gibt es zwischen einem Offenen Immobilienfonds und einem REIT? **(6 Minuten)**

Hinweis: Das Blundell/Ward-Verfahren korrigiert die Varianz gemäß:

$$\mathrm{VAR}(r_t^*) = \mathrm{VAR}(r_t)\,\frac{1-a^2}{(1-a)^2}.$$

Lösungsskizze:

a) Vola-Adjustierung nach BW-Verfahren $\sigma_{adj} = 10\%$.
Für kumulierte Logrendite bis T nach Transaktionskosten i.H.v. 100a% = 5% des Kaufpreises und 100b% = 2% des Verkaufspreises gilt:

$$r_{0,T}^{TK} = r_{0,T} + \ln(1-b) - \ln(1+a) \sim N[T\mu + \ln(1-b) - \ln(1+a), \sqrt{T}\sigma]$$

Bei einer kontinuierlichen Zielrendite von z = 1% per annum resultiert für die kumulierte Zielrendite Tz

$$\rightarrow 1 - SW = 1 - \Phi\left(\frac{Tz - [T\mu + \ln(1-b) - \ln(1+a)]}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Für T = 1 resultiert $1 - SW = 1 - \Phi(0{,}29) = 38{,}59\%$
Für T = 25 resultiert $1 - SW = 1 - \Phi(-1{,}86) = 96{,}86\%$

b) OIF: Variables Kapitel, Ausgabe und Rückgabe von Anteilen via Sondervermögen zum NAV (Kündigungs- und Mindesthaltefristen), Immobilienbewertung durch Gutachter, reguliert gemäß Kapitalanlagengesetzbuch, überwacht von BaFin, steuerliche Behandlung, Börsenhandel von Anteilen möglich, Aussetzung Rückgabe von Anteilen bei Fonds Runs möglich.
REIT (Real Estate Investment Trust): Aktiengesellschaft mit Schwerpunkt im Immobilienbereich (Bestandshalter, Projektentwicklung), konstantes Kapital, Kauf/Verkauf von Anteil über Börse, teilweise spezielle steuerliche Behandlung, Ausschüttungsregeln, keine Überwachung durch BaFin und keine speziellen Anlegerschutzvorschriften.