Prüfung Finanzmathematik und Investmentmanagement 2013

Aufgabe 1: (25 Minuten)

a) Weisen Sie nach, dass für eine Rendite R mit Verteilungsfunktion F und Dichtefunktion f die Restriktion

$$P(R \leq z) = \varepsilon$$

für die Shortfallwahrscheinlichkeit äquivalent ist zu der Bedingung

$$z = F_{\varepsilon},$$

wobei F_{ε} das ε-Quantil von F bezeichne. (2 min)

Hinweis: Wenn F eine Dichtefunktion besitzt, dann sind die Quantile von F jeweils eindeutig.

b) Nehmen Sie nun an, dass R normalverteilt ist, $R \sim N(\mu, \sigma^2)$. Weisen Sie nach, dass in diesem Falle die Shortfallrestriktion

$$P(R \leq z) = \varepsilon$$

äquivalent ist zu

$$\mu = z + N_{1-\varepsilon}\, \sigma ,$$

wobei $N_{1-\varepsilon}$ das (1–ε)-Quantil der Standardnormalverteilung bezeichne. (3 min)

Hinweis: $N_{\varepsilon} = -N_{1-\varepsilon}$.

c) Auf der Grundlage einer Lagrange-Optimierung ergibt sich die folgende funktionale Form für die Koordinaten des effizienten Rands:

$$\mu = 0.05 + \sqrt{0.6\ (\sigma^2 - 0.001)}\ .$$

Als Shortfallrestriktion sei die Bedingung

$$P(R_P \leq 0) \leq 0.1$$

gefordert, wobei R_P die einperiodige Portfoliorendite bezeichne. R_P folge einer Normalverteilung.

Bestimmen Sie unter diesen Voraussetzungen die (μ, σ)-Position des optimalen Portfolios mit maximaler erwarteter Rendite! (6 min)

Hinweis: $N_{0.90} = 1.28$

d) Gehen Sie nun davon aus, dass in der Situation der Teilaufgabe c) zusätzlich ein risikoloses Investment existiert. Wie hoch muss der zugehörige risikolose Zins sein, damit das in Aufgabenteil c) ermittelte Portfolio unverändert das optimale Portfolio ist?

(10 min)

Hinweis: Sollten Sie Teilaufgabe c) nicht gelöst haben, so gehen Sie davon aus, dass die Shortfallgerade die Kurve der Minimum-Varianz-Portfolios in den Punkten $\sigma_1 = 0.03$ und $\sigma_2 = 0.09$ schneidet.

e) Betrachten Sie einen Aktienindex, dessen Rendite R_I sich als lineare Aggregation $R_I = \sum_{i=1}^{n} a_i \; R_i$ der Renditen R_i von n Einzelaktien (i = 1, ..., n) darstellen lässt. Beweisen Sie:

$$\sigma(R_I) = \sum_{i=1}^{n} a_i \rho(R_i, R_I) \; \sigma(R_i) .$$

(4 min)

Lösungsskizze:

a) Definition des ε-Quantils

$$P(R \le F_\varepsilon) = \varepsilon .$$

Bedingung an z:

$$P(R \le z) = \varepsilon .$$

Aufgrund der Eindeutigkeit (vgl. Hinweis) des ε-Quantils folgt hieraus:

$$z = F_\varepsilon .$$

b) Bedingung:

$$P(R \le z) = \varepsilon .$$

Äquivalent:

$$P\left(\frac{R-\mu}{\sigma} \le \frac{z-\mu}{\sigma}\right).$$

Dabei ist $X = (R-\mu)/\sigma$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Aufgrund von a) und dem Hinweis gilt

$$\frac{z-\mu}{\sigma} = N_\varepsilon = -N_{1-\varepsilon}$$

Auflösung nach μ:

$$\mu = z + N_{1-\varepsilon}\sigma .$$

c) Nach Teilaufgabe b) lautet die Shortfallrestriktion:

$$\mu = 1.282\,\sigma\,.$$

Gleichsetzen mit Funktion des effizienten Rands laut Aufgabenstellung resultiert in

$$\sqrt{0.6\,(\sigma^2 - 0.001)} = 1.282\,\sigma - 0.05\,.$$

Quadratur dieses Ausdrucks führt auf quadratische Gleichung

$$1.0435\sigma^2 - 0.1282\sigma + 0.0031 = 0\,.$$

Lösung der quadratischen Gleichung führt auf:

$$\sigma_1 = 0.0329, \qquad \sigma_2 = 0.0899\,.$$

Das optimale Portfolio ist gegeben durch die höhere σ-Position, d.h. σ = 0.0899. Die zugehörige μ-Position lautet:

$$\mu = 1.282 \cdot 0.0899 = 0.1153\,.$$

d) Die neue Effizienzgerade ist gegeben durch die Tangente von $r_0 = 0$ an den bisherigen effizienten Rand. Das Tangentialportfolio T besitzt daher die Steigung

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \left[0.6(\sigma^2 - 0.001)\right]^{-1/2}\ (0.6\sigma)$$

Auswertung in $\sigma = 0.0899$ ergibt:

$$\frac{d\mu}{d\sigma}\,(0.0899) = 0.8275$$

Dies entspricht zugleich der Steigung a der Effizienzgeraden $\mu = r_0 + a\,\sigma$. Damit das Portfolio aus c) optimal bleibt, d.h. dem Tangentialportfolio entspricht, folgt hieraus die Bedingung

$$0.1153 = r_0 + (0.8275)(0.0899)$$

Und damit

$$r_0 = 0.1153 - 0.0744 = 0.0409\ \ (4.09\%).$$

e) $$\begin{aligned} \mathrm{Var}(R_I) &= \mathrm{Cov}(R_I, R_I) = \mathrm{Cov}(\Sigma a_i R_i, R_I) \\ &= \Sigma a_i\,\mathrm{Cov}(R_i, R_I) = \Sigma a_i \rho(R_i, R_I)\,\sigma(R_i)\ \sigma(R_I)\,. \end{aligned}$$

Da $\mathrm{Var}(R_I) = \sigma(R_I)^2$ folgt hieraus:

$$\sigma(R_I) = \Sigma a_i \rho(R_i, R_I)\,\sigma(R_i)\,.$$

Aufgabe 2: (25 Minuten)

a) Bestimmen Sie die stochastische Differentialgleichung des Prozesses

$$X_t = \exp(W_t),$$

wobei W_t den Standard-Wienerprozess bezeichne! (6 min)

b) Betrachten Sie den stochastischen Prozess $(t \geq 0)$

$$V_t = \exp(-\mu t) S_t \,,$$

wobei S_t einer Geometrischen Brownschen Bewegung mit Drift μ und Diffusion σ folgt.

Wie lautet die stochastische Differentialgleichung dieses Prozesses in kanonischer Form (d.h. Darstellung von Drift und Diffusion als Funktionen von V_t)? (7 min)

c) Betrachten Sie den stochastischen Prozess $(s_0 > 0, t \geq 0)$

$$Z_t = \frac{1}{s_0} \exp\left[-\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t - \sigma W_t \right]$$

wobei W_t den Standard-Wienerprozess bezeichne.

Bestimmen Sie die stochastische Differentialgleichung des Prozesses

$$Z_t := \frac{1}{S_t} \,!$$

(12 min)

Lösungsskizze:

a) Korrespondierende Transformationsfunktion:

$F(x) = \exp(x)$.

Partielle Ableitungen:

$F_t = 0,\; F_x = F_{xx} = F$

Ito:

$$\mu_F = F_t + F_x \mu_W + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma_W^2 \;, \quad \sigma_F = F_x \sigma_W$$

Mit $\mu_W = 0$ und $\sigma_W = 1$ folgt hieraus:

$$\mu_F = \frac{1}{2}F, \qquad \sigma_F = F.$$

Resultierende stochastische Differentialgleichung:

$$dX_t = \frac{1}{2}X_t\,dt + X_t\,dW_t.$$

b) Definiere $h_t = h(t) = \exp(-\mu t)$.

Es gilt $\frac{dh(t)}{dt} = -\mu\,h(t)$

bzw.

$$dh(t) = -\mu\,h(t)\,dt.$$

Insbesondere besitzt diese Differentialgleichung keinen Diffusionsterm, d.h. es gilt

$$\sigma_h = 0.$$

Produktregel:

$$dV_t = d(h_t S_t) = h_t dS_t + S_t dh_t + \sigma_S\,\sigma_h dt.$$

Für die Geometrische Brownsche Bewegung gilt $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t\,dW_t$.

Insgesamt gilt damit:

$$\begin{aligned} dV_t &= h_t(\mu S_t dt + \sigma S_t\,dW_t) - S_t \mu\,h_t\,dt \\ &= h_t\,\sigma S_t\,dW_t = \sigma V_t\,dW_t\,. \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$Z_t = \frac{1}{s_0}\exp\left[-\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t - \sigma W_t\right]$$

Korrespondierende Transformationsfunktion:

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \frac{1}{s_0}\exp\left[-\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t - \sigma x\right] \\ &= \frac{1}{s_0}\exp\left[\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu\right)t - \sigma x\right] \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen:

$$F_t = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu\right)F, \quad F_x = -\sigma F, \quad F_{xx} = \sigma^2 F$$

Ito:

$$\mu_F = F_t + F_x \mu_W + \frac{1}{2} F_{xx}\, \sigma_W^2\,, \quad \sigma_F = F_x \sigma_W$$

Mit $\mu_W = 0$ und $\sigma_W = 1$ folgt hieraus

$$\mu_F = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu\right)F + \frac{1}{2}\sigma^2 F = (\sigma^2 - \mu)\,F$$

$$\sigma_F = -\sigma F\ .$$

Hieraus folgt insgesamt

$$dZ_t = (\sigma^2 - \mu)\, Z_t\, dt - \sigma\, Z_t\, dW_t\ .$$

Alternativer Lösungsweg:

$Z_t = 1/S_t$, wobei $\{S_t\}$ Geometrische Brownsche Bewegung

Transformationsfunktion: $F(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$

Partielle Ableitungen: $F_t = 0,\ F_x = -x^{-2},\ F_{xx} = 2x^{-3}$

Ito mit $\mu_S = \mu\, x$ und $\sigma_S = \sigma\, x$:

$$\begin{aligned}
\mu_F &= F_t + F_x \mu_S + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma_S^2 \\
&= -\frac{\mu}{x} + \frac{\sigma^2}{x} = (\sigma^2 - \mu)F \\
\sigma_F &= F_x \sigma_S = -\frac{\sigma}{x} = -\sigma\, F\,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt wieder:

$$dZ_t = (\sigma^2 - \mu)\, Z_t\, dt - \sigma\, Z_t\, dW_t\,.$$

Aufgabe 3: (15 Minuten)

a) Das Portfolio eines Investors bestehe aus n Zertifikaten auf den DAX. Unter Einsatz von Futures auf den DAX soll nun zum Zeitpunkt s eine Hedgeposition etabliert werden mit folgender Eigenschaft: Zum Zeitpunkt t > s soll die Hedgeposition G_t „nutzenmaximal" sein, d.h. zu einem möglichst hohen Wert der Risikopräferenzfunktion $V(G_t) = E(G_t) - a\ \mathrm{Var}(G_t)$ des Investors führen (a > 0). Welchen Wert nimmt die optimale Zahl von zu verkaufenden Futurekontrakten an? Vergleichen Sie dieses Resultat mit dem entsprechenden Ergebnis für eine varianzminimale Hedgeposition.
(6 min)

b) Gegeben sei ein Aktienportfolio mit Kursentwicklung $\{S_t; 0 \le t \le T\}$. Dieses Portfolio soll in t = T auf der Basis einer Put-Option abgesichert werden. Zur Verfügung stehen nur Index-Puts auf einen Aktienindex mit Kursentwicklung $\{I_t; 0 \le t \le T\}$. Unterstellen Sie die Beziehung

$$S_t = \alpha + \beta I_t .$$

Wie viele Index-Puts zum Ausübungspreis F müssen erworben werden, damit das wertgesicherte Portfolio eine (deterministische) absolute Wertuntergrenze besitzt?
(4 min)

c) Ein Investor besitzt ein anfängliches Vermögen V_0, das er benutzt, um einerseits Zerobonds der Laufzeit T = 10 zu erwerben und andererseits Calls auf die A-Aktie. Welches Mindest-Endvermögen M kann der Investor auf diese Weise darstellen? Unterstellen Sie dabei, dass die zehnjährige Spot Rate r_{10} beträgt.

Bestimmen Sie die korrespondierende annualisierte Mindestrendite r_M bezogen auf das anfängliche Vermögen V_0 und vergleichen Sie diese mit r_{10}. (5 min)

Lösungsskizze:

a) Es bezeichne $\{K_t\}$ den Wertverlauf des Basistitels (DAX-Zertifikate) und entsprechend $\{F_t\}$ den Wertverlauf des Futures. Die Hedge-Position G_t zum Zeitpunkt t ist dann gegeben durch $G_t = n(K_t - K_s) - x(F_t - F_s)$, wenn sie zum Zeitpunkt s etabliert worden ist. Es folgt:

i) $E(G_t) = nE(K_t) - nK_s - xE(F_t) + xF_s$

ii) $\mathrm{Var}(G_t) = n^2\mathrm{Var}(K_t) + x^2\mathrm{Var}(F_t) - 2nx\mathrm{Cov}(K_t, F_t)$

iii) $V(G_t) = E(G_t) - a\mathrm{Var}(G_t)$

iv) $0 = \dfrac{dV}{dx} = F_s - E(F_t) - 2ax\mathrm{Var}(F_t) + 2an\mathrm{Cov}(K_t, F_t)$

v) $$x = \frac{2an\,Cov(K_t, F_t) + F_s - E(F_t)}{2a\,Var(F_t)}$$
$$= n\frac{Cov(K_t, F_t)}{Var(F_t)} - \frac{E(F_t) - F_s}{2a\,Var(F_t)}$$
$$= n\beta_{KF}(t) - \frac{E(F_t) - F_s}{2a\,Var(F_t)} \quad .$$

Der erste Term des letzten Ausdrucks entspricht dabei der optimalen Kontraktzahl im Falle des varianzminimalen Hedges, d.h. zur Etablierung des nutzenmaximalen Hedges ist diese Kontraktzahl zu reduzieren um den Wert $\frac{E(F_t) - F_s}{2a\,Var(F_t)}$.

b) Position wertgesichertes Portfolio mit x Index-Puts in t = T:

$$V_T = S_T + x \max(F - I_T, 0) - xP_0,$$

wobei $P_0 = P_0(F)$ der Preis eines Index-Puts mit Ausübungspreis F sei.

Im Falle $I_T < F$ gilt:

$$V_T = S_T + x\,(F - I_T) - xP_0$$
$$= \alpha + \beta I_T - xI_T + xF - xP_0$$

Offenbar verschwindet die Stochastizität genau dann, wenn $x = \beta$.

c) Der Investor erwerbe n Calls zum Preis C_0. Damit kann er $V_0 - n\,C_0$ in Zerobonds anlegen.

Korrespondierende Wertentwicklung:

$$V_{10} = (V_0 - n\ C_0)(1 + r_{10})^{10} + n\ \max(S_T - X, 0),$$

wobei $\{S_T\}$ die Wertentwicklung der A-Aktie und X den Ausübungspreis des Call bezeichne.

Es gilt, da $\max(S_T - X, 0) \geq 0$:

$$V_{10} \geq (V_0 - n\ C_0)(1 + r_{10})^{10} = M$$

Bestimmung der Mindestrendite:

Ansatz: $V_0\,(1 + r_M)^{10} = M = (V_0 - n\,C_0)(1 + r_{10})^{10}$

Hieraus folgt:

$$1 + r_M = \sqrt[10]{1 - (n\,C_0/V_0)}\ \ (1 + r_{10}).$$

Dabei muss $r_M \leq r_{10}$ gelten. Im Falle $r_M = r_{10}$ wird kein Call erworben (n = 0) und das gesamte anfängliche Vermögen wird in die sichere Anlage investiert.

Aufgabe 4: (25 Minuten)

a) Sie haben die Möglichkeit, zu einem Preis von EUR 10 000 ein strukturiertes Produkt mit einer einjährigen Laufzeit zu erwerben, welches die folgenden Modalitäten aufweist.

Von dem Betrag von EUR 10 000 werden EUR 500 zur Deckung von Garantie- und Sicherungskosten verwendet. Auf den restlichen Betrag wird eine garantierte Mindest verzinsung von 4% gewährt. Alternativ kommt im Falle einer positiven DAX- Entwicklung eine 50%-ige DAX-Partizipation zum Zuge, bezogen auf einen Investitions betrag von EUR 9 500 - jedoch nur, wenn dies zu einer höheren Auszahlung führt.

Sollten Sie dieses Produkt erwerben, wenn in t = 0 ein sicherer Zins von 5 % herrscht, der DAX bei 4 750 steht und einjährige DAX-Calls mit einem Ausübungspreis von 5 130 eine Optionsprämie in Höhe von EUR 460 aufweisen? Welches ist der faire Wert des Produkts in t = 0? (7 min)

b) Ein Investor erwirbt in t = 0 ein Garantiezertifikat auf die S-Aktie, das in t = 1 eine Wertsicherung in Höhe von 90 % des Anfangswerts s_0 der S-Aktie beinhaltet.

i) Wie kann diese Position in t = 1 unter Einsatz von Puts dupliziert werden? Welche Modalitäten weisen diese Puts auf?

ii) Bestimmen Sie auf dieser Grundlage den fairen Wert des Garantiezertifikats!

iii) Wie kann die Position äquivalent unter Einsatz von Calls dupliziert werden? Welche Modalitäten weisen diese Calls auf? Leiten Sie hieraus die korrespondierende Put/Call-Parität ab! Gehen Sie dabei von einem sicheren Per Annum-Zins in Höhe von r aus.

iv) Die Bank B, bei der der Investor die Puts erworben hat, möchte ihr Risiko aus der Stillhalter-Position eliminieren, in dem sie eine einjährige Aktienanleihe emittiert. Bestimmen Sie die diesbezüglichen Modalitäten der Aktienanleihe und weisen Sie nach, dass das Aktienrisiko der Bank B in diesem Fall in der Tat eliminiert wird.

v) Die Bank B emittiert die Aktienanleihe zum Nennwert, stattet die Anleihe aber mit einem Zinssatz in Höhe von $i = r + \Delta$ aus, um den Käufer der Anleihe für das zusätzlich eingegangene Risiko zu entschädigen. Welchen Wert darf Δ maximal annehmen, damit Bank B insgesamt keinen Verlust erleidet?

Lösungsskizze:

a) Rückzahlungsprofil in t = 1:

$$L_1 = \max\left(1.04 \cdot 9500,\ 9500 + 9500 \cdot 0.5 \cdot \frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)}\right)$$

Zerlegung des Rückzahlungsprofils:

$$
\begin{aligned}
L_1 \quad & = 9500 + \max\left(0.04 \cdot 9500\,, \frac{0.5 \cdot 9500}{4750}(\mathrm{DAX}(1) - \mathrm{DAX}(0))\right) \\
& = 9500 + \max\left(380\,,\ \mathrm{DAX}(1) - 4750\right) \\
& = 9500 + \max\left(\mathrm{DAX}(1) - 4750 - 380, 0\right) + 380 \\
& = 9880 + \max\left(\mathrm{DAX}(1) - 5\,130, 0\right)
\end{aligned}
$$

Fairer Wert L_0 in t = 0:

$$L_0 \quad = 9880\,(1.05)^{-1} + 460 = 9409.52 + 460 \;= 9869.52\ .$$

Der Erwerb des Produkts zu EUR 10 000 ist damit nicht vorteilhaft.

b) i) Rückzahlungsprofil Garantiezertifikat: $(X := 0.9\,s_0)$

$$\max(X, S_1)$$

Duplikation mit Puts in t = 1:

$$\max(X, S_1) = S_1 + \max(X - S_1, 0)$$

Involviert sind einjährige Puts auf die S-Aktie mit Ausübungspreis X.

ii) Wert in t = 0:

$$V_0 = s_0 + P_0\,(X)\,,$$

wobei $P_0\,(X)$ der Wert des Puts in t = 0 ist.

iii) Alternativ:

$$\max(X, S_1) = X + \max(S_1 - X, 0)$$

Involviert sind einjährige Calls auf die S-Aktie mit Ausübungspreis X.
Korrespondierender Wert in t = 0:

$$V_0 = X\,(1 + r)^{-1} + C_0\,(X)$$

Put/ Call-Parität

$$s_0 + P_0(X) = X(1 + r)^{-1} + C_0(X)$$

bzw. $C_0(X) - P_0(X) = s_0 - X\,(1 + r)^{-1}$

iv) Rückzahlungsprofil Aktienanleihe in t = 1 aus Investorsicht allgemein:

$$Z + \min(N, S_1)$$

Es gilt:

$$\min(N, S_1) = N + \min(S_1 - N, 0)$$

$$= N - \max(N - S_1, 0)$$

Damit lautet das Rückzahlungsprofil aus Investorsicht insgesamt:

$$Z + N - \max(N - S_1, 0)$$

Aus Sicht der Bank B mithin:

$$-Z - N + \max(N - S_1, 0)$$

Die Bank B hat eine Short Put-Position inne, d.h. es gilt in t = 1:

$$-\max(X - S_1, 0).$$

Bei Wahl von X = N folgt insgesamt in t = 1;

$$-Z - X + \max(X - S_1, 0) - \max(X - S_1, 0)$$

$$= -X - Z = -(X + Z)$$

Das Aktienrisiko der Bank B ist damit eliminiert.

<u>Alternativ:</u> Im Falle $S_1 < X$ wird Option ausgeübt und die Bank B muss die S-Aktie zu X erwerben (Position: $S_1 - X$). Im Falle $S_1 < X$ liefert die Bank B die Aktie bzw. deren Marktwert S_1 und zahlt einen Coupon von Z (Position: $-S_1 - Z$; Saldoposition: - (X + Z)).

v) In t = 0 erhält die Bank B die Optionsprämie $P_0(X)$ sowie den Nennwert X der Anleihe. Diese Beträge kann sie ein Jahr risikolos anlegen, d.h. hat

$$(P_0(X) + X)(1 + r)$$

zur Verfügung.

Es muss daher gelten:

$$(P_0(X) + X)(1 + r) \geq X + Z$$

bzw. $(Z = X\,i)$

$$P_0(X)(1 + r) + X + X\,r \geq X + X\,i$$

bzw.

$$i \le r + \frac{P_0(X)}{X}(1+r)$$

bzw. $$\Delta = i - r \le \frac{P_0(X)}{X}(1+r)\,.$$