Prüfung Finanzmathematik und Investmentmanagement 2012

<u>**Aufgabe 1:**</u> (23 Minuten)

a) Gegeben sei der Zwei-Wertpapier-Fall sowie die Präferenzfunktion V(R) = E(R) – aVar(R). Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die Investmentgewichte des optimalen Portfolios! Die Investmentgewichte seien dabei nicht auf den Wertebereich [0,1] beschränkt.

b) Auf der Grundlage einer Lagrange-Optimierung ergibt sich die folgende funktionale Form für die (μ, σ)-Koordinaten der lokal (d.h. für einen festen Erwartungswert) varianzminimalen Portfolios:

$$\sigma^2 = \mu^2 - 2\mu + 0.26 \ .$$

Als Shortfallrestriktion sei die Bedingung

$$P(R_P \leq 0.2) = 0.1$$

gefordert, wobei R_P die einperiodige Portfoliorendite bezeichne. R_P folge einer Normalverteilung.

Bestimmen Sie unter diesen Voraussetzungen die (μ, σ)-Position des optimalen Portfolios mit maximaler erwarteter Rendite!

<u>Hinweis:</u> $N_{0.90} = 1.28$.

c) Der effiziente Rand bei Existenz einer sicheren Anlage lautet allgemein

$$\mu = r_0 + \sqrt{h + SR_0^2} \cdot \sigma \ .$$

Dabei bezeichne r_0 die sichere Verzinsung und SR_0 die Sharpe Ratio des varianzminimalen Portfolios.

Gehen Sie aus von einer Mindestrendite $z < r_0$ und bestimmen Sie für die vorliegende Konstellation das optimale Portfolio unter der Shortfallrestriktion $(0 < \alpha < 1)$

$$P(R_P \leq z) = \alpha \ .$$

Dabei bezeichne R_P die einperiodige Portfoliorendite eines rein riskanten Portfolios; R_P sei normalverteilt, d.h. $R_P \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Fertigen Sie eine Skizze der Situation im (σ, μ)-Raum an! Unter welcher Bedingung existiert ein optimales Portfolio? Bestimmen Sie die Rendite-Standardabweichung des optimalen Portfolios sowie dessen erwartete Rendite!

Lösungsskizze:

a) Im Zwei-Wertpapier-Fall gilt:

$$\begin{aligned} E(R) &= x\,E(R_1) + (1-x)\,E(R_2) = \mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)x \\ Var(R) &= x^2 Var(R_1) + (1-x)^2 Var(R_2) + 2x(1-x)Cov(R_1, R_2) \\ &= x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_{12}, \end{aligned}$$

wobei $\sigma_{12} := Cov(R_1, R_2)$.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} V(R) &= E(R) - aVar(R) \\ &= \mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)x - a[x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_{12}] \end{aligned}$$

$$0 = dV(R)/dx = (\mu_1 - \mu_2) - 2a\sigma_1^2 x + 2a(1-x)\sigma_2^2 - 2a\sigma_{12} + 4ax\sigma_{12}$$

Insgesamt folgt damit:

$$x = \frac{2a(\sigma_{12} - \sigma_2^2) - (\mu_1 - \mu_2)}{4a\sigma_{12} - 2a(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} = \frac{\frac{\mu_1 - \mu_2}{2a} - (\sigma_{12} - \sigma_2^2)}{Var(R_1 - R_2)}.$$

b) Allgemein lautet die Shortfallgerade

$$\mu = z + N_{1-\alpha}\,\sigma\ ,$$

was sich im vorliegenden Fall spezialisiert zu

$$\mu = 0.2 + 1.28\sigma.$$

Einsetzen in

$$\sigma^2 = \mu^2 - 2\mu + 0.26$$

ergibt

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= (0.2+1.28\sigma)^2 - 2(0.2+1.28\sigma) + 0.26 \\
&= (0.04+0.512\sigma+1.6384\sigma^2) - (0.4+2.56\sigma) + 0.26 \\
&= 1.6384\sigma^2 - 2.048\sigma - 0.1
\end{aligned}
$$

und somit

$$0.6384\,\sigma^2 - 2.048\,\sigma - 0.1 = 0\,.$$

Hieraus folgt (nur positive Lösung zulässig)

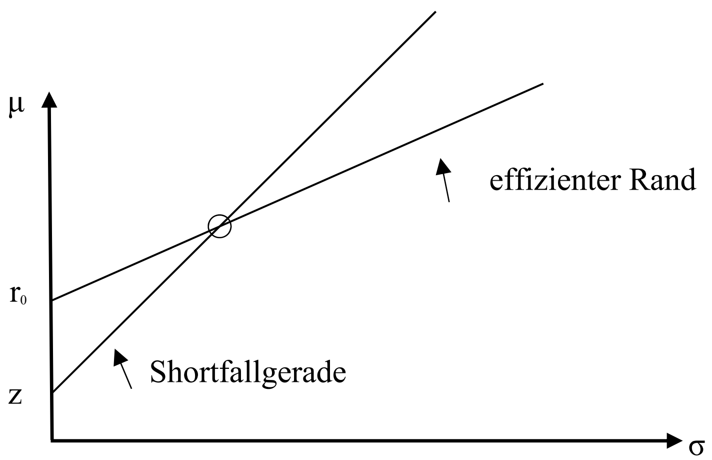
$\sigma = 3.256\,.$

Die zugehörige μ-Position ist

$\mu = 0.2 + (1.28)(3.256) = 4.368\,.$

Die gesuchte Position ist gegeben durch (4.368, 3.256).

c) Skizze der Situation



Der effiziente Rand ist gegeben durch

$$\mu = r_0 + \sqrt{h + SR_0^2}\cdot\sigma\,.$$

Die Shortfallgerade ist gegeben durch

$$\mu = z + N_{1-\alpha}\,\sigma\,.$$

Geometrischer Ansatz für die Existenz einer Lösung:

Da $z < r_0$ vorausgesetzt ist, existiert ein Schnittpunkt nur, wenn die Steigung der Shortfallgeraden höher ist als die Steigung des effizienten Randes, d.h. die Bedingung

$$\sqrt{h + SR_0^2} < N_{1-\alpha}$$

bzw.

$$h + SR_0^2 < N_{1-\alpha}^2$$

erfüllt ist.

Es gilt dann

$$z + N_{1-\alpha}\sigma = r_0 + \sqrt{h + SR_0^2} \cdot \sigma$$

und damit

$$(N_{1-\alpha} - \sqrt{h + SR_0^2})\ \sigma = r_0 - z\ .$$

Für die Standardabweichung σ_{OPT} des optimalen Portfolios ergibt sich somit

$$\sigma_{OPT} = \frac{r_0 - z}{N_{1-\alpha} - \sqrt{h + SR_0^2}}$$

und die erwartete Rendite μ_{OPT} des optimalen Portfolios ist gegeben durch

$$\mu_{OPT} = r_0 + \sqrt{h + SR_0^2}\ \sigma_{OPT}$$

bzw. äquivalent durch

$$\mu_{OPT} = z + N_{1-\alpha}\sigma_{OPT}\ .$$

Analytischer Ansatz für die Existenz einer Lösung:

Es muss gelten

$$\sigma_{OPT} > 0\ ;$$

da $z < r_0$ ist dies äquivalent zu

$$N_{1-\alpha} - \sqrt{h + SR_0^2} > 0$$

bzw. zu

$$N_{1-\alpha} > \sqrt{h + SR_0^2}\ .$$

Aufgabe 2: (23 Minuten)

a) Ein stochastischer Prozess besitze die explizite Repräsentation ($s_0 > 0$)

$$S_t = s_0 \exp(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\,t + \sigma W_t \qquad t \geq 0 \ ,$$

wobei W_t den Standard-Wienerprozess bezeichne.

Bestimmen Sie – ausgehend von dieser expliziten Repräsentation – die stochastische Differentialgleichung des Prozesses

$$Z_t := \frac{1}{S_t} \ !$$

b) Gegeben seien eine Aktie, deren Kursprozess einer Geometrischen Brownschen Bewegung $\{S_t\}$ folgt sowie eine sichere Anlage mit Wertentwicklung exp(rt). Betrachten Sie nun einen Call auf diese Aktie, dessen Wertentwicklung der funktionalen Beziehung $C_t = F(t, S_t)$ genügt.

Wie lautet in diesem Falle das Black/Scholes-Hedgeportfolio? Unter welcher Bedingung erreicht man, dass dieses Hedgeportfolio eine momentane Variation (Diffusion) in Höhe von null aufweist? Bestimmen Sie diese Bedingung explizit auf der Basis des Lemmas von Ito!

Welche Rolle spielt hierbei das Call-Delta?

c) Betrachte $Z(t) = X(t)\,Y(t) = tW(t)$, d.h.

$$dX(t) = dt$$

$$dY(t) = dW_t$$

Wie lautet die stochastische Differentialgleichung für Z(t)?

Lösungsskizze:

a) Definiere

$$S_t = s_0\, e^{mt} + \sigma W_t = f(t) + \sigma W_t \, ,$$

wobei $m = \mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2$ und $f(t) = s_0\, e^{mt}$.

Die korrespondierende Transformationsfunktion für den Prozess

$$Z_t = \frac{1}{S_t} = [f(t) + \sigma W_t]^{-1}$$

lautet

$$F(t,x) = [f(t) + \sigma x]^{-1}.$$

Partielle Ableitungen:

$$F_t = -f'(t)[f(t) + \sigma x]^{-2} = -f'(t)F^2 = -mf(t)F^2$$

$$F_x = -\sigma[f(t) + \sigma x]^{-2} = -\sigma F^2$$

$$F_{xx} = 2\sigma^2 [f(t) + \sigma x]^{-3} = 2\sigma^2 F^3$$

Ito:

$$\mu_F = F_t + F_x \mu_W + \tfrac{1}{2} F_{xx} \sigma_W^2$$

$$\sigma_F = F_x \sigma_W .$$

Mit $\mu_W = 0$ und $\sigma_W = 1$ folgt hieraus

$$\mu_F = -m f(t) F^2 + \sigma^2 F^3$$

$$\sigma_F = -\sigma F^2 .$$

Hieraus folgt dann insgesamt

$$dZ_t = [-mf(t)Z_t^2 + \sigma^2 Z_t^3]dt - \sigma Z_t^2 \, dW_t .$$

b) Hedgeportfolio:

$$V_t = S_t + q_t C_t = S_t + q_t F(t, S_t)$$

Korrespondierende Transformationsfunktion

$$H(t,x) = x + q_t F(t,x)$$

Partielle Ableitung nach x:

$$H_x = 1 + q_t F_x .$$

Ito:

$$\sigma_V = H_x \sigma_S = H_x \sigma x$$

Damit gilt $\sigma_V^2 = 0$ genau dann, wenn $H_x = 0$, d.h.

$$q_t = -\frac{1}{F_x}$$

Für das Call-Delta gilt $\partial C / \partial S_t$, d.h.

$$q_t = -\frac{1}{\text{Call-Delta}}$$

c) Gemäß Produktregel gilt:

$$dZ_t = X_t\, dY_t + Y_t\, dX_t + \sigma_X \sigma_Y\, dt\,.$$

Da $\sigma_X = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} dZ_t &= t\, dW_t + W_t\, dt \\ &= W_t\, dt + t\, dW_t\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (22 Minuten)

a) Betrachten Sie einen in T fälligen Futurekontrakt auf ein einkommensfreies Basisobjekt mit Kursentwicklung $\{K_t\}$. Leiten Sie explizit (unter Ausnutzung der Äquivalenz bestimmter Investmentpositionen) den Preis F(s,T) des Futurekontrakts zum Zeitpunkt s < T ab. Vernachlässigen Sie dabei das Marking to Market eines Futurekontrakts. Am Markt bestehe eine flache Zinsstruktur zum diskreten Zinssatz r.

b) Nehmen Sie an, dass der Preis eines Basisobjekts am 01. April 2010 10% geringer ist als am 01. Januar 2010. Wir betrachten einen Futurekontrakt auf eine Einheit des Basisobjekts mit Erfüllungstermin 01. Oktober 2010. Welchen prozentualen Kursverlust erfährt der Futurepreis am 01. April im Vergleich zum 01. Januar, wenn von Cost of Carry-Preisen ausgegangen wird? Der für die Preisbestimmung relevante Zins betrage 3% per annum. Unterstellt werde dabei eine monatliche Zinskonvention, d.h. ein Monat entspricht einem Zwölftel eines Jahres.

c) Weisen Sie nach, dass ein T-jähriges Zertifikat des Typus "Zerobond plus Long Call" ein T-jähriges Zertifikat des Typus " Z-Aktie plus Long Put" zum Zeitpunkt T zu duplizieren vermag (dabei besitzen Call und Put jeweils die Z-Aktie als Underlying).

Welches sind die Ausübungspreise von Call und Put bei dieser Duplikationsposition?

Was ist der entsprechende Rückzahlungsbetrag des Zerobond?

Hinweis: Zerlegen Sie das Rückzahlungsprofil eines Garantiezertifikats mit Garantiebetrag G auf zwei alternative Weisen.

Lösungsskizze:

a) Betrachtet werden die beiden folgenden Investitionen, die sowohl zum Zeitpunkt 0 (jeweils "Nullinvestment") als auch zum Zeitpunkt T (Besitz der Aktie) identisch sind:

(I) Kauf des Basisobjekts zum Zeitpunkt s auf Kredit, Ablösung des Kredits in T. Gewinn-/Verlustposition in T:

$$K_T - K_s(1+r)^{T-s}.$$

(II) Erwerb des Basisobjekts über eine zum Zeitpunkt s eingegangene Future Long-Position. Gewinn-/Verlustposition in T (dabei wird $F(T,T) = K_T$) ausgenutzt):

$$K_T - F(s,T).$$

Da die Investitionen identisch sind, muss gelten (Law of One Price)

$$K_T - F(s,T) = K_T - K_s(1+r)^{T-s}$$

und daher insgesamt

$$F(s,T) = K_s(1+r)^{T-s}.$$

b) Bezeichne K_0 den Preis des Basisobjekts zum Zeitpunkt 01. Januar und K_3 den Preis des Basisobjekts zum 01. April, so gilt $K_3 = 0.9K_0$.
Es gilt damit

$$\frac{F(3{,}9) - F(0{,}9)}{F(0{,}9)} = \frac{0.9K_0(1.03)^{6/12} - K_0(1.03)^{9/12}}{K_0(1.03)^{9/12}}$$

$$= 0.0(1.03)^{-1/4} - 1 = 0.88934 - 1 = -0.1066,$$

d.h. es tritt ein Kursverlust von 10.66% ein. Der Future fällt somit etwas stärker als das zugrunde liegende Basisobjekt.

c) Bezeichne S_t den Marktwert der H-Aktie in T.

Position Garantiezertifikat in T:

$$\max(S_T, G)$$

Zerlegung 1:

$\max(S_T, G) = S_T + \max(G - S_T, 0)$

Der zweite Term ist eine Long Put-Position, der Ausübungspreis des Put ist G.

Zerlegung 2:

$\max(S_T, G) = G + \max(S_T - G, 0)$

Der erste Term entspricht einem (T-jährigen) Zerobond mit Rückzahlungsbetrag G, der zweite einer Long Call-Position, wobei der Ausübungspreis des Call ebenfalls G ist.

Aufgabe 4: (22 Minuten)

Unterstellen Sie für die Kursentwicklung einer Aktie einen zweiperiodigen Binomialgitterprozess mit Startwert $s_0 = 100$ und einer prozentualen Aufwärtsbewegung von 20% bzw. einer prozentualen Abwärtsbewegung von 10% pro Periode. Der einperiodige Zinssatz für eine sichere Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme betrage 5%.

a) Stellen Sie zunächst die Entwicklung des Aktienkurses von t = 0 bis t = 2 dar!

b) Bestimmen Sie auf Basis des *Duplikationsprinzips* den arbitragefreien Preis in t = 0 eines zweiperiodigen Forwardkontrakts auf den Basistitel. Welche Beziehung weisen der arbitragefreie Forwardpreis und der Startwert des Basistitels auf?

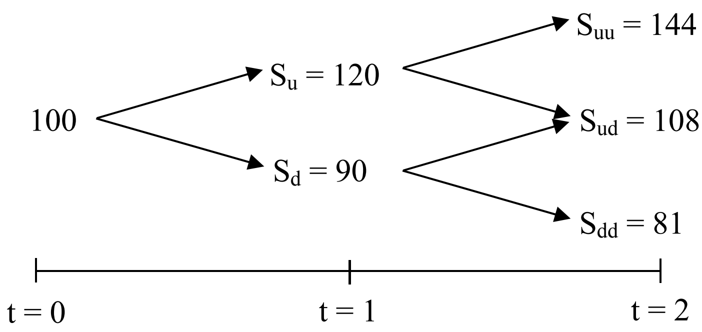
c) Betrachten Sie nun eine Bearanleihe (zunächst ohne Kuponzahlungen) auf die zugrunde liegende Aktie mit einer Laufzeit von 2 Jahren und einem Nennwert von 100 000. Die Partizipationsrate an der nicht-annualisierten (negativen!) Rendite der zugrunde liegenden Aktie betrage 60%.

   i) Bestimmen Sie den Marktwert der Bearanleihe durch *direkte Duplikation* des Rückzahlungsprofils der Anleihe!

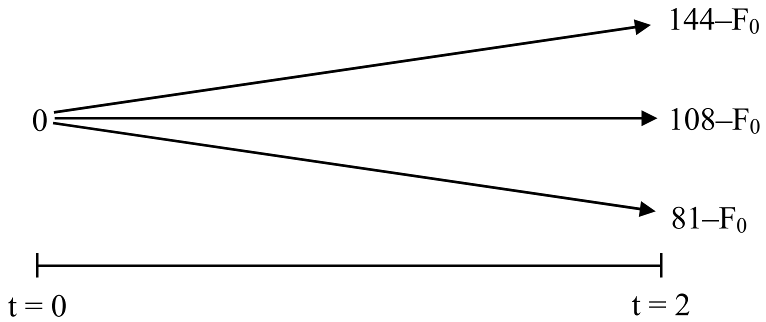
   ii) Wie hoch ist der Marktwert der Bearanleihe, wenn die Anleihe zusätzlich einen jährlichen Nominalzins von 4% abwirft?

Lösungsskizze:

a) Entwicklung Basistitel:



b) Für die Forwardposition gilt entsprechend aus Sicht des Investors:



Dabei ist F_0 der zu bestimmende arbitragefreie Forwardpreis.

Erwirbt der Investor in t = 0 x Einheiten des Basistitels und y der sicheren Anlage, so gelten für die Duplikationsposition in t = 2 die folgenden Bedingungen:

(1) $144x + (1.05)^2 y = 144 - F_0$

(2) $108x + (1.05)^2 y = 108 - F_0$

(3) $81x + (1.05)^2 y = \quad 81 - F_0$.

Aus (beispielsweise) (1) – (2) resultiert $36x = 36$ und somit $x = 1$. Aus (1) resultiert dann $y = -F_0(1.05)^{-2}$.

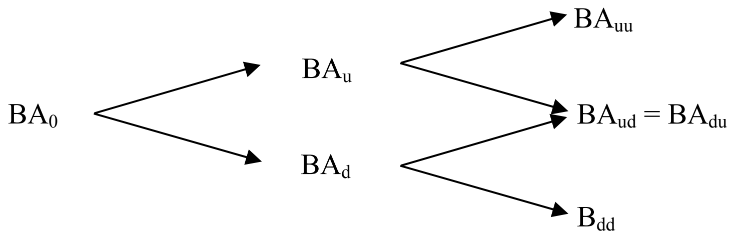
Schließlich muss in t = 0 gelten (Law of One Price)

$0 = 100x + y = 100 - F_0(1.05)^{-2}$.

Hieraus resultiert insgesamt

$F_0 = 100(1.05)^2 = 110.25$.

c) i) Entwicklung Bear-Anleihe:



Die Bear-Anleihe zahlt einen Bonus auf den Nennwert nur im Falle einer negativen Renditeentwicklung der Aktie, d. h. zunächst gilt

$\mathbf{BA_{uu} = BA_{ud} = 100\,000}$.

Es gilt ferner $S_{dd} = (0.9)^2 S_0 = 0.81\, S_0$.

Der *Bonus* im Zustand dd lautet somit

$100\,000 \cdot 0.6 \cdot 0.19 = 11\,400$.

[Alternativ: Rückzahlung in dd lautet

$$100\,000[1 - 0.6\,\frac{S_{dd} - S_0}{S_0}] = 100\,000\,[1 - 0.6(-0.19)]$$

$$= 100\,000 \cdot 1.114 = 111\,400]$$

Insgesamt gilt somit $\mathbf{BA_{dd} = 111\,400}$.

α) Bestimmung BA_u:

Da aus Sicht des Knotens u (in t = 1) die Rückzahlung in t = 2 sicher ist, d.h. sowohl in uu als auch in ud 100 000 beträgt, gilt

$BA_u = 100\,000(1.05)^{-1} = 95\,238.095$.

β) Bestimmung BA_d:

(I) $108x + (1.05)y = 100\,000$

(II) $81x + (1.05)y = 111\,400$.

Aus (I) – (II) folgt $27x = -11\,400$ und damit $x = -422.22$. Hieraus folgt

$$y = (100\,000 + 108 \cdot 422.22)(1.05)^{-1}$$
$$= 145\,599.76(1.05)^{-1} = 138\,666.44$$

und damit

$$BA_d = 90(-422.22) + 138\,666.44$$
$$= -37\,999.80 + 138\,666.44 = 100\,666.64\ .$$

γ) Bestimmung BA_0:

(I) $120x + (1.05)y = 95\,238.095$

(II) $90x + (1.05)y = 100\,666.64$.

Aus (I) – (II) folgt $30x = -5\,428.625$ und damit $x = -180.9542$. Hieraus folgt

$$y = [100\,666.64 + 90(180.9542)](1.05)^{-1}$$
$$= (100\,666.64 + 16\,285.88)(1.05)^{-1}$$
$$= 116\,952.60(1.05)^{-1} = 111\,383.35$$

Hieraus folgt damit insgesamt

$$BA_0 = -100(180.9542) + 111\,383.35$$
$$= -18\,095.42 + 111\,383.35 = \mathbf{93\,287.93}.$$

Im Vergleich dazu lautet der Wert einer vergleichbaren Anleihe ohne Bonus

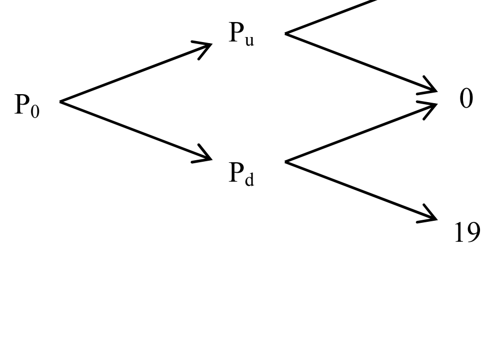
$100\,000(1.05)^{-2} = 90\,702.95$.

Alternativer Lösungsweg (über eingebettete Option):

Für das Rückzahlungsprofil L_2 der Bear-Anleihe in t = 2 gilt

$$L_2 = \max\left\{100\,000, 100\,000 - 100\,000 \cdot 0.6\ \frac{S_2 - s_0}{s_0}\right\}$$
$$= 100\,000 + \max\left\{\frac{100\,000 \cdot 0.6}{100}\ (100 - S_2), 0\right\}$$
$$= 100\,000 + 600 \max(100 - S_2, 0)\ ,$$

wobei S_2 den Wert der zugrundeliegenden Aktie in t = 2 bezeichne. Eingebettet ist somit eine zweijährige Putoption auf die Aktie mit einem Ausübungspreis von X = 100. Entsprechend lautet die Wertentwicklung des Put



α) Bestimmung P_u: $P_u = 0$

β) Bestimmung P_d:

(I) $108x + (1.05)y = 0$

(II) $81x + (1.05)y = 19$.

(I) – (II) ergibt $27x = -19$ und damit $x = -0.703704$

sowie $y = 108(0.703704)/(1.05) = 76/(1.05) = 72.381$.

Hieraus folgt:

$$P_d = 90x + y = 72.381 - 90(0.703704) = 72.381 - 63.3334$$
$$= 9.0476 \; .$$

γ) Bestimmung P_0:

(I) $120x + (1.05)y = 0$

(II) $90x + (1.05)y = 9.0476$.

(I) – (II) ergibt $30x = -9.0476$ und damit $x = -0.30159$

sowie $y = 120(0.30159)/(1.05) = 36.1908/(1.05) = 34.4674$.

Hieraus folgt

$P_0 = 100x + y = 34.4674 - 100(0.30159) = \mathbf{4.3084}$.

Für den Wert der Bear-Anleihe ergibt sich damit

$$B_0 = 100\,000(1.05)^{-2} + 600(4.3084)$$
$$= 90\,702.95 + 2\,585.04 = \mathbf{93\,287.99} \; .$$

ii) Die zusätzlichen Zahlungen sind 100 000(0.04) = 4 000 sowohl in $t = 1$ als auch in $t = 2$. Bewertung durch Barwertbildung zu 5% ergibt eine Marktwerterhöhung von

$$4\,000(1.05)^{-1} + 4\,000(1.05)^{-2} = 3\,809.524 + 3\,628.118$$
$$= \mathbf{7\,437.64} \; .$$