Prüfung Finanzmathematik und Investmentmanagement 2011

Aufgabe 1: (20 Minuten)

a) Auf der Grundlage einer Lagrange-Optimierung ergibt sich die folgende funktionale Form für die (μ, σ)-Koordinaten der (rein riskanten) Randportfolios (lokal varianzminimalen Portfolios):

$$\sigma^2 = 10\mu^2 - 2\mu + 0.25 \ .$$

i) Wie lautet der effiziente Rand, wobei μ als Funktion von σ darzustellen ist?

ii) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialgeraden unter der Annahme eines sicheren Zinses von $r_0 = 0.04$!

b) Gegeben sei ein synthetisch erzeugtes Put Hedge (Basistitel + Put long). Wie lautet die Delta-Normal-Approximation für diese Position über ein Zeitintervall $[t, t+h]$ im Falle von Black/Scholes-Optionspreisen?

<u>Hinweis:</u> Das Put-Delta lautet im Falle der Black/Scholes-Formel $-N[-d_1(t)]$.

<u>Lösungsskizze:</u>

a) i) Löse quadratische Gleichung

$$10\mu^2 - 2\mu + (0.25 - \sigma^2) = 0$$

Lösung lautet:

$$\mu = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40(0.25 - \sigma^2)}}{20} = \frac{2 \pm \sqrt{40\sigma^2 - 6}}{20} = 0.1 \pm \sqrt{0.1\,\sigma^2 - 0.015} \ .$$

Der effiziente Rand entspricht dem oberen Ast dieser Wurzelfunktion, d. h.

$$\mu = 0.1 + \sqrt{0.1\,\sigma^2 - 0.015} \ .$$

ii) Setze Tangentialgerade an in der Form

$$\mu = r_0 + a\sigma = 0.04 + a\sigma \ .$$

Einsetzen [Alternative: Schnitt mit effizientem Rand aus Aufgabenteil a)] in

$$\sigma^2 = 10\mu^2 - 2\mu + 0.25$$

liefert

$$\sigma^2 = 10(0.04 + a\sigma)^2 - 2(0.04 + a\sigma) + 0.25$$
$$= 0.016 + 0.8a + 10a^2\sigma^2 - 0.08 - 2a\sigma + 0.25$$

bzw.

$$(10a^2 - 1)\sigma^2 - 1.2a\sigma + 0.186 = 0\,.$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung führt auf

$$\sigma_{1,2} = \frac{1.2a \pm \sqrt{0.744 - 6a^2}}{2(10a^2 - 1)}\,.$$

Eine Tangente kann nur vorliegen, wenn die Diskriminante $0.744 - 6a^2$ null ist.
Hieraus folgt

$$a = \sqrt{0.744/6} = \sqrt{0.124}$$

bzw. $a = 0.35214$.
Die Gleichung der Tangentialgerade lautet somit

$$\mu = 0.04 + 0.35214 \cdot \sigma\,.$$

b) Synthetisches Put Hedge

$$PH_t = S_t + P_t\,,$$

wobei S_t den Kurs des Underlying und P_t den Wert der entsprechenden Putoption bezeichne.

Zu approximieren: $\Delta PH = PH_{t+h} - PH_t$

Ansatz Delta-Approximation:

$$\Delta PH = \frac{\partial PH_t}{\partial S_t}(S_{t+h} - S_t) = \frac{\partial PH_t}{\partial S_t}\Delta S\,.$$

Nun gilt:

$\frac{\partial PH_t}{\partial S_t} = \frac{\partial (S_t + P_t)}{\partial S_t} = \frac{\partial S_t}{\partial S_t} + \frac{\partial P_t}{\partial S_t} = 1 + \Delta_P(t)$, wobei $\Delta_P(t)$ das Put-Delta bezeichne.

Damit haben wir nach Hinweis im Falle der Black/Scholes-Formel:

$$\Delta PH = (1 - N[-d_1(t)])\Delta S = N[d_1(t)]\Delta S\,.$$

Normal-Approximation:

Zusätzlich wird angenommen, dass $\Delta S = S_{t+h} - S_t$ normalverteilt ist.

Aufgabe 2: (25 Minuten)

a) Betrachten Sie den stochastischen Prozess $(t \geq 0)$

$$V_t = (1+r)^{-t} S_t ,$$

wobei S_t einer Geometrischen Brownschen Bewegung folgt. Der Prozess V_t ist der entsprechende diskontierte Kursprozess.

Wie lautet die stochastische Differentialgleichung dieses Prozesses in kanonischer Form (d.h. Darstellung von Drift und Diffusion als Funktionen von V_t)?

Hinweis 1: Produktregel oder Lemma von Ito.

Hinweis 2: $a^{-x} = \exp(-x \ln a)$.

b) Gegeben seien die stochastischen Prozesse $\{X_t\}$ sowie $\{Y_t\}$, die Lösungen der stochastischen Differentialgleichungen

$$dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dW_t$$

sowie

$$dY_t = \gamma Y_t \, dt + \delta Y_t \, dW_t$$

sind.

Bestimmen Sie die stochastische Differentialgleichung des Prozesses $Z_t := X_t / Y_t$ in kanonischer Form!

Hinweis 1: Produktregel

Hinweis 2: Setzen Sie als bekannt voraus: $d\left(\frac{1}{Y_t}\right) = (\delta^2 - \gamma)\frac{1}{Y_t} dt - \delta \frac{1}{Y_t} dW_t$.

Lösungsskizze:

a) Definiere

$$h(t) = (1+r)^{-t} = \exp[-t \ln(1+r)] .$$

Hieraus folgt mit $u := \ln(1+r)$

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\ln(1+r)h(t) = -uh(t)$$

bzw.

$$dh(t) = -uh(t)\,dt .$$

Insbesondere besitzt diese Differentialgleichung keinen Diffusionsterm, d.h. es gilt $\sigma_h = 0$.

Produktregel:

$$dV_t = d(hS)_t = h_t dS_t + S_t dh_t + \sigma_S \sigma_h dt \,.$$

Für die Geometrische Brownsche Bewegung gilt $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t \, dW_t$.

Insgesamt gilt damit:

$$\begin{aligned} dV_t &= h_t(\mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t) - S_t \, uh_t \, dt \\ &= (\mu - u)\, h_t \, S_t \, dt + h_t \, \sigma S_t \, dW_t \\ &= (\mu - u)\, V_t \, dt + \sigma \, V_t \, dW_t \;. \end{aligned}$$

<u>Alternativer Lösungsweg:</u> (Basis: Lemma von Ito)

$$F(t, x) = (1+r)^{-t} \, x = e^{-ut} x$$

$$F_t = -u \, e^{-ut} \, x = -u \, F$$

$$F_x = e^{-ut} = \frac{1}{x} F$$

$$F_{xx} = 0$$

$$\mu_S = \mu x, \quad \sigma_S = \sigma x$$

$$\begin{aligned} \mu_F &= F_t + F_x \, \mu_S + \frac{1}{2} F_{xx} \, \sigma_S^2 \\ &= -u \, F + \frac{1}{x} \cdot F \cdot \mu x = (\mu - u)\, F \end{aligned}$$

$$\sigma_F = \sigma_S \, F_x = \sigma x \frac{1}{x} F = \sigma F \,.$$

b) Produktregel:

$$d\left(X_t \frac{1}{Y_t} \right) = X_t \, d\left(\frac{1}{Y_t} \right) + dX_t \frac{1}{Y_t} + \sigma_X \sigma_{1/Y} \, dt \,.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} d\left(X_t \frac{1}{Y_t} \right) &= X_t \left[(\delta^2 - \gamma) \frac{1}{Y_t} dt - \delta \frac{1}{Y_t} dW_t \right] \\ &\qquad + (\mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dW_t) \frac{1}{Y_t} - \sigma X_t \, \delta \frac{1}{Y_t} dt \\ &= [(\delta^2 - \gamma) + \mu - \sigma\delta] \, \frac{X_t}{Y_t} dt + (\sigma - \delta) \frac{X_t}{Y_t} \, dW_t \end{aligned}$$

bzw. mit $Z_t := X_t / Y_t$ und Umsortierung der Parameter

$$dZ_t = [(\mu - \gamma) + \delta^2 - \sigma\delta] \, Z_t \, dt + (\sigma - \delta) \, Z_t \, dW_t \,.$$

Aufgabe 3: (25 Minuten)

Unterstellen Sie für die Kursentwicklung einer Aktie einen zweiperiodigen Binomialgitterprozess mit Startwert $s_0 = 200$ und einer prozentualen Aufwärtsbewegung von 30% bzw. einer prozentualen Abwärtsbewegung von 20% pro Periode. Der Zinssatz für eine sichere Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme betrage $r = 5\%$ und es herrsche eine flache Zinsstruktur.

a) Stellen Sie zunächst die Entwicklung des Aktienkurses von $t = 0$ bis $t = 2$ dar!

b) Bestimmen Sie auf Basis des Duplikationsprinzips den arbitragefreien Preis in $t = 0$ einer zweiperiodigen Europäischen Calloption auf die betrachtete Aktie. Der Ausübungspreis der Option sei 260.

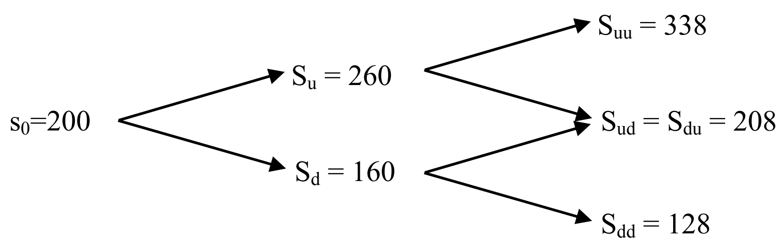
c) Betrachten Sie nun eine Bearanleihe (ohne Kuponzahlungen) auf die zugrunde liegende Aktie mit einer Laufzeit von 2 Jahren und einem Nennwert von 100 000. Die Partizipationsrate an der nicht-annualisierten (negativen!) Rendite der zugrunde liegenden Aktie betrage 40%.

   i) Bestimmen Sie den Marktwert der Bearanleihe durch (direkte) Duplikation des Rückzahlungsprofils der Anleihe!

   ii) Wie hoch ist der Marktwert, wenn die Bearanleihe zusätzlich einen jährlichen Nominalzins von 5% abwirft?

Lösungsskizze:

a)



b) Wert der Calloption

$$C_2 = \max\{S_2 - 260{,}0\}$$

Wertentwicklung daher

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & C_{uu} = 78 \\
 & C_u \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
C_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & C_{ud} = C_{du} = 0 \\
 & C_d \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & C_{dd} = 0
\end{tikzcd}
$$

Rekursive Bestimmung des Callpreises:

i) Bestimmung von C_u:

Duplikation in $t = 2$ ergibt

(I) $338x + (1.05)y = 78$

(II) $208x + (1.05)y = 0$.

Aus (I) – (II) folgt $130x = 78$ und damit $x = 0.6$.

Damit ist

$y = -208 \cdot 0.6 \cdot (1.05)^{-1} = -118.86$.

In $t = 1$ resultiert hieraus:

$C_u = 260x + y = 260 \cdot 0.6 - 118.86 = 37.14$

ii) Da $C_{ud} = C_{dd} = 0$ ist auch $C_d = 0$.

iii) Bestimmung von C_0:

Duplikation in $t = 1$ ergibt

(I) $260x + (1.05)y = 37.14$

(II) $160x + (1.05)y = 0$.

Aus (I) – (II) folgt $100x = 37$ und damit $x = 0.3714$.

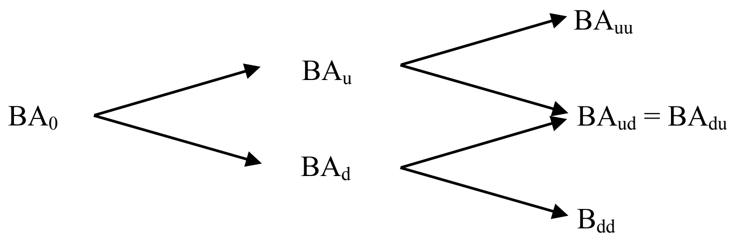
Aus (II) ergibt sich hieraus für y:

$y = -160 \cdot 0.3714 \cdot (1.05)^{-1} = -56.59$.

Hieraus folgt insgesamt

$C_0 = 260 \cdot 0.3714 - 56.59 = 17.69$.

c) i) Entwicklung Bear-Anleihe:



Die Bear-Anleihe zahlt einen Bonus auf den Nennwert nur im Falle einer negativen Renditeentwicklung der Aktie, d. h. zunächst gilt

$\mathbf{BA_{uu} = BA_{ud} = 100\,000}$.

Es gilt ferner $S_{dd} = (0.8)^2 S_0 = 0.64\, S_0$.

Der *Bonus* im Zustand dd lautet somit

$100\,000 \cdot 0.4 \cdot 0.36 = 14\,400$.

[Alternativ: Rückzahlung in dd lautet

$$100\,000[1 - 0.4\,\frac{S_{dd} - S_0}{S_0}] = 100\,000\,[1 - 0.4(-0.36)]$$
$$= 100\,000 \cdot 1.144 = 114\,400$$

Insgesamt gilt somit $\mathbf{BA_{dd} = 114\,400}$.

α) Bestimmung BA_u:

Da aus Sicht des Knotens u (in t = 1) die Rückzahlung in t = 2 sicher ist, d.h. sowohl in uu als auch in ud 100 000 beträgt, gilt

$$BA_u = 100\,000(1.05)^{-1} = 95\,238.095\,.$$

β) Bestimmung BA_d:

(I) 208x + (1.05)y = 100 000

(II) 128x + (1.05)y = 114 400 .

Aus (I) – (II) folgt 80x = –14 400 und damit x = –180. Hieraus folgt

$$y = (100\,000 + 208 \cdot 180)(1.05)^{-1}$$
$$= 137\,440(1.05)^{-1} = 130\,895.24$$

und damit

$$BA_d = 160(-180) + 130\,895.24$$
$$= -28\,800 + 130\,895.24 = 102\,095.24\,.$$

γ) Bestimmung BA_0:

(I) $260x + (1.05)y = 95\,238.095$

(II) $160x + (1.05)y = 102\,095.24$.

Aus (I) – (II) folgt $100x = -6\,857.145$ und damit $x = -68.57145$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} y &= [102\,095.24 + 160(68.57145)](1.05)^{-1} \\ &= (102\,095.24 + 10\,971.432)(1.05)^{-1} \\ &= 113\,066.67(1.05)^{-1} = 107\,682.55 \end{aligned}$$

Hieraus folgt damit insgesamt

$$\begin{aligned} BA_0 &= -200(68.57145) + 107\,682.55 \\ &= -13\,714.29 + 107\,682.55 = \mathbf{93\,968.26}. \end{aligned}$$

Im Vergleich dazu lautet der Wert einer vergleichbaren Anleihe ohne Bonus $100\,000(1.05)^{-2} = 90\,702.95$.

ii) Die zusätzlichen Zahlungen sind $100\,000(0.05) = 5\,000$ sowohl in $t = 1$ als auch in $t = 2$. Bewertung durch Barwertbildung zu 5% ergibt eine Marktwerterhöhung von

$$\begin{aligned} 5\,000(1.05)^{-1} + 5\,000(1.05)^{-2} &= 4\,761.90476 + 4\,535.14739 \\ &= \mathbf{9\,297.05} . \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (20 Minuten)

a) Gegeben sei eine einfache DAX-Bullanleihe (ohne Kuponzahlungen) mit einer Laufzeit von 2 Jahren und einem Nennwert von 100 000. Die Partizipationsrate an der nicht-annualisierten positiven DAX-Rendite betrage 20%. Der DAX stehe bei Emission der Anleihe bei 5000.

i) Welches Rückzahlungsprofil weist diese Bullanleihe in t = 2 auf?

ii) Zerlegen Sie dieses Rückzahlungsprofil so, dass ein Bestandteil dieser Zerlegung eine **Putoption** ist. Wie lässt sich der zweite Bestandteil dieser Zerlegung repräsentieren?

b) Ein Investor habe ein Budget von EUR 500.-. Der Investor möchte ein Portfolio aus in t = 1 fälligen Einheits-Zerobonds sowie Long Calls auf die XY-Aktie bilden, das in t = 1 ein identisches Rückzahlungsprofil wie ein (voll investiertes) 1:1 Put Hedge besitzt.

Die zur Verfügung stehenden Optionen weisen dabei folgende Ausstattungsmerkmale auf. Die Puts laufen 1 Jahr, haben einen Ausübungspreis von EUR 130.- und einen Marktwert von EUR 38.81. Der Call auf die XY-Aktie laufe ebenfalls 1 Jahr, habe einen Ausübungspreis von EUR 130.- und einen Marktwert von EUR 15.-. **Unterstellen Sie, dass sämtliche eingegangenen Optionspositionen auf Kredit finanziert werden**. Der einheitliche Marktzins für eine Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme betrage 5%. Die XY-Aktie besitzt in t = 0 einen Marktpreis von EUR 100. Wie lauten die Positionsanteile, die für eine Duplikation notwendig sind?

Lösungsskizze:

a) i) Rückzahlungsprofil ist gegeben durch

$$B_2 = \max\left\{100\,000,\, 100\,000\left[1+0.2\left(\frac{DAX(2)-5\,000}{5\,000}\right)\right]\right\}$$
$$= \max\{100\,000,\, 100\,000 + 4[DAX(2)-5\,000]\}.$$

ii) Zerlegung des Rückzahlungsprofils unter ii) durch Herausziehen der zweiten Komponente.

$$B_2 = 100\,000 + 4[DAX(2)-5\,000]$$
$$+ \max\{100\,000 - 100\,000 - 4[DAX(2)-5\,000], 0\}$$
$$= 80\,000 + 4DAX(2) + 4\max\{5\,000 - DAX(2), 0\}.$$

Die zweite Komponente dieser Zerlegung besteht aus 4 zweijährigen Puts auf den DAX mit Ausübungspreis X = 5 000. Die erste Komponente besteht aus einem zweijährigen Zerobond mit Rückzahlung 80 000 sowie dem Wert von 4 DAX-Anteilen (in $t = 2$).

b) Bezeichne S_1 den Wert der XY-Aktie in $t = 1$. In $t = 0$ können 5 Aktien erworben werden. Damit ist auch eine Long-Position in 5 Puts zu etablieren.

i) Position V_1 des Put Hedge in $t = 1$:

$$\begin{aligned} V_1 &= 5[S_1 + \max(130 - S_1, 0)] - 5P_0(1.05) \\ &= 5\max(S_1, 130) - 194.05(1.05) \\ &= 5\max(S_1, 130) - 203.75\,. \end{aligned}$$

ii) Der Einheitszerobond kostet in $t = 0$ $(1.05)^{-1}$ Geldeinheiten. Der Investor kann sein gesamtes Budget zum Erwerb von Einheitszerobonds einsetzen, da die Einnahmen aus der Long Call-Position auf Kredit finanziert werden. In $t = 0$ gilt somit beim Erwerb von x Einheitszerobonds und einem sicheren Zins von 5%:

$$x(1.05)^{-1} = 500\,,$$

d. h. $x = 500(1.05) = \mathbf{525}$.

Duplikationsgleichung in $t = 1$ bei Vorliegen von y Long Calls:

$$\begin{aligned} &x \cdot 1 + y\max(S_1 - 130, 0) - yC_0(1.05) \\ &= 5\max(S_1, 130) - 203.75\,. \end{aligned}$$

Mit $x = 525$, $C_0 = 15$ und bei einer Wahl von $S_1 = 130$ resultiert hieraus:

$$525 - 15.75y = 650 - 203.75 \quad \text{bzw.} \quad 15.75y = 78.75$$

und damit

$$\mathbf{y = 5}\,.$$

Es sind somit insgesamt **525 Einheitszerobonds** zu erwerben und **5 Calls** zu kaufen, um die voll investierte Put Hedge-Position zu duplizieren.