**Prüfung Finanzmathematik und Investmentmanagement 2010**

**<u>Aufgabe 1:</u>** (20 Minuten)

a) Auf der Grundlage einer Lagrange-Optimierung ergibt sich die folgende funktionale Form für die $(\mu, \sigma)$-Koordinaten der (rein riskanten) Randportfolios (lokal varianzminimalen Portfolios):

$$\sigma^2 = 5\mu^2 - 2\mu + 0.25 \ .$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialgeraden unter der Annahme eines sicheren Zinses von $r_0 = 0.05$!

b) Gegeben sei ein synthetisch erzeugter Covered Short Call (Basistitel + Call short). Wie lautet die Delta-Normal-Approximation für diese Position über ein Zeitintervall [t, t+h]?

**<u>Lösungsskizze:</u>**

a) Nach Voraussetzung gilt

(I) $\sigma^2 = 5\mu^2 - 2\mu + 0.25.$

Die Gleichung der Tangentialgeraden ist allgemein gegeben durch (a > 0)

(II) $\mu = 0.05 + a\sigma .$

Einsetzen von (II) in (I) ergibt:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= 5(0.05 + a\sigma)^2 - 2(0.05 + a\sigma) + 0.25 \\ &= 5a^2\sigma^2 - 1.5a\sigma + 0.1625.\end{aligned}$$

Dies führt zu der Gleichung

(III) $(5a^2 - 1)\sigma^2 - 1.5a\sigma + 0.1625 = 0 .$

Bestimmung der Nullstellen führt auf

(IV) $$\sigma_{1,2} = \frac{1.5a \pm \sqrt{2.25a^2 - 4(5a^2 - 1)\,0.1625}}{10a^2 - 2} = \frac{1.5a \pm \sqrt{0.65 - a^2}}{10a^2 - 2}$$

Eine einwertige Nullstelle liegt dann vor, wenn die Diskriminante gleich null ist, d.h. es muss gelten: $a^2 = 0.65$.

Aufgrund von a > 0 folgt hieraus a = 0.8062.

Die Gleichung der Tangentialgeraden ist somit gegeben durch

(V) $\mu = 0.05 + 0.8062\sigma .$

b) Synthetische Covered Short Call-Position:

$CSC_t = S_t - C_t$,

wobei $S_t$ den Kurs des Underlying und $C_t$ den Wert der entsprechenden Call-Option bezeichne.

Zu approximieren: $CSC_{t+h} - CSC_t$

Ansatz Delta-Approximation:

$$CSC_{t+h} - CSC_t \approx \frac{\partial CSC_t}{\partial S_t}(S_{t+h} - S_t)$$

Nun gilt:

$\frac{\partial CSC_t}{\partial S_t} = \frac{\partial (S_t - C_t)}{\partial S_t} = \frac{\partial S_t}{\partial S_t} \cdot \frac{\partial C_t}{\partial S_t} = 1 - \Delta_C(t)$, wobei $\Delta_C(t)$ das Call-Delta bezeichne.

Normal-Approximation:

Zusätzlich wird angenommen, dass $S_{t+h} - S_t$ normalverteilt ist.

**Aufgabe 2:** (25 Minuten)

a) Betrachten Sie den stochastischen Prozess $(t \geq 0)$

$$X_t = (c^{1/3} + \tfrac{1}{3} W_t)^3 .$$

Dabei ist $W_t$ der Standard-Wienerprozess und $c > 0$ eine Konstante. Wie lautet die stochastische Differentialgleichung dieses Prozesses in kanonischer Form (d.h. Darstellung von Drift und Diffusion als Funktionen von $X_t$)?

b) Betrachten Sie den stochastischen Prozess $(t \geq 0)$

$$V_t = \exp\left( - \int_0^t r(s)\, ds \right) S_t ,$$

wobei $S_t$ einer Geometrischen Brownschen Bewegung folgt. Die reelle Funktion $r(t) \geq 0$ entspricht dabei einer (deterministischen) Zinsintensität, d.h. der Prozess $V_t$ ist der entsprechende diskontierte Kursprozess.

Wie lautet die stochastische Differentialgleichung dieses Prozesses in kanonischer Form (d.h. Darstellung von Drift und Diffusion als Funktionen von $V_t$)?

Hinweise zu Teilaufgabe b):

a) Produktregel

b) Differentiation von Stammfunktionen bei Riemann-Integralen.

**<u>Lösungsskizze:</u>**

a) $X_t$ ist ein Bild des Wienerprozesses $W_t$ unter der folgenden Funktion:

$$F(t,x) = F(x) = (c^{1/3} + \tfrac{1}{3}x)^3.$$

Partielle Ableitungen:

$$F_t = 0, \quad F_x = 3(c^{1/3} + \tfrac{1}{3}x)^2 \cdot \tfrac{1}{3} = (c^{1/3} + \tfrac{1}{3}x)^2$$

$$F_{xx} = 2(c^{1/3} + \tfrac{1}{3}x) \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}(c^{1/3} + \tfrac{1}{3}x).$$

Lemma von Ito $(\mu_W = 0,\ \sigma_W = 1)$:

$$\begin{aligned}\mu_F &= F_t + F_x\,\mu_W + \tfrac{1}{2}F_{xx}\,\sigma_W^2 \\ &= \tfrac{1}{3}(c^{1/3} + \tfrac{1}{3}x) = \tfrac{1}{3}F^{1/3}\end{aligned}$$

$$\sigma_F = F_x\sigma_W = (c^{1/3} + \tfrac{1}{3}x)^2 = F^{2/3}.$$

Stochastische Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}dX_t &= \tfrac{1}{3}(c^{1/3} + \tfrac{1}{3}W_t)\,dt + (c^{1/3} + \tfrac{1}{3}W_t)^2\,dW_t \\ &= \tfrac{1}{3}X_t^{1/3}\,dt + X_t^{2/3}\,dW_t\ .\end{aligned}$$

<u>Alternativer Lösungsweg:</u> (Basis: Lemma von Ito)

$$F(t,x) = \exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right)x$$

$$F_t = -r(t)\exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right)x = -r(t)\,F$$

$$F_x = \exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right) = \frac{1}{x}F$$

$$F_{xx} = 0$$

$$\mu_S = \mu x, \quad \sigma_S = \sigma x$$

$$\begin{aligned}\mu_F &= F_t + F_x\,\mu_S + \frac{1}{2}F_{xx}\,\sigma_S^2 \\ &= -r(t)\,F + \frac{1}{x}\cdot F\cdot \mu x = [\mu - r(t)]F\end{aligned}$$

$$\sigma_F = \sigma_S\,F_x = \sigma x\frac{1}{x}F = \sigma F.$$

b) Definiere

$$h(t) = \exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right).$$

Es gilt

$$\frac{dh(t)}{dt} = -r(t)\,h(t)$$

bzw.

$$h(t) = -r(t)\,h(t)\,dt\,.$$

Insbesondere besitzt diese Differentialgleichung keinen Diffusionsterm, d.h. es gilt $\sigma_h = 0$.

Produktregel:

$$dV_t = d(hS)_t = h_t dS_t + S_t dh_t + \sigma_S\,\sigma_h dt\,.$$

Für die Geometrische Brownsche Bewegung gilt $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t\,dW_t$.

Insgesamt gilt damit:

$$\begin{aligned} dV_t &= h_t(\mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t) - S_t r(t)\,h(t)\,dt \\ &= (\mu - r_t)\,h_t\,S_t\,dt + h_t\,\sigma S_t\,dW_t \\ &= (\mu - r_t)\,V_t\,dt + \sigma V_t\,dW_t\,. \end{aligned}$$

**<u>Aufgabe 3:</u>** (20 Minuten)

Unterstellen Sie für den Basistitel einer Terminposition einen Binomialgitterprozess mit Startwert $s_0$ = 100 und einer prozentualen Aufwärtsbewegung von 20% bzw. einer prozentualen Abwärtsbewegung von 10% pro Periode. Der einperiodige Zinssatz für eine sichere Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme betrage 5%.

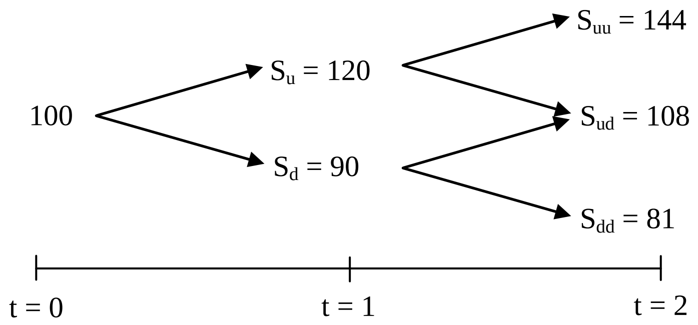
a) Bestimmen Sie auf Basis des Duplikationsprinzips den arbitragefreien Preis in t = 0 einer <u>zwei</u>periodigen Calloption auf den Basistitel. Der Ausübungspreis der Option sei 126.

b) Bestimmen Sie auf Basis des Duplikationsprinzips den arbitragefreien Preis in t = 0 eines <u>drei</u>periodigen Forwardkontrakts auf den Basistitel. Welche Beziehung weisen der arbitragefreie Forwardpreis und der Startwert des Basistitels auf?

<u>Hinweis zu Teilaufgabe b):</u> Ein rekursives Vorgehen ist in diesem Fall nicht notwendig!

**Lösungsskizze:**

a) Entwicklung Basistitel:




Die Rückflüsse der zweiperiodigen Calloption mit Strike 126 ergeben sich zu $(C_{uu}, C_{ud}, C_{dd}) = (18, 0, 0)$. Der Optionspreis ist – im Unterschied zu Aufgabenteil b) rekursiv zu bestimmen.

Wir fixieren nun den Zustand $S_u$ zum Zeitpunkt t = 1. Die weitere Entwicklung des Prozesses entspricht dann dem einperiodigen Binomialfall. Erwirbt der Investor in t = 1 x Einheiten des Basistitels und y der sicheren Anlage, so gelten für die Duplikationsposition in t = 2 dann die folgenden Bedingungen:

$144x + 1.05y = 18$

$108x + 1.05y = 0.$

Hieraus folgt $x = ½$ und $y = –54(1.05)^{-1} = –51.4286$.

In t = 1 ergibt sich hieraus

$C_u = 120x + y = 60 – 51.4286 = 8.5714.$

Da $(C_{ud}, C_{dd}) = (0, 0)$, muss auch $C_d = 0$ sein.

Duplikation von $(C_u, C_d)$ erfordert in analoger Weise

$120x + 1.05y = 8.5714$

$90x + 1.05y = 0.$

Hieraus folgt 30x = 8.5714 und damit x = 0.2857.

Für y resultiert hieraus $y = -25.7142\ (1.05)^{-1} = -24.4897$.

In t = 0 resultiert hieraus schließlich

$C_0 = 100x + y = 28.57 - 24.4897 = 4.0803 \approx 4.08$.

Der gesuchte Wert der zweijährigen Calloption ist somit 4.08.

b) Für Dreiperiodenfall ergeben sich aus der Weiterentwicklung des Zweiperiodenfalls unter a) die folgenden möglichen Werte des Basistitels:

$$\begin{aligned} S_{uuu} &= 172.8 \\ S_{uud} = S_{udu} &= 129.6 \\ S_{udd} = S_{ddu} &= 97.2 \\ S_{ddd} &= 72.9\,. \end{aligned}$$

Die in t=3 mögliche Werte des Forwards sind somit gegeben durch $172.8 - F_0$, $129.6 - F_0$, $97.2 - F_0$ und $72.9 - F_0$, wobei $F_0$ der zu bestimmende arbitragefreie Forwardpreis ist.

Erwirbt der Investor in t=0 x Einheiten des Basistitels und y Einheiten der sicheren Anlage, so gelten für die Duplikationsposition die folgenden Bedingungen:

(1) $172.8x + (1.05)^3\, y = 172.8 - F_0$

(2) $129.6x + (1.05)^3\, y = 129.6 - F_0$

(3) $97.2x + (1.05)^3\, y = 97.2 - F_0$

(4) $72.9x + (1.05)^3\, y = 72.9 - F_0$ .

Aus (beispielsweise) (1) – (2) resultiert x=1 und damit $y = -F_0(1.05)^{-3}$.

Da der Forward in t=0 keinen Kapitaleinsatz erfordert, muss schließlich für die Duplikationsposition in t=0 gelten:

$0 = 100x + y = 100 - F_0(1.05)^{-3}$

und damit insgesamt:

$$F_0 = 100\ (1.05)^3 = 115.76.$$

Der Forwardpreis entspricht somit dem um drei Perioden aufgezinsten Kassapreis (Cost of Carry-Formel).

**Aufgabe 4:** (20 Minuten)

a) Weisen Sie nach, dass ein T-jähriges Zertifikat des Typus "Zerobond plus Long Call" ein T-jähriges Zertifikat des Typus "eine H-Aktie plus Long Put", zum Zeitpunkt T zu duplizieren vermag (dabei besitzen Call und Put jeweils die H-Aktie als Underlying).

Welches sind die Ausübungspreise von Call und Put bei dieser Duplikationsposition?

Was ist der entsprechende Rückzahlungsbetrag des Zerobond?

Hinweis: Zerlegen Sie das Rückzahlungsprofil eines Garantiezertifikats mit Garantiebetrag G auf zwei alternative Weisen.

b) Unter welchen Bedingungen ist eine T-jährige Aktienanleihe zu einem T-jährigen Diskontzertifikat äquivalent?

c) Ein Investor habe ein Budget von EUR 200.-. Der Investor möchte ein Portfolio aus in $t = 1$ fälligen Einheits-Zerobonds sowie Short Puts auf die XY-Aktie bilden, das in $t = 1$ ein identisches Rückzahlungsprofil wie ein (voll investierter) Covered Short Call besitzt. Die Puts laufen 1 Jahr, haben einen Ausübungspreis von EUR 130.- und einen Marktwert von EUR 38.81. Der Call auf die XY-Aktie laufe ebenfalls 1 Jahr, habe einen Ausübungspreis von EUR 130.- und einen Marktpreis von EUR 15.-. Put- und Callprämie können zu einem Zinssatz von 5% angelegt werden. Die XY-Aktie besitzt in $t = 0$ einen Marktpreis von EUR 100. Wie lauten die Positionsanteile, die für eine Duplikation notwendig sind?

**Lösungsskizze:**

a) Bezeichne $S_T$ den Marktwert der H-Aktie in T.

Position Garantiezertifikat in T:

$$\max(S_T, G)$$

Zerlegung 1:

$$\max(S_T, G) = S_T + \max(G - S_T, 0)$$

Der zweite Term ist eine Long Put-Position, der Ausübungspreis des Put ist G.

Zerlegung 2:

$$\max(S_T, G) = G + \max(S_T - G, 0)$$

Der erste Term entspricht einem (T-jährigen) Zerobond mit Rückzahlungsbetrag G, der zweite einer Long Call-Position, wobei der Ausübungspreis des Call ebenfalls G ist.

b) Rückzahlungsstrom T-jährige Aktienanleihe:

$$\{Z, Z, \ldots, Z, Z + \min(N, n\,S_T)\}.$$

Dabei entspricht Z der jährlichen Kuponzahlung, N dem Nennwert der Anleihe, n der Anzahl der im Ausübungsfall gelieferten Aktien und $S_T$ ihrem Kurswert im Zeitpunkt T.

Rückzahlungsstrom T-jähriges Diskontzertifikat:

$\{0,0,...,0, \min(S_T, C)\}$.

Dabei entspricht C dem Cap.

Damit muss für eine Äquivalenz gelten:

i) gleicher Basistitel

ii) $Z = 0$

iii) $N = C$

iv) $n = 1$.

c) Bezeichne $S_1$ den Wert der XY-Aktie in t = 1. In t = 0 können 2 Aktien erworben werden. Damit ist auch eine Short-Position in 2 Calls zu etablieren.

i) Position $V_1$ des Covered Short Call in t = 1:

$$\begin{aligned} V_1 &= 2[S_1 - \max(S_1 - 130, 0)] + 2C_0(1.05) \\ &= 2\min(S_1, 130) + 30(1.05) \\ &= 2\min(S_1, 130) + 31.50\ . \end{aligned}$$

ii) Der Einheitszerobond kostet in t = 0 $(1.05)^{-1}$ Geldeinheiten. Der Investor kann sein gesamtes Budget zum Erwerb von Einheitszerobonds einsetzen, da die Einnahmen aus der Short Put-Position angelegt werden. In t = 0 gilt somit beim Erwerb von x Einheitszerobonds und einem sicheren Zins von 5%:

$$x(1.05)^{-1} = 200\ ,$$

d.h. $x = 200(1.05) = 210$

Position in t = 1 bei Vorliegen von y Short Puts:

$$\begin{aligned} & x \cdot 1 - y\max(130 - S_1, 0) + y P_0(1.05) \\ & = 2\min(S_1, 130) + 31.50 \end{aligned}$$

Mit x = 210, $P_0 = 38.81$ und bei einer Wahl von $S_1 = 130$ resultiert hieraus:

$$210 + 40.75y = 260 + 31.50$$

und damit

$$y = 2\ .$$

Es sind somit 210 Einheitszerobonds zu erwerben und 2 Puts zu verkaufen.