Bericht zur Prüfung im Oktober 2009 über Finanzmathematik und Investmentmanagement (Grundwissen)

Peter Albrecht (Mannheim)

Am 16. Oktober 2009 wurde zum vierten Mal eine Prüfung im Fach Finanzmathematik und Investmentmanagement nach PO III (Grundwissen Teil A) durchgeführt. Es waren 274 Teilnehmerinnen und Teilnehmer zu verzeichnen.

Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der vier Aufgaben gestellt wurden, die sämtlich zu bearbeiten waren. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 40 von 90 möglichen Punkten erzielt werden.

<u>Aufgabe 1:</u> (20 Minuten)

Gehen Sie aus von der folgenden allgemeinen Gleichung für den effizienten Rand bei einem rein riskanten Anlagespektrum ($h > 0,\ \mu \geq \mu_0$)

$$h\sigma^2 = (\mu_0 - \mu)^2 + h\sigma_0^2,$$

wobei (μ_0, σ_0) die Rendite-/Risikoposition des global varianzminimalen Portfolios bezeichne.

a) Bestimmen Sie die Gleichung für den effizienten Rand nach Einführung einer sicheren Anlage mit risikoloser Verzinsung $r_0 < \mu_0$!

b) Bestimmen Sie die Standardabweichung des Tangentialportfolios!

<u>Hinweis 1:</u> Betrachten Sie den Term $\mu_0 - r_0$ als eine (nicht mehr weiter aufzuspaltende) Einheit!

<u>Hinweis 2:</u> Verwenden Sie die Sharpe Ratio

$$SR_0 = \frac{\mu_0 - r_0}{\sigma_0}$$

des varianzminimalen Portfolios!

Lösungsskizze:

a) Der effiziente Rand nach Einführung einer sicheren Anlage ist eine Gerade. Setze Gerade in Punkt-Steigungs-Form an:

(I) $$\mu = r_0 + a\sigma$$

Zu bestimmen ist dann der Parameter a.

Die Gleichung des effizienten Randes lautet

(II) $$h\sigma^2 = (\mu_0 - \mu)^2 + h\sigma_0^2 .$$

Aus Einsetzen von (I) und (II) resultiert:

$$\begin{aligned} h\sigma^2 &= (\mu_0 - r_0 - a\sigma)^2 + h\sigma_0^2 \\ &= (\mu_0 - r_0)^2 - 2a(\mu_0 - r_0)\sigma + a^2\sigma^2 + h\sigma_0^2 . \end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in der Variablen σ der allgemeinen Form

(III) $$A\sigma^2 + B\sigma + C = 0 ,$$

wobei

$A = a^2 - h$

$B = -2a(\mu_0 - r_0)$

$C = (\mu - r_0)^2 + h\sigma_0^2 .$

Diese besitzt die Lösung

(IV) $$\sigma_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} .$$

Der effiziente Rand nach Einführung einer sicheren Anlage ist eine Tangente. Die quadratische Gleichung darf daher nur eine Nullstelle aufweisen. Dies ist gleich bedeutend mit der Bedingung $B^2 = 4AC$.

Es gilt mithin die Bedingung

(V) $$4a^2(\mu_0 - r_0)^2 = 4(a^2 - h)[(\mu_0 - r_0)^2 + h\sigma_0^2]$$

bzw.

(VI) $$0 = a^2 h\sigma_0^2 - h[(\mu_0 - r_0)^2 + h\sigma_0^2] .$$

Hieraus resultiert

(VII) $$a^2 = \frac{(\mu_0 - r_0)^2 + h\sigma_0^2}{\sigma_0^2} = SR_0^2 + h$$

bzw.

(VIII) $$a = \sqrt{h + SR_0^2} \, .$$

b) Die Standardabweichung des Tangentialportfolios ist durch die Lösung (IV) gegeben, wobei $B^2 = 4AC$ erfüllt, d.h. es gilt

$$\sigma_T = \frac{-B}{2A} = \frac{2a(\mu_0 - r_0)}{2(a^2 - h)} = \frac{a(\mu_0 - r_0)}{a^2 - h} = \frac{a(\mu_0 - r_0)}{SR_0^2} \, .$$

<u>Aufgabe 2:</u> (25 Minuten)

Gegeben seien die stochastischen Prozesse $\{X_t\}$ sowie $\{Y_t\}$, die Lösungen der stochastischen Differentialgleichungen

$$dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dW_t$$

sowie

$$dY_t = \gamma Y_t \, dt + \delta Y_t \, dW_t$$

sind.

a) Bestimmen Sie die stochastische Differentialgleichung des Prozesses $Z_t := 1/X_t$ auf der Basis des Lemmas von Ito!

b) Bestimmen Sie die stochastische Differentialgleichung des Prozesses $Z_t := X_t / Y_t$!
<u>Hinweis:</u> Gehen Sie zur Lösung dieser Aufgabe direkt von der (als bekannt vorausgesetzten) expliziten Form der Geometrischen Brownschen Bewegung aus!

<u>Lösungsskizze:</u>

a) Betrachte die Transformationsfunktion $F(x) = 1/x$ für $x > 0$.
Es gilt $F_t = 0$, $F_x = -x^{-2}$, $F_{xx} = 2x^{-3}$.
Für die Geometrische Brownsche Bewegung $\{X_t\}$ gilt
$\mu_X = \mu x$ und $\sigma_X = \sigma x$.
Nach Ito gilt mithin:

$$\mu_Z = F_t + F_x\,\mu_X + \frac{1}{2}F_{xx}\sigma_X^2$$
$$= -\frac{1}{x^2}\cdot\mu x + \frac{1}{2}\,\frac{2}{x^3}\sigma^2\,x^2$$
$$= -\mu/x + \sigma^2/x$$
$$= (\sigma^2-\mu)/x = (\sigma^2-\mu)F$$

$$\sigma_Z = F_x\sigma_x = -\frac{1}{x^2}\cdot\sigma x = -\frac{\sigma}{x} = -\sigma F$$

Die gesuchte stochastische Differentialgleichung lautet somit

$$d(1/X_t) = (\sigma^2-\mu)\frac{1}{X_t}dt - \sigma\frac{1}{X_t}dW_t$$

bzw.

$$dZ_t = (\sigma^2-\mu)\,Z_t\,dt - \sigma Z_t dW_t\,.$$

b) Explizite Lösungen von X_t und Y_t:

$$X_t = x_0\exp\left\{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t\right\}$$

$$Y_t = y_0\exp\left\{\left(\gamma-\frac{1}{2}\delta^2\right)t+\delta W_t\right\}.$$

Hieraus folgt:

$$Z_t = X_t/Y_t$$
$$= \frac{x_0}{y_0}\exp\left\{\left[\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)-\left(\gamma-\frac{1}{2}\delta^2\right)\right]t+(\sigma-\delta)\,W_t\right\}$$
$$= \frac{x_0}{y_0}\exp\left\{\left[(\mu-\gamma)-\frac{1}{2}(\sigma^2-\delta^2)\right]t+(\sigma-\delta)\,W_t\right\}$$
$$= \frac{x_0}{y_0}\exp\left\{\left[(\mu-\gamma)-\frac{1}{2}(\sigma-\delta)^2+\delta^2-\sigma\delta\right]t+(\sigma-\delta)\,W_t\right\}.$$

Damit gilt für die stochastische Differentialgleichung:

$$dZ_t = \left[(\mu-\gamma)+\delta^2-\sigma\delta\right]Z_t dt + (\sigma-\delta)\,Z_t\,dW_t\ .$$

<u>Aufgabe 3:</u> (25 Minuten)

a) Das Portefeuille eines Investors bestehe aus n Zertifikaten auf den DAX. Unter Einsatz von Futures auf den DAX soll nun zum Zeitpunkt s eine Hedge-Position mit folgender

Eigenschaft etabliert werden: Zum Zeitpunkt $t > s$ soll die Hedge-Position G_t „nutzenmaximal" sein, d.h. zu einem möglichst hohen Wert der Risikopräferenzfunktion $\Phi(G_t) = E(G_t) - a\ \mathrm{Var}(G_t)$ des Investors führen ($a > 0$). Welchen Wert nimmt die optimale Zahl von zu verkaufenden Futures an? Vergleichen Sie dieses Resultat mit dem entsprechenden Ergebnis für eine varianzminimale Hedge-Position.

b) Ein Investor habe ein Budget von EUR 200.-. Der Investor möchte in $t = 1$ die Position eines Covered Short Call generieren, wobei er die zugrunde liegende Aktie in $t = 0$ zum Preis von EUR 100.- erwerben kann. In $t = 0$ sei weiter ein Call (Laufzeit: 1 Jahr) auf diese Aktie mit einem Ausübungspreis von EUR 130.- zu einem Marktpreis von EUR 15.- verfügbar. Der vereinnahmte Callpreis werde zum sicheren Zins angelegt. Der markteinheitliche sichere Zins betrage 5% p.a.

i) Welches Zahlungsprofil weist der unter diesen Bedingungen konstruierte Covered Short Call in $t = 1$ auf?

ii) Welchen maximalen Wert kann die so konstruierte Position in $t = 1$ annehmen?

iii) Für die Aktie gelte
$\ln S_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$,
wobei
$\mu = \ln s_0 + 0.1\, t$
$\sigma^2 = 0.18\, t$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit dem Covered Short Call in $t = 1$ einen geringeren Endwert zu erzielen, als bei vollständiger Investition des Budgets zum sicheren Zins?

<u>Hinweis:</u> Bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit in Termen der Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standardnormalverteilung (und nicht als expliziten numerischen Wert).

iv) Der Investor möchte nun ein Portfolio aus in $t = 1$ fälligen Einheits-Zerobonds sowie Short Puts auf die Aktie bilden, das in $t = 1$ ein identisches Rückzahlungsprofil wie der Covered Short Call besitzt. Die Puts laufen 1 Jahr, haben einen Ausübungspreis von EUR 130.- und einen Marktwert von EUR 20.-. Die vereinnahmte Putprämie kann wiederum zum sicheren Zins angelegt werden.

Aus wie vielen Einheits-Zerobonds und aus wie vielen Short Puts besteht das entsprechende Duplikationsportfolio?

<u>Lösungsskizze:</u>

a) Es bezeichne $\{K_t\}$ den Wertverlauf des Basistitels (DAX-Zertifikat) und $\{F_t\}$ entsprechend den Wertverlauf des Futures. Die Hedge-Position G_t zum Zeitpunkt t ist dann gegeben durch $G_t = n(K_t - K_s) - x(F_t - F_s)$, wenn sie zum Zeitpunkt s etabliert worden ist. Es folgt:

i) $E(G_t) = nE(K_t) - nK_s - xE(F_t) + xF_s$

ii) $Var(G_t) = n^2 Var(K_t) + x^2 Var(F_t) - 2nxCov(K_t, F_t)$

iii) $\Phi(G_t) = E(G_t) - aVar(G_t)$

iv) $0 = \dfrac{d\Phi}{dx} = F_s - E(F_t) - 2axVar(F_t) + 2anCov(K_t, F_t)$

v)
$$\begin{aligned} x &= \frac{2anCov(K_t, F_t) + F_s - E(F_t)}{2aVar(F_t)} \\ &= n\frac{Cov(K_t, F_t)}{Var(F_t)} - \frac{E(F_t) - F_s}{2aVar(F_t)} \\ &= n\beta_{KF}(t) - \frac{E(F_t) - F_s}{2a\,Var(F_t)} \quad . \end{aligned}$$

Der erste Term des letzten Ausdrucks entspricht dabei der optimalen Kontraktzahl im Falle des varianzminimalen Hedges, d.h. zur Etablierung des nutzenmaximalen Hedges ist diese Kontraktzahl zu reduzieren um den Wert $\dfrac{E(F_t) - F_s}{2a\,Var(F_t)}$.

b) Bezeichne S_1 den Wert der Aktie in t = 1. In t = 0 können 2 Aktien erworben werden. Damit ist auch eine Short-Position in 2 Calls zu etablieren.

i) Position V_1 des Covered Short Call in t = 1:
$$\begin{aligned} V_1 &= 2[S_1 - \max(S_1 - 130, 0)] + 2C_0(1.05) \\ &= 2\min(S_1, 130) + 30(1.05) \\ &= 2\min(S_1, 130) + 31.50 \ . \end{aligned}$$

ii) Der maximale Wert beträgt
$$260 + 31.50 = 291.50$$

iii) Der Endwert einer sicheren Anlage des Budgets von EUR 200.- beträgt 200(1.05) = 210. Zu evaluieren ist daher die Wahrscheinlichkeit
$$\begin{aligned} &P[2\min(S_1, 130) + 31.50 \le 210] \\ &= P[\min(S_1, 130) \le 89.25] \ . \end{aligned}$$
Da das Ereignis $\min(S_1, 130) \le 89.25$ nur eintreten kann, wenn $S_1 \le 89.25$, reduziert sich die zu bestimmende Wahrscheinlichkeit auf
$$\begin{aligned} &P(S_1 \le 89.25) = P(\ln S_1 \le 89.25) \\ &= P(\ln S_1 \le 4.49) \ . \end{aligned}$$
Es gilt

$$E(\ln S_1) = \ln 100 + 0.1 = 4.705$$
$$\sigma(\ln S_1) = \sqrt{Var(\ln S_1)} = \sqrt{0.18} = 0.424$$

Durch Standardisierung von ln S_1 folgt damit insgesamt

$$P\left[\frac{\ln S_1 - E(\ln S_1)}{\sigma(\ln S_1)} \leq \frac{4.49 - 4.705}{0.424}\right]$$
$$= \Phi(-0.507)\ .$$

iv) Der Einheitszerobond kostet in t = 0 $(1.05)^{-1}$ Geldeinheiten. Der Investor kann sein gesamtes Budget zum Erwerb von Einheitszerobonds einsetzen, da die Einnahmen aus der Short Put-Position angelegt werden. In t = 0 gilt somit beim Erwerb von x Einheitszerobonds und einem sicheren Zins von 5%:

$$x(1.05)^{-1} = 200\,,$$

d.h. $x = 200(1.05) = 210$

Position in t = 1 bei Vorliegen von y Short Puts:

$$x \cdot 1 - y\max(130 - S_1, 0) + y\,P_0\,(1.05)$$
$$= 2\min(S_1, 130) + 31.50$$

Mit x = 210, P_0 = 20 und bei einer Wahl von S_1 = 130 resultiert hieraus:

$$210 + 21y = 260 + 31.50$$
$$= 3.88\ .$$

Es sind somit 210 Einheitszerobonds zu erwerben und 3.88 Puts zu verkaufen.

<u>Aufgabe 4:</u> (20 Minuten)

a) Gegeben sei ein synthetisch erzeugtes Put-Hedge (Aktie long + Put long). Wie lautet die Delta-Normal-Approximation für diese Position über ein Zeitintervall [t, t+h]?

b) Gegeben sei eine Aktie mit bekanntem Marktwert s_0 in t = 0 und zufallsabhängigem Marktwert S_1 in t = 1. Betrachten Sie nun ein Zertifikat auf diese Aktie, das in t = 1 mindestens 90% des anfänglichen Marktwertes, ansonsten den Marktwert der Aktie in t = 1 auszahlt.

Wie lautet das Zahlungsprofil dieses Zertifikats in t = 1?

Zerlegen Sie dieses Zertifikat so, dass ein Bestandteil dieser Zerlegung eine Call-Option ist. Welches Wertpapier repräsentiert der zweite Bestandteil dieser Zerlegung?

c) Weisen Sie nach, dass ein T-jähriges Zertifikat des Typus "Zerobond plus Short Put" ein T-jähriges Zerfikat des Typus "eine H-Aktie plus Short Call", zum Zeitpunkt T zu duplizieren vermag (dabei besitzen Call und Put jeweils die H-Aktie als Underlying).

Welches sind die Ausübungspreise von Call und Put bei dieser Duplikationsposition?

Was ist der entsprechende Rückzahlungsbetrag des Zerobond?

Hinweis: Zerlegen Sie das Rückzahlungsprofil eines Diskontzertifikats mit Cap C auf zwei alternative Weisen.

Lösungsskizze:

a) Synthetische Put Hedge-Position

$PH_t = S_t + P_t$,

wobei S_t der Kurs des Underlying und P_t der Wert der entsprechenden Put-Option.

Zu approximieren: $PH_{t+h} - PH_t$

Delta-Approximation: $PH_{t+h} - PH_t \approx \frac{\partial PH_t}{\partial S_t}(S_{t+h} - S_t)$

Nun gilt:

$$\frac{\partial PH_t}{\partial S_t} = \frac{\partial (S_t + P_t)}{\partial S_t} = \frac{\partial S_t}{\partial S_t} + \frac{\partial P_t}{\partial S_t} = 1 + \Delta_P(t)$$

Normal-Approximation:

Zusätzlich wird angenommen, dass $S_{t+h} - S_t$ normalverteilt ist.

b) Zahlungsprofil in t = 1:

max (0.9 s_0, S_1)

Zerlegung:

$\max(0.9 s_0, S_1) = 0.9 s_0 + \max(S_1 - 0.9 s_0, 0)$.

Der zweite Term in dieser Zerlegung entspricht einer (einjährigen) Call-Option mit Ausübungspreis X = 0.9 s_0. Der erste Term entspricht dem Erwerb von 0.9 s_0 Einheits-zerobonds (Zerobonds mit Rückzahlung in Höhe einer Geldeinheit), die in t = 1 fällig werden.

c) Bezeichne S_t den Marktwert der H-Aktie in T.

Position Diskontzertifikat in T:

$\min(S_T, C)$

Zerlegung 1:

$$\begin{aligned}\min(S_T, C) &= S_T + \min(C - S_T, 0)\\ &= S_T - \max(S_T - C, 0)\end{aligned}$$

Der zweite Term ist eine Short Call-Position, der Ausübungspreis des Call ist C.

Zerlegung 2:

$$\begin{aligned}\min(S_T, C) &= C + \min(S_T - C, 0)\\ &= C - \max(C - S_T, 0)\end{aligned}$$

Der erste Term entspricht einem (T-jährigen) Zerobond mit Rückzahlungsbetrag C, der zweite einer Short Put-Position, wobei der Ausübungspreis des Put ebenfalls C ist.