Bericht zur Prüfung im Oktober 2008 über Finanzmathematik und Investmentmanagement (Grundwissen)

Peter Albrecht (Mannheim)

Am 17. Oktober 2008 wurde zum dritten Mal eine Prüfung im Fach Finanzmathematik und Investmentmanagement nach PO III (Grundwissen Teil A) durchgeführt. Es waren 238 Teilnehmerinnen und Teilnehmer zu verzeichnen.

Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der vier Aufgaben gestellt wurden, die sämtlich zu bearbeiten waren. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 45 von 90 möglichen Punkten erzielt werden.

Aufgabe 1: (20 Minuten)

a) Weisen Sie nach, dass für eine Rendite R mit Verteilungsfunktion F und Dichtefunktion f die Restriktion

$$P(R \leq z) = \varepsilon$$

für die Shortfallwahrscheinlichkeit äquivalent ist zu der Bedingung

$$z = F_\varepsilon ,$$

wobei F_ε das ε-Quantil von F bezeichne.

Hinweis: Wenn F eine Dichtefunktion besitzt, dann sind die Quantile von F jeweils eindeutig.

b) Nehmen Sie nun an, dass R normalverteilt ist, $R \sim N(\mu, \sigma^2)$. Weisen Sie nach, dass in diesem Falle die Shortfallrestriktion

$$P(R \leq z) = \varepsilon$$

äquivalent ist zu

$$\mu = z + N_{1-\varepsilon}\,\sigma ,$$

wobei $N_{1-\varepsilon}$ das (1–ε)-Quantil der Standardnormalverteilung bezeichne.

Hinweis: $N_\varepsilon = -N_{1-\varepsilon}$.

c) Auf der Grundlage einer Lagrange-Optimierung ergibt sich die folgende funktionale Form für die (μ,σ)-Koordinaten der lokal (d.h. für einen festen Erwartungswert) varianzminimalen Portfolios:

$$\sigma^2 = \mu^2 - 2\mu + 0.26 \;.$$

Als Shortfallrestriktion sei die Bedingung

$$P(R_P \le 0.2) = 0.1$$

gefordert, wobei R_P die einperiodige Portfoliorendite bezeichne. R_P folge einer Normalverteilung.

Bestimmen Sie unter diesen Voraussetzungen die (μ,σ)-Position des optimalen Portfolios mit maximaler erwarteter Rendite!

Hinweis: $N_{0.90} = 1.28$.

Lösungsskizze:

a) Definition des ε-Quantils

$$P(R \le F_\varepsilon) = \varepsilon \,.$$

Bedingung an z:

$$P(R \le z) = \varepsilon \,.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit (vgl. Hinweis) des ε-Quantils folgt hieraus:

$$z = F_\varepsilon \,.$$

b) Bedingung:

$$P(R \le z) = \varepsilon \,.$$

Äquivalent:

$$P\left(\frac{R-\mu}{\sigma} \le \frac{z-\mu}{\sigma}\right).$$

Dabei ist $X = (R-\mu)/\sigma$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Aufgrund von a) und Hinweis gilt

$$\frac{z-\mu}{\sigma} = N_\varepsilon = -N_{1-\varepsilon}$$

Auflösung nach μ:

$$\mu = z + N_{1-\varepsilon}\sigma \,.$$

c) Äquivalente Form der Shortfallrestriktion gemäß a):

$$\mu = 0.2 + 1.28\sigma \,.$$

Einsetzen in

$$\sigma^2 = \mu^2 - 2\mu + 0.26$$

ergibt

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (0.2 + 1.28\sigma)^2 - 2(0.2 + 1.28\sigma) + 0.26 \\ &= (0.04 + 0.512\sigma + 1.6384\sigma^2) - (0.4 + 2.56\sigma) + 0.26 \\ &= 1.6384\sigma^2 - 2.048\sigma - 0.1\end{aligned}$$

und somit

$$0.6384\sigma^2 - 2.048\sigma - 0.1 = 0 .$$

Hieraus folgt (nur positive Lösung zulässig)

$$\sigma = 3.256 .$$

Die zugehörige μ-Position ist

$$\mu = 0.2 + (1.28)(3.256) = 4.368 .$$

Die gesuchte Position ist gegeben durch (4.368, 3.256).

<u>Aufgabe 2:</u> (20 Minuten)

a) Gegeben sei die geometrische Brownsche Bewegung in ihrer Darstellung als stochastische Differentialgleichung:

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t .$$

Bestimmen Sie die stochastische Differentialgleichung

$$dY_t = \mu(t, Y_t) \, dt + \sigma(t, Y_t) \, dW_t$$

des folgenden Bildprozesses:

$$Y_t = \ln S_t .$$

b) Gegeben sei eine Putoption, die nach Black/Scholes bewertet ist. Wie hoch ist die Standardabweichung der Änderung des Wertes der Optionsposition über ein Intervall der Länge h unter Anwendung der Delta-Normal-Methode?

<u>Hinweise:</u> 1) Das Put-Delta auf Basis der Black/Scholes-Formel ist gegeben durch $\partial P_t / \partial S_t = -N[-d_1(t)]$.

2) Die Rendite R_h des Basis-Objekts sei gegeben durch $R_h \sim N(\mu h, \sigma^2 h)$

Lösungsskizze:

a) Nach Ito gilt für $Y_t = u(t, S_t)$:

(1) $\mu(t, Y_t) = u_t + u_x \mu(t, S_t) + \frac{1}{2} u_{xx} \sigma^2(t, S_t)$

(2) $\sigma(t, Y_t) = u_x \sigma(t, S_t)$.

Im vorliegende Falle ist $u(t, x) = u(x) = \ln x$

sowie $\mu(t, S_t) = \mu S_t$ und $\sigma(t, S_t) = \sigma S_t$.

Damit gilt zunächst

$u_t = 0,\ u_x = x^{-1}$ und $u_{xx} = -x^{-2}$.

Hieraus folgt aus (1):

(3) $\mu(t, Y_t) = \mu S_t / S_t - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 / S_t^2$
$\quad = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$.

(4) $\sigma(t, Y_t) = \sigma S_t / S_t = \sigma$.

b) Delta-Methode:

$$P_{t+h} - P_t = \frac{\partial P_t}{\partial S_t}(S_{t+h} - S_t).$$

Nach Hinweis gilt $\partial P_t / \partial S_t = -N[-d_1(t)]$. Ferner gilt:

$$S_{t+h} - S_t = S_t R_h.$$

Insgesamt gilt damit:

$$P_{t+h} - P_t = -N[-d_1(t)] S_t R_h.$$

Da $\mathrm{Var}(R_h) = \sigma^2 h$ folgt hieraus:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(P_{t+h} - P_t) &= \mathrm{Var}\left[- N[-d_1(t)] S_t R_h\right] \\ &= N[-d_1(t)]^2 S_t^2 \,\mathrm{Var}(R_h)\end{aligned}$$

und damit

$$\sigma(P_{t+h} - P_t) = N[-d_1(t)] S_t \sigma \sqrt{h}.$$

Aufgabe 3: (30 Minuten)

Unterstellen Sie für den Basistitel einer Terminposition einen Binomialgitterprozess mit Startwert $s_0 = 100$ und einer prozentualen Aufwärtsbewegung von 20% bzw. einer prozentualen Abwärtsbewegung von 10% pro Periode. Der einperiodige Zinssatz für eine sichere Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme betrage 5%.

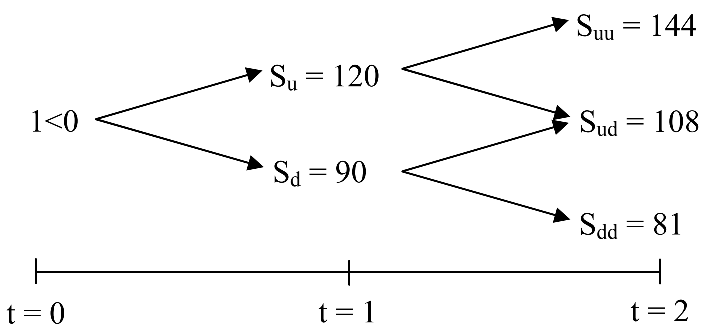
a) Bestimmen Sie auf Basis des Duplikationsprinzips den arbitragefreien Preis in t = 0 einer <u>zwei</u>periodigen Calloption auf den Basistitel. Der Ausübungspreis der Option sei 126.

b) Bestimmen Sie auf Basis des Duplikationsprinzips den arbitragefreien Preis in t = 0 eines <u>drei</u>periodigen Forwardkontrakts auf den Basistitel. Welche Beziehung weisen der arbitragefreie Forwardpreis und der Startwert des Basistitels auf?

<u>Hinweis zu Teilaufgabe b):</u> Ein rekursives Vorgehen ist in diesem Fall nicht notwendig!

<u>Lösungsskizze:</u>

a) Entwicklung Basistitel:



Die Rückflüsse der zweiperiodigen Calloption mit Strike 126 ergeben sich zu $(C_{uu}, C_{ud}, C_{dd}) = (18, 0, 0)$. Der Optionspreis ist – im Unterschied zu Aufgabenteil b) rekursiv zu bestimmen.

Wir fixieren nun den Zustand S_u zum Zeitpunkt t = 1. Die weitere Entwicklung des Prozesses entspricht dann dem einperiodigen Binomialfall. Erwirbt der Investor in t = 1 x Einheiten des Basistitels und y der sicheren Anlage, so gelten für die Duplikationsposition in t = 2 dann die folgenden Bedingungen:

$144x + 1.05y = 18$

$108x + 1.05y = 0.$

Hieraus folgt $x = ½$ und $y = –54(1.05)^{-1} = –51.4286$.

In t = 1 ergibt sich hieraus

$C_u = 120x + y = 60 – 51.4286 = 8.5714.$

Da $(C_{ud}, C_{dd}) = (0, 0)$, muss auch $C_d = 0$ sein.

Duplikation von (C_u, C_d) erfordert in analoger Weise

$120x + 1.05y = 8.5714$

$90x + 1.05y = 0.$

Hieraus folgt $30x = 8.5714$ und damit $x = 0.2857$.

Für y resultiert hieraus $y = –25.7142\ (1.05)^{–1} = 24.4897$.

In t = 0 resultiert hieraus schließlich

$C_0 = 100x + y = 28.57 – 24.4897 = 4.0803 \approx 4.08$.

Der gesuchte Wert der zweijährigen Calloption ist somit 4.08.

b) Für Dreiperiodenfall ergeben sich aus der Weiterentwicklung des Zweiperiodenfalls unter a) die folgenden möglichen Werte des Basistitels:

$$\begin{aligned} S_{uuu} &= 172.8 \\ S_{uud} = S_{udu} &= 129.6 \\ S_{udd} = S_{ddu} &= 97.2 \\ S_{ddd} &= 72.9\ . \end{aligned}$$

Die in t=3 möglichen Werte des Forwards sind somit gegeben durch $172.8 – F_0$, $129.6 – F_0$, $97.2 – F_0$ und $72.9 – F_0$, wobei F_0 der zu bestimmende arbitragefreie Forwardpreis ist.

Erwirbt der Investor in t=0 x Einheiten des Basistitels und y Einheiten der sicheren Anlage, so gelten für die Duplikationsposition die folgenden Bedingungen:

(1) $172.8x + (1.05)^3\ y = 172.8 – F_0$

(2) $129.6x + (1.05)^3\ y = 129.6 – F_0$

(3) $97.2x + (1.05)^3\ y = 97.2 – F_0$

(4) $72.9x + (1.05)^3\ y = 72.9 – F_0$.

Aus (beispielsweise) (1) – (2) resultiert x=1 und damit $y = –F_0(1.05)^{–3}$.

Da der Forward in t=0 keinen Kapitaleinsatz erfordert, muss schließlich für die Duplikationsposition in t=0 gelten:

$0 = 100x + y = 100 - F_0(1.05)^{-3}$

und damit insgesamt:

$$F_0 = 100\,(1.05)^3 = 115.76.$$

Der Forwardpreis entspricht somit dem um drei Perioden aufgezinsten Kassapreis (Cost of Carry-Formel).

Aufgabe 4: (20 Minuten)

a) Duplizieren Sie in t = T den Wert eines Discount-Zertifikats mit T Perioden Laufzeit und Cap C auf einen Basistitel mit Wertentwicklung $\{S_t\}$ unter Verwendung eines geeigneten Zerobond. Wie lautet die Duplikationsposition?

b) In t = 0 sei ein Callable Bond mit Nennwert N = 5000, einem Nominalzins von i = 5%, einer Laufzeit von T = 4 Jahren sowie einem Kündigungstermin zu t = 2 gegeben. Bestimmen Sie einen geeigneten Finanztitel in der Weise, dass gilt:

Callable + Finanztitel = Standardbond,

wobei der Standardbond die gleichen Ausstattungsmerkmale besitze wie der Callable – bis auf das Kündigungsrecht.

c) Ein Versicherungsunternehmen habe einen Festzinstitel mit Nennwert N, Laufzeit T und Nominalzins i im Bestand. Durch welches Finanzgeschäft kann man erreichen, dass

Festzinstitel + Finanzgeschäft = Reverse Floater,

wobei der Reverse Floater ein Zinstitel ist, dessen Zinsertrag steigt, wenn die Geldmarktzinsen (die variablen Zinsen) fallen?

Lösungsskizze:

a) Wert V_T des Discount-Zertifikats in t=T:

$$V_T = \begin{cases} S_T & S_T \le C \\ C & S_T \ge C \end{cases} = \min(S_T, C)\,.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} V_T &= \min(S_T, C) = C + \min(S_T - C, 0) \\ &= C - \max(C - S_T, 0). \end{aligned}$$

Die Duplikationsposition besteht daher aus:

1) Einem in T fällig werdenden Zerobond mit Rückzahlungsbetrag C.

2) Einer Short-Position in einer (Europäischen) Put-Option auf das Underlying mit Laufzeit T und Ausübungspreis C.

b) Rückzahlungsreihe Standardbond:

$$\{250, 250, 250, 5250\}.$$

Rückzahlungsreihe des Callable bei Kündigung in t=2:

$$\{250, 5250\}.$$

Durch die vorzeitige Rückzahlung steht in t=2 ein Betrag in Höhe von 5000 zusätzlich zur Verfügung. Dieser Betrag kann für zwei Jahre (etwa) zum 12-Monats-LIBOR angelegt werden.

Kann im Rahmen eines Receiver Swap mit Umfang 5000 mit 2 Jahren Laufzeit der 12-Monats-LIBOR gegen den Nominalzins 5% eingetauscht werden, so lauten die Zahlungssalden:

t = 2	–5000 (Etablierung Geldmarktanlage)
t = 3	LIBOR – LIBOR + 250 (Receiver Swap)
t = 4	LIBOR – LIBOR + 250 (Receiver Swap) +5000 (Auflösung Geldmarktanlage).

Insgesamt entspricht dies dann der Rückzahlungsreihe des Standardbonds.

Da diese Operationen jedoch nur bei Kündigung erforderlich sind, ist der benötigte Finanztitel eine Receiver Swaption mit Laufzeit 2 Jahre, die das Optionsrecht beinhaltet, in einen zweijährigen Receiver Swap im Umfang von 5000 und einen Strike-Swapsatz von 5% einzutreten.

c) Bei Eintritt in einen Receiver Swap im Umfang von N und einer Laufzeit von T erhält das Versicherungsunternehmen einen Festzins i_2 und zahlt einen variablen Zins i_V.

Der Saldo ist gegeben durch:

$$i_{SALDO} = i_1 + i_2 - i_V .$$

Durch den Eintritt in einen Receiver Swap wird somit der gewünscht Effekt erzielt.