Bericht zur Prüfung im Oktober 2007 über Finanzmathematik und Investmentmanagement (Grundwissen)

Peter Albrecht (Mannheim)

Am 05. Oktober 2007 wurde zum zweiten Mal eine Prüfung im Fach Finanzmathematik und Investmentmanagement nach PO III (Grundwissen Teil A) durchgeführt. Es waren 255 Teilnehmerinnen und Teilnehmer zu verzeichnen.

Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der vier Aufgaben gestellt wurden, die sämtlich zu bearbeiten waren. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 45 von 90 möglichen Punkten erzielt werden.

Aufgabe 1: (20 Minuten)

Unterstellen Sie in dieser Aufgabe, dass Sie eine Aktie zum Zeitpunkt $t = 1$ durch den Verkauf von Futures absichern wollen. Ihr Portefeuille umfasst 100 Aktien. Vernachlässigen Sie bei Ihrer Analyse sämtliche Marking to Market-Effekte. Der gegenwärtige Kurs der Aktie im Zeitpunkt Null beträgt 200 EUR, der erwartete Kurs in Zeitpunkt $t = 1$ beläuft sich auf 240 EUR und die Standardabweichung des Kurses im Zeitpunkt $t = 1$ hat einen Wert von 400 EUR. Der fristigkeitsunabhängige sichere Marktzins für Kapitalanlage und Kapitalaufnahme betrage $r = 4$ %. Alle Futures beziehen sich auf eine Einheit des Basistitels.

Gehen Sie zunächst davon aus, dass der in Frage kommende Future im Zeitpunkt $t = 1$ fällig ist.

a) Berechnen Sie den arbitragefreien Preis im Zeitpunkt $t=0$ dieses Futures mit Hilfe des Cost of Carry-Ansatzes.

b) Wieviele Futures müssen Sie verkaufen, wenn Sie ein varianzminimales Hedge anstreben? Führen Sie die Ableitung zur Bestimmung des varianzminimalen Hedges explizit durch!

Nun sei am Markt kein Future verfügbar, der am Ende Ihres Planungshorizonts – im Zeitpunkt $t = 1$ – fällig wird. Statt dessen steht ein Future zur Verfügung, der eine Restlaufzeit von zwei Perioden hat und somit im Zeitpunkt $t = 2$ fällig wird.

c) Berechnen Sie den Preis des Futures mit zwei Perioden Restlaufzeit im Zeitpunkt $t = 0$ und darüber hinaus den erwarteten Preis des Futures im Zeitpunkt Eins (der Future hat dann noch eine Periode Restlaufzeit).

d) Wie viele Futures müssen Sie nun für ein varianzminimales Hedge verkaufen? Vergleichen Sie Ihr jetziges Ergebnis mit demjenigen aus Teilaufgabe b.

Lösungsskizze:

a) Cost of Carry-Formel: $F(s,t) = K_s(1+r)^{t-s}$.

Hier somit:

$F(0,1) = K_0(1+r) = 200(1.04) = 208$

b) Hedgeposition G_1 in $t = 1$:

$$\begin{aligned} G &= n(K_1 - K_0) - x(F_1 - F_0) \\ &= 100(K_1 - 200) - x(F_1 - 208) \end{aligned}$$

Da der Future in $t = 1$ ausläuft, gilt $F_1 = K_1$. Es folgt

$G = K_1(100 - x) - 20000 + 208x$

$\mathrm{Var}(G) = (100 - x)^2 \mathrm{Var}(K_1)$.

Offenbar gilt:

$\mathrm{Var}(G) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 100$.

Somit sind $x = 100$ Futures zu verkaufen.

c) i) $F(0,2) = K_0(1+r)^2 = 200(1.04)^2 = 216.32$.

ii) $F(1,2) = K_1(1+r) = K_1(1.04)$

$E[F(1,2)] = (1.04)E(K_1) = (1.04)(240) = 249.60$.

d) Für die Hedgeposition G in $t = 1$ gilt nun:

$$\begin{aligned} G &= n(K_1 - K_0) - x(F_1 - F_0) \\ &= 100(K_1 - 200) - x[K_1(1.04) - 216.32] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(G) &= \mathrm{Var}[100K_1 - xK_1(1.04)] \\ &= \mathrm{Var}[(100 - (1.04)x)K_1] \\ &= (100 - 1.04x)^2 \mathrm{Var}(K_1) \\ &= 1600(100 - 1.04x)^2 \end{aligned}$$

$0 = d\mathrm{Var}(G/dx) = 3200(100 - 1.04x)(-1.04)$

$$\begin{aligned} 1.04x &= 100 \\ x &= 96.15. \end{aligned}$$

Es sind somit weniger Futures zu verkaufen als in Fall b

Aufgabe 2: (25 Minuten)

a) Es bezeichne W_t den Standard-Wienerprozess. Betrachten Sie den Prozess

$$V_t = W_t^3 - t\,W_t$$

i) Bestimmen Sie Drift und Diffusion des Prozesses V_t.

ii) Stellen Sie V_t als stochastische Differentialgleichung dar.

b) Auf der Grundlage einer Lagrange-Optimierung ergibt sich die folgende funktionale Form für die (μ, σ)-Koordinaten der (rein riskanten) Randportfolios (lokal varianzminimalen Portfolios):

$$\sigma^2 = 5\mu^2 - 2\mu + 0.25 \ .$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialgeraden unter der Annahme eines sicheren Zinses von $r_0 = 0.05$!

Lösungsskizze:

a) i) Zu bestimmen ist Drift μ_V und Diffusion σ_V nach dem Lemma von Ito. Bezeichne

$$F(t,x) = x^3 - t\,x$$

und μ_W bzw. σ_W Drift bzw. Diffusion des Standard-Wienerprozesses, so gilt nach Ito:

$$\mu_V(t,x) = F_t + F_x\,\mu_W + \tfrac{1}{2} F_{xx}\,\sigma_W$$

$$\sigma_V(t,x) = F_x\,\sigma_W \,.$$

Nun gilt

$$F_t = -x, \quad F_x = 3x^2 - t, \quad F_{xx} = 6x$$

$$\mu_W = 0, \quad \sigma_W = 1 \,.$$

Es folgt:

$$\mu_V(t,x) = -x + 3x = 2x$$

$$\sigma_V(t,x) = 3x^2 - t$$

und damit

$$\mu_V(t,V_t) = 2\,W_t$$

$$\sigma_V(t,V_t) = 3\,W_t^2 - t \,.$$

ii) Es gilt demnach

$$dV_t = 2\,W_t\,dt + (3\,W_t^2 - t)\,d\,W_t\,.$$

b) Nach Voraussetzung gilt

(I) $\sigma^2 = 5\mu^2 - 2\mu + 0.25\,.$

Die Gleichung der Tangentialgeraden ist allgemein gegeben durch (a > 0)

(II) $\mu = 0.05 + a\sigma\,.$

Einsetzen von (II) in (I) ergibt:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= 5(0.05 + a\sigma)^2 - 2(0.05 + a\sigma) + 0.25\\ &= 5a^2\sigma^2 - 1.5a\sigma + 0.1625.\end{aligned}$$

Dies führt zu der Gleichung

(III) $(5a^2 - 1)\sigma^2 - 1.5a\sigma + 0.1625 = 0\,.$

Bestimmung der Nullstellen führt auf

(IV) $\sigma_{1,2} = \dfrac{1.5a \pm \sqrt{\frac{9}{4}a^2 - 4(5a^2 - 1)0.1625}}{10a^2 - 2} = \dfrac{1.5a \pm \sqrt{0.65 - a^2}}{10a^2 - 1}$

Eine einwertige Nullstelle liegt dann vor, wenn die Diskriminante gleich null ist, d.h. es muss gelten: $a^2 = 0.65\,.$

Aufgrund von a > 0 folgt hieraus a = 0.8062.

Die Gleichung der Tangentialgeraden ist somit gegeben durch

(V) $\mu = 0.05 + 0.8062\sigma\,.$

<u>Aufgabe 3:</u> (25 Minuten)

Einem Investor mit einem Budget von 1.000 EUR stehen die folgenden 3 Anlagealternativen zur Verfügung:

1. Kauf von Aktien der Maurer-AG zum Kurs von 700 EUR pro Stück.
2. Erwerb von Europäischen Verkaufsoptionen auf diese Aktie mit einem Basispreis 700 EUR und einer Restlaufzeit von einem Jahr zum Kurs von 100 EUR pro Stück.
3. Erwerb von Zero Bonds mit Restlaufzeit von 1 Jahr mit einem Kaufkurs von 952.38 EUR und einem Rückzahlungskurs von 1.000 EUR pro Stück. Der Kurs des Zero Bonds ergebe sich aus der am Markt herrschenden Zinsstruktur.

Vernachlässigen Sie im Folgenden Ganzzahligkeitsbedingungen.

a) Berechnen Sie die Jahresrendite des Zero Bonds.

b) Berechnen Sie den fairen Preis einer Europäischen Kaufoption mit identischer Restlaufzeit und gleichem Basispreis wie der Put. Unterstellen Sie dabei arbitragefreie Marktpreise.

c) Der Investor möchte ein Portfolio aus Aktien und Verkaufsoptionen bilden. Wie viele Aktien und Verkaufsoptionen kann er erwerben, falls die Anzahl der Puts der Anzahl der Aktien entsprechen soll (1:1 Put Hedge)?

d) Wie groß ist der minimale Wert des Portfolios nach einem Jahr?

e) Der Investor möchte nun ein Portfolio aus Kaufoptionen und Zero Bonds bilden, das die gleiche Risikostruktur am Ende der Laufzeit wie das oben genannte Portfolio aus Puts und Aktien aufweist. Wie viele Calls hat er zu kaufen und wie hoch ist der Anlagebetrag in Zero Bonds?

f) Die Maurer-AG soll nunmehr in t = 1 auf der Basis einer Europäischen Put-Option abgesichert werden. Zur Verfügung stehen nur Puts auf einen Aktienindex mit Kursentwicklung $\{I_t\}$. Unterstellen Sie die Beziehung:

$$S_t = \alpha + \beta I_t$$

Wie viele Index-Puts zum Ausübungspreis 700 müssen erworben werden, damit das wertgesicherte Portfolio eine (positive) deterministische absolute Wertuntergrenze besitzt? Welchen Wert nimmt diese Preisuntergrenze an? Begründen Sie Ihre Antwort!

<u>Lösungsskizze:</u>

a) $r = \dfrac{1000 - 952.38}{952.38} = 0.05 \ (5\%)$

b) Put-Call-Parität

$$C_0 - P_0 = S_0 - X(1+r)^{-1}$$

$$C_0 = 700 - 700(1.05)^{-1} + 100 = 133.33.$$

c) $1000 = x\,700 + x\,100$

$$x = 1000/800 = 1.25.$$

d) Put Hedge-Position:

$$x[S_1 + \max(700 - S_1, 0)] = x \max(S_1, 700)$$

Minimum somit: $700x = 875$.

e) (I) In t = 1:

$$x \max(S_1 - 700, 0) + y1000 = 1.25 \max(S_1, 700)$$

Auswertung in $S_1 = 700$:

$1000\,y = 875, \quad y = 0.875$.

(II) In $t = 0$:

$$133.33\,x + 952.38(0.875) = 1000$$
$$133.33x = 166.6675$$
$$x = 1.25$$

Fazit: Erwerb von 1.25 Calls und 0.875 Einheiten des Zerobond (Investitionsbetrag 833.33)

f) Ansatz für Hege-Position G in $t = 1$:

$$\begin{aligned} G &= S_1 + x \max(700 - I_1, 0) - x P_0 \\ &= \alpha + \beta I_1 + x \max(700 - I_1, 0) - x P_0 \end{aligned}$$

Ausübungssituation $I_1 < 700$:

$$G = \alpha + \beta I_1 + 700x - x I_1 - x P_0$$

Für $x = \beta$ resultiert Untergrenze:

$$\begin{aligned} G &= \alpha + 700\beta - \beta P_0 \\ &= \alpha + \beta(700 - P_0)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (20 Minuten)

Gegeben sei eine DAX-Bearanleihe mit Nennwert N und 3 Jahren Laufzeit. Während der Laufzeit finden Zinszahlungen der Höhe Z statt. Am Ende der Laufzeit erhält der Investor mindestens den Nennwert zurück. Im Falle einer negativen DAX-Entwicklung über die 3-Jahresperiode erhält der Investor zusätzlich einen Bonus in Höhe von 100α% der (relativen) DAX-Veränderung.

a) Welches Rückzahlungsprofil weist diese Bearanleihe auf?

b) Zerlegen Sie den Rückfluss in $t = 3$ geeignet, um die Optionskomponente zu explizieren! Welche Option ist hier eingebetet?

c) Führen Sie (strukturell) eine Marktbewertung der DAX-Bearanleihe im Zeitpunkt $t = 0$ durch. Welche Größen müssen hierbei spezifiziert werden? [Setzen Sie hierzu fristigkeitsunabhängige Zinssätze voraus.]

Lösungsskizze:

a) Rückzahlungsprofil $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ mit

$$Z_1 = Z_2 = Z$$

$$Z_3 = Z + \max\left\{N, N\left[1 - \alpha\left(\frac{DAX(3)}{DAX(0)} - 1\right)\right]\right\}$$

$$= Z + \max\left\{N, N\left[1 + \alpha\left(1 - \frac{DAX(3)}{DAX(0)}\right)\right]\right\}$$

b) $$\max\left\{N, N\left[1 + \alpha\left(1 - \frac{DAX(3)}{DAX(0)}\right)\right]\right\}$$

$$= N + \max\left\{0, \alpha N \frac{DAX(0) - DAX(3)}{DAX(0)}\right\}$$

$$= N + \frac{\alpha N}{DAX(0)} \max\{DAX(0) - DAX(3), 0\}.$$

Die involvierte Option ist eine Long Position in einer dreijährigen Putoption auf den DAX, wobei der Ausübungspreis dem Ausgangsniveau des DAX entspricht, d.h. $X = DAX(0)$.

c) Das Rückzahlungsprofil ist gemäß a) und b) gegeben durch $\{Z, Z, Z + N + h P_3\}$, wobei

$P_3 = \max\{DAX(0) - DAX(3), 0\}$ und $h = \alpha N / DAX(0)$.

Die sicheren Zahlungsbestandteile können zur Bewertung zum sicheren laufzeitkongruenten Zins abgezinst bzw. mit den entsprechenden Zerobondpreisen multipliziert werden. Der Marktwert der Option beträgt P_0, wobei P_0 auf der Grundlage einer Optionspreisformel zu spezifizieren ist.

Bezeichnen wir den fristigkeitsunabhängigen Zins mit r, so gilt für den Marktwert MW_0 in $t = 0$:

$$MW_0 = Z(1+r)^{-1} + Z(1+r)^{-2} + (Z+N)(1+r)^{-3}$$
$$+ \frac{\alpha N}{DAX(0)} P_0 .$$

<u>Alternativ:</u>

$$MW_0 = Zb_1 + Zb_2 + (Z+N)\,b_3 + \frac{\alpha N}{DAX(0)} P_0 ,$$

wobei $b_i = (1+r)^{-i} \quad (i = 1,2,3)$.