Prüfung Finanzmathematik und Investmentmanagement 2017

Aufgabe 1: (21 Minuten)

a) Gegeben seien zwei Anlagemöglichkeiten, die Anlage in ein riskantes Portfolio P sowie in eine risikolose Anlage zum Zins r_0. Welche (μ, σ)-Positionen können Sie systematisch durch beliebige Mischungen der beiden Anlagemöglichkeiten erreichen? Bestimmen Sie die entsprechende Funktion f mit $\mu = f(\sigma)$. Schließen Sie dabei die Möglichkeit einer Kreditaufnahme zum sicheren Zins r_0 aus! Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!
(6 min)

b) Gegeben sei nun ein sicherer Zins, zu dem sowohl Kapital angelegt, als auch Kredite aufgenommen werden können. Zur Bestimmung der Steigung a der Tangentialgeraden $\mu = r_0 + a\sigma$ an den effizienten Rand der rein riskanten Portfolios gehen Sie von der Schnittpunktbedingung

$$r_0 + a\sigma = \mu_{MVP} + \sqrt{h(\sigma^2 - \sigma_{MVP}^2)}$$

aus, wobei MVP das global varianzminimale Portfolio bezeichne. Diese Schnittpunktbedingung führt auf die quadratische Gleichung

$$A\sigma^2 + B\sigma + C = 0,$$

wobei $A = (a^2 - h)$, $B = -2a(\mu_{MVP} - r_0)$ und $C = (\mu_{MVP} - r_0)^2 + h\sigma_{MVP}^2$.

i) Wie lauten die Koordinaten (σ_T, μ_T) des Tangentialportfolios?
Hinweis: Die Steigung a der Tangentialgeraden ist hierfür nicht zu ermitteln!

ii) Ermitteln Sie nun die Steigung a der Tangentialgeraden!

iii) Ermitteln Sie nunmehr die (σ, μ)-Koordinaten des effizienten Portfolios mit einer erwarteten Rendite in Höhe von μ_0.
Hinweis: Sollten Sie Aufgabenteil i) nicht gelöst haben, so gehen Sie von (σ_T, μ_T) als Koordinaten des Tangentialportfolios aus.

(8 min)

c) Auf der Grundlage einer Lagrange-Optimierung ergibt sich die folgende funktionale Form für die (μ, σ)-Koordinaten der (rein riskanten) Randportfolios (lokal varianzminimalen Portfolios):

$$\sigma^2 = 10\mu^2 - 2\mu + 0.25 \ .$$

i) Wie lautet der effiziente Rand, wobei μ als Funktion von σ darzustellen ist?

ii) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialgeraden unter der Annahme eines sicheren Zinses von $r_0 = 0.04$!

(7 min)

Lösungsskizze:

Aufgabenteil 1a:

Für die Rendite des Mischportfolios gilt

$$R = x\, R_P + (1 - x)\, r_0,$$

wobei R_P die Rendite des rein riskanten Portfolios bezeichne, und x die anteilige Investition in P.

Es folgt

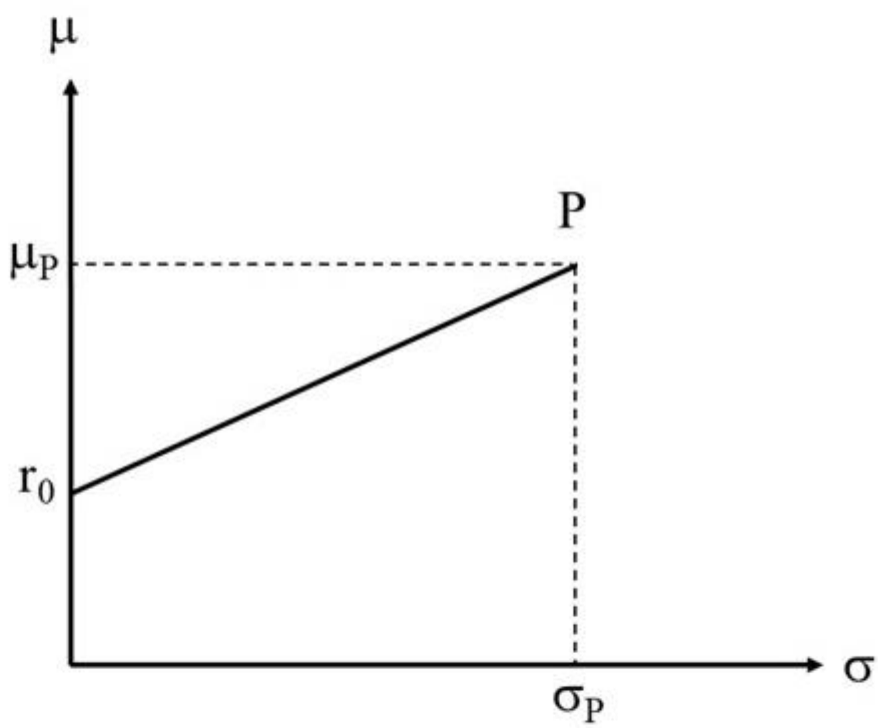
$$\mu \coloneqq E(R) = x\, E(R_P) + (1 - x)\, r_0 = x\, \mu_P + (1 - x)\, r_0 = r_0 + x\, (\mu_p - r_0)$$

$$\sigma^2 \coloneqq Var(R) = x^2\, Var(R_P)$$

$$\sigma \coloneqq \sigma(R) = x\, \sigma(R_P) = x\, \sigma_P.$$

Hieraus folgt weiter $x = \sigma / \sigma_P$ und damit

(1) $\mu = r_0 + \frac{\mu_P - r_0}{\sigma_P}\, \sigma.$



Da eine Kreditaufnahme ausgeschlossen ist, kann maximal 100% in P investiert werden, d.h. es muss $0 \leq x \leq 1$ bzw. $\sigma \leq \sigma_P$ gelten.

Aufgabenteil 1b:

i) Die quadratische Gleichung besitzt die Lösungen

$$\sigma_{1/2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Da eine Tangente vorliegt, muss $B^2 = 4AC$ gelten. Für das Tangentialportfolio gilt somit

$$\sigma_T = -B/2A$$

Und damit ergibt sich

$$\mu_T = r_0 - (aB/2A)$$

ii) Es gilt:

$$\mu_T = r_0 + a\sigma_T,$$

mit (μ_T, σ_T) aus i).

Hieraus folgt

$$a = \frac{\mu_T - r_0}{\sigma_T}.$$

iii) Es seien (σ_0, μ_0) die gesuchten Koordinaten. μ_0 ist vorgegeben.

Für die Tangentialgerade gilt:

$$\mu = r_0 + a\sigma,$$

mit a aus ii).

Hieraus folgt:

$$\sigma_0 = (\mu_0 - r_0)/a.$$

Aufgabenteil 1c:

i) Löse quadratische Gleichung

$$10\mu^2 - 2\mu + (0.25 - \sigma^2) = 0$$

Lösung lautet:

$$\mu = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40(0.25 - \sigma^2)}}{20} = 0.1 \pm \sqrt{0.1\,\sigma^2 - 0.015}\ .$$

Der effiziente Rand entspricht dem oberen Ast dieser Wurzelfunktion, d. h.

$$\mu = 0.1 \pm \sqrt{0.1\,\sigma^2 - 0.015}\ .$$

ii) Setze Tangentialgerade an in der Form

$$\mu = r_0 + a\sigma = 0.04 + a\sigma.$$

Einsetzen [Alternative: Schnitt mit effizientem Rand aus Aufgabenteil a)] in

$$\sigma^2 = 10\mu^2 - 2\mu + 0.25$$

liefert

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= 10(0.04 + a\sigma)^2 - 2(0.04 + a\sigma) + 0.25 \\ &= 0.016 + 0.8a + 10a^2\sigma^2 - 0.08 - 2a\sigma + 0.25\end{aligned}$$

bzw.

$$(10a^2 - 1)\sigma^2 - 1.2a\sigma + 0.186 = 0\,.$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung führt auf

$$\sigma_{1,2} = \frac{1.2a \pm \sqrt{0.744 - 6a^2}}{2(10a^2 - 1)}\ .$$

Eine Tangente kann nur vorliegen, wenn die Diskriminante $0.744 - 6a^2$ null ist.

Hieraus folgt

$$a = \sqrt{0.744/6} = \sqrt{0.124}$$

bzw. $a = 0.35214$.

Die Gleichung der Tangentialgerade lautet somit

$$\mu = 0.04 + 0.35214 \cdot \sigma\,.$$

Aufgabe 2: (28 Minuten)

a) Gegeben sei die geometrische Brownsche Bewegung in ihrer Darstellung als stochastische Differentialgleichung:

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t\,.$$

Bestimmen Sie die stochastische Differentialgleichung (<u>in kanonischer Form</u>!)

$$dY_t = \mu(t, Y_t)\,dt + \sigma(t, Y_t)\,dW_t$$

des folgenden Bildprozesses:

$$Y_t = \ln(1 + S_t).$$

(8 min)

b) Gegeben sei die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = \alpha(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t.$$

Wie lautet die stochastische Differentialgleichung des Prozesses

$$Y_t \coloneqq e^{\alpha t} X_t\ ?$$

<u>Hinweis:</u> Eine Darstellung der stochastischen Differentialgleichung in kanonischer Form ist hier <u>nicht</u> erforderlich!

(8 min)

c) Betrachten Sie eine Cliquet-Option mit Laufzeit T und Auszahlungsprofil

$$V_T = N\left[1 + \sum_{t=1}^{T} \max\left(\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1, 0\right)\right].$$

Gegeben ist ein Black/Scholes-Markt, d.h. der Prozess $\{S_t\}$ folgt einer geometrischen Brownschen Bewegung (GBB) und am Markt existiert eine sichere Verzinsung zur Zinsrate r. Des Weiteren gelte S(0) = 1.

Bestimmen Sie den Wert der Cliquet-Option in t = 0. Verwenden Sie dabei die Größe

$$C_{BS}(1,1) = e^{-r} E_Q[\max(S(1) - 1, 0)],$$

d.h. dem Black/Scholes-Preis einer Call-Option auf $\{S(t)\}$ mit T = 1 und X = 1.

Hinweis 1: Risikoneutrale Bewertung (Martingal-Pricing).
Hinweis 2: Vergleichen Sie die Verteilung der Größen S(t)/S(t-1) und S(1) bei Annahme einer geometrischen Brownschen Bewegung für {S(t)}.

(12 min)

Lösungsskizze:

Aufgabenteil 2 a:

Definiere

$$F(t,x) = F(x) = \ln(1+x).$$

Dann gilt $Y_t = F(S_t)$.

Weiter gilt $F_t = 0$, $F_x = (1+x)^{-1}$, $F_{xx} = -(1+x)^{-2}$.

Mit $\mu(t,S_t) = \mu_t S_t$ und $\sigma(t,S_t) = \sigma S_t$ folgt aus dem Lemma von Ito:

$$\mu(t,Y_t) = \frac{\mu S_t}{1+S_t} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S_t^2}{(1+S_t)^2}$$

$$\sigma(t,Y_t) = \frac{\sigma S_t}{1+S_t}$$

Aus $Y_t = \ln(1+S_t)$ folgt $S_t = \exp(Y_t) - 1$ und hieraus

$$\frac{S_t}{1+S_t} = \frac{\exp(Y_t)-1}{\exp(Y_t)} = 1 - \exp(-Y_t) =: H(Y_t)$$

Die resultierende stochastische Differentialgleichung lautet somit in kanonischer Form:

$$dY_t = \left[\mu(1-e^{-Y_t}) - \frac{1}{2}\sigma^2(1-e^{-Y_t})^2\right]dt + \sigma(1-e^{-Y_t})dW_t$$

Aufgabenteil 2b:

Definiere $F(t,x) = e^{\alpha t}x$. Damit gilt $Y_t = F(t,X_t)$.

Es gilt:

$$F_t = \alpha e^{\alpha t}x$$

$$F_x = e^{\alpha t}$$

$$F_{xx} = 0$$

Mit $\mu(t,x) = \alpha(\mu - x)$ und $\sigma(t,x) = \sigma$ folgt somit aus dem Lemma von Ito:

$$\mu_Y = \alpha e^{\alpha t} x + \alpha(\mu - x)e^{\alpha t} = \alpha\mu e^{\alpha t}$$

$$\sigma_Y = \sigma e^{\alpha t}$$

Hieraus resultiert die stochastische Differentialgleichung

$$dY_t = \alpha\mu e^{\alpha t} dt + \sigma e^{\alpha t} dW_t.$$

<u>Alternativ:</u> Produktregel

$$h(t) = e^{\alpha t}, h'(t) = \alpha e^{\alpha t}.$$

Damit:

$$dh(t) = \alpha \cdot h \cdot dt$$

Produktregel (da $h(t)$ deterministisch):

$$dY_t = X_t dh(t) + h(t) dX_t.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} dY_t &= X_t \cdot \alpha \cdot h \cdot dt + h[\alpha(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t] \\ &= \alpha h X_t dt + \alpha\mu h dt - \alpha h X_t dt + h\sigma dW_t \\ &= \alpha\mu h dt + \sigma h dW_t. \end{aligned}$$

<u>Aufgabenteil 2c:</u>

Es gilt zunächst (risikoneutrale Bewertung)

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rT} E_Q(V_T) \\ &= N e^{-rT} \left\{ 1 + \sum_{t=1}^{T} E_Q \left[\max\left(\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1{,}0 \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Im Falle einer GBB gilt ($m \coloneqq \mu - \sigma^2/2$)

$$\frac{S(t)}{S(t-1)} = \exp\{m + \sigma[W(t) - W(t-1)]\},$$

wobei $\{W(t)\}$ den Standard-Wienerprozess bezeichne.

Die Zuwächse $\{W(t) - W(t-1)\}$ des Standard-Wienerprozesses sind stochastisch unabhängig und (über Einheitsintervalle) $N(0,1)$-verteilt.

Weiter gilt ($W(0) = 0$)

$$\frac{S(1)}{S(0)} = S(1) = \exp[m + \sigma W(1)]$$
$$= \exp\{m + \sigma[W(1) - W(0)]\}$$

und es gilt $W(1) = W(1) - W(0) \sim N(0,1)$.

Damit besitzen $S(t)/S(t-1)$ und $S(1)$ für alle t die gleiche Verteilung und damit besitzt $E_Q\left[\max\left(\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1{,}0\right)\right]$ für alle t den gleichen Wert wie $E_Q[\max(S(1) - 1{,}0)]$.

Hieraus folgt

$$E_Q\left[\max\left(\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1{,}0\right)\right] = e^r C_{BS}(1{,}1)$$

und es gilt insgesamt

$$V_0 = N\, e^{-rT}\{1 + Te^r C_{BS}(1{,}1)\}.$$

<u>Aufgabe 3:</u> (17 Minuten)

a) Gegeben sei ein Aktienportfolio mit Kursentwicklung $\{S_t; 0 \le t \le T\}$. Dieses Portfolio soll in t = T auf der Basis einer Put-Option abgesichert werden. Zur Verfügung stehen nur Index-Puts auf einen Aktienindex mit Kursentwicklung $\{I_t; 0 \le t \le T\}$. Unterstellen Sie die Beziehung

$$S_t = \alpha + \beta I_t\,.$$

Wie viele Index-Puts zum Ausübungspreis F müssen erworben werden, damit das wertgesicherte Portfolio eine (deterministische) absolute (positive) Wertuntergrenze besitzt?
(4 min)

b) Gegeben sei ein Basisobjekt mit Wertentwicklung $\{K_t, 0 \le t \le T\}$, das zum Zeitpunkt u ($0 < u < T$) ein sicheres Einkommen der Höhe Z_u abwirft. Es bestehe die Möglichkeit einer Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme zum sicheren Einperiodenzins r.
Bestimmen Sie den Cost of Carry-Preis in t = 0 eines Forwards auf das Basisobjekt. Verwenden Sie bei der Darstellung der Preisformel explizit den **Barwert** (in t = 0) der Zahlung Z_u. Welche Arbitrageüberlegung liegt der Ableitung des Cost of Carry-Preises zugrunde?
(5 min)

c) Die Renditeformulierung einer Hedge-Position lautet

$$R_h = R_K - h\, R_F,$$

dabei bezeichnet R_K die Einperiodenrendite der Kassaposition (Spot Position) und R_F die Einperiodenrendite der Futures-Position.

i) Bestimmen Sie $E(R_h)$ und $Var(R_h)$!
ii) Bestimmen Sie denjenigen Wert h_{MV} der Größe h, der zu einem varianzminimalen Hedge (in der Renditeformulierung) führt.
Hinweis: Es genügt die Überprüfung der notwendigen Bedingung für das Vorliegen eines Optimums.
iii) Wie lautet das optimale Hedge bei Verwendung des Nutzenfunktionals

$$\Phi(X) = E(X) - a\, Var(X)?$$

Hinweis: Auch hier genügt die Überprüfung der notwendigen Bedingung für das Vorliegen eines Optimums.
iv) Welchen Wert muss $E(R_F)$ annehmen, damit das nutzenoptimale Hedge dem varianzminimalen Hedge entspricht?
(8 min)

Lösungsskizze:

Aufgabenteil 3a:

Position wertgesichertes Portfolio mit x Index-Puts in t = T:

$$V_T = S_T + x \max(F - I_T, 0) - xP_0,$$

wobei $P_0 = P_0(F)$ der Preis eines Index-Puts mit Ausübungspreis F sei.

Im Falle $I_T < F$ gilt:

$$\begin{aligned} V_T &= S_T + x\,(F - I_T) - xP_0 \\ &= \alpha + \beta I_T - xI_T + xF - xP_0 \end{aligned}$$

Eine deterministische Position resultiert genau dann, wenn $x = \beta$, denn dann gilt:

$$V_T = \alpha + \beta(F - P_0).$$

Aufgabenteil 3b:

Es bezeichne $\{K_t; 0 \leq t \leq T\}$ die Wertentwicklung des Basisobjekts.

Entwicklung der Kreditkosten:

$$[K_0 (1 + r)^u - Z_u] (1 + r)^{T-u}$$
$$= K_0 (1 + r)^T - Z_u (1 + r)^{T-u}$$
$$= K_0 (1 + r)^T - Z_u(1 + r)^T(1 + r)^{-u}$$
$$= [K_0 - BW(Z_u)](1 + r)^T$$

Der Kredit erfordert einen Kapitaleinsatz von 0, ebenso wie die Etablierung des Forward.

Im Falle des Forward lautet die Endposition $K_T - F_0$, im Falle des Erwerbs auf Kredit $K_T - [K_0 - BW(Z_u)](1 + r)^T$.

Damit gilt insgesamt

$$F_0 = [K_0 - BW(Z_u)](1 + r)^T.$$

Aufgabenteil 3c:

i) $E(R_h) = E(R_K) - h\, E(R_F)$

$Var(R_h) = Var(R_h) + h^2\, Var(R_F) - 2h\, Cov(R_h, R_F)$

ii) Varianzminimales Hedge:

$dVar(R_h)/dh = 2hVar(R_F) - 2Cov(R_h, R_F)$.

Aus $dVar(R_h)/dh = 0$ folgt

$$h_{MV} = \frac{Cov(R_h, R_F)}{Var(R_F)}$$

iii) $\Phi(R_h) = E(R_h) - a\, Var(R_h)$

Mit (i)

$d\Phi(R_h)/dh = -E(R_F) - 2ah\, Var(R_F) – 2a\, Cov(R_h, R_F)$

Aus $d\Phi(R_h)/dh = 0$ folgt

$$h_{opt} = \frac{Cov(R_h, R_F)}{Var(R_F)} - \frac{1}{2a}\frac{E\,(R_F)}{Var(R_F)}.$$

iv) $E(R_F) = 0$.

Aufgabe 4: (24 Minuten)

a) Ein Investor erwirbt in $t = 0$ ein Garantiezertifikat auf die S-Aktie, das in $t = 1$ eine Wertsicherung in Höhe von 90 % des Anfangswerts s_0 der S-Aktie beinhaltet.

i) Wie kann diese Position in $t = 1$ unter Einsatz von Puts dupliziert werden? Welche Modalitäten weisen diese Puts auf?

ii) Bestimmen Sie auf dieser Grundlage den fairen Wert des Garantiezertifikats!

iii) Wie kann die Position äquivalent unter Einsatz von Calls dupliziert werden? Welche Modalitäten weisen diese Calls auf? Leiten Sie hieraus die korrespondierende Put/Call-Parität ab! Gehen Sie dabei von einem sicheren Per Annum-Zins in Höhe von r aus.

iv) Die Bank B, bei der der Investor die Puts erworben hat, möchte ihr Risiko aus der Stillhalter-Position eliminieren, in dem sie eine einjährige Aktienanleihe emittiert. Bestimmen Sie die diesbezüglichen Modalitäten der Aktienanleihe und weisen Sie nach, dass das Aktienrisiko der Bank B in diesem Fall in der Tat eliminiert wird. (10 min)

b) Betrachtet werde eine Bull-Anleihe auf den DAX ohne Kuponzahlungen, einer Laufzeit von 2 Jahren sowie einem Nennwert in Höhe von N = 100 000. Für die Partizipationsrate gelte pr = 30%. Der Dax notiert bei Emission der Anleihe bei 10 000. Am Markt sei eine flache Zinsstruktur gegeben mit einem jährlichen Zinssatz von r = 0 %.

i) Der Emittent möchte die Bull-Anleihe unter Einsatz von **Call**-Optionen auf den DAX duplizieren. Welches Portfolio muss er hierfür bei der Emission der Anleihe zusammenstellen? Geben Sie, basierend auf diesem Portfolio, einen formalen Ausdruck für den fairen Wert der Anleihe bei Emission an.

ii) Der Emittent möchte die Bull-Anleihe nun alternativ unter Einsatz von **Put**-Optionen auf den DAX duplizieren. Welches Portfolio muss er hierfür bei Emission der Anleihe zusammenstellen? Geben Sie, basierend auf diesem Portfolio, einen formalen Ausdruck für den fairen Wert der Anleihe bei Emission an.

Hinweis: Es gilt $\max(a - b, 0) = a - b + \max(b - a, 0)$.

iii) Zeigen Sie, dass die fairen Werte für die Bull-Anleine aus i) und ii) identisch sind! Welche allgemeine Beziehung ist für diesen Nachweis zu verwenden?
(6 min)

c) Ein Investor erwirbt für EUR 18 900 ein strukturiertes Produkt mit einem Jahr Laufzeit und den folgenden Rückzahlungsmodalitäten in t = 1. Die Mindest-Rückzahlung beträgt EUR 19 845. Im Falle einer positiven DAX-Entwicklung betrage - wenn die Mindest-Rückzahlung hierdurch überschritten wird - die Rückzahlung EUR 18 900 zuzüglich einer Partizipation in Höhe von 60% der einjährigen DAX-Rendite bezogen auf einen investierten Betrag von EUR 18 900.

i) Bestimmen Sie das Rückzahlungsprofil des strukturierten Produkts zum Zeitpunkt t = 1!

ii) Zerlegen Sie nun dieses Rückzahlungsprofil nun so, dass die **eingebettete Kaufoption** expliziert wird. Welche Modalitäten weist diese Kaufoption auf? Unterstellen Sie dabei einen Anfangsstand des DAX im Gegenwert von EUR 6 300.

iii) Geben Sie einen formalen Ausdruck für den fairen Wert des strukturierten Produkts an. Der sichere Marktzins betrage 5%.

(8min)

<u>Lösungsskizze:</u>

<u>Aufgabenteil 4a:</u>

i) Rückzahlungsprofil Garantiezertifikat: $(X := 0.9\, s_0)$

$$\max(X, S_1)$$

Duplikation mit Puts in t = 1:

$$\max(X, S_1) = S_1 + \max(X - S_1, 0)$$

Involviert sind einjährige Puts auf die S-Aktie mit Ausübungspreis X.

ii) Wert in t = 0:

$$V_0 = s_0 + P_0(X)\,,$$

wobei $P_0(X)$ der Wert des Puts in t = 0 ist.

iii) Alternativ:

$$\max(X, S_1) = X + \max(S_1 - X, 0)$$

Involviert sind einjährige Calls auf die S-Aktie mit Ausübungspreis X. Korrespondierender Wert in t = 0:

$$V_0 = X(1+r)^{-1} + C_0(X)$$

Put/ Call-Parität

$$s_0 + P_0(X) = X(1+r)^{-1} + C_0(X)$$

bzw. $C_0(X) - P_0(X) = s_0 - X(1+r)^{-1}$

iv) Rückzahlungsprofil Aktienanleihe in t = 1 aus Investorsicht allgemein:

$$Z + \min(N, S_1)$$

Es gilt:

$$\min(N, S_1) = N + \min(S_1 - N, 0)$$

$$= N - \max(N - S_1, 0)$$

Damit lautet das Rückzahlungsprofil aus Investorsicht insgesamt:

$$Z + N - \max(N - S_1, 0)$$

Aus Sicht der Bank B mit hin:

$$-Z - N + \max(N - S_1, 0)$$

Die Bank B hat eine Short Put-Position inne, d.h. es gilt in t = 1:

$$-\max(X - S_1, 0).$$

Bei Wahl von X = N folgt insgesamt in t = 1;

$$-Z - X + \max(X - S_1, 0) - \max(X - S_1, 0)$$

$$= -X - Z = -(X + Z)$$

Das Aktienrisiko der Bank B ist damit eliminiert.

Aufgabenteil 4b:

i) Da keine Zinszahlungen erfolgen, ist nur die Rückzahlung der Anleihe in $t = 2$ zu betrachten. Für diese gilt

$$\max\left\{N, N + N \cdot pr \cdot \frac{DAX(2) - DAX(0)}{DAX(0)}\right\}$$

$$= N + \frac{N \cdot pr}{DAX(0)} \max\{DAX(2) - DAX(0), 0\}$$

$$= 100\,000 + 3 \cdot \max\{DAX(2) - 10\,000{,}0\}$$

Das Duplikationsportfolio besteht aus

1) einem zweijährigen Zerobond mit einem Nennwert $N = 100\,000$
2) drei zweijährigen DAX-Calls mit Ausübungspreis $X = 10\,000$

Der faire Wert beträgt mithin

$$100\,000 + 3 \cdot C_{DAX}(10\,000),$$

wobei $C_{DAX}(10\,000)$ der Preis der vorstehend genannten DAX-Option bezeichne.

ii) Nach Hinweis gilt

$$\begin{aligned} & 100\,000 + 3 \cdot \max\{DAX(2) - 10\,000{,}0\} \\ &= 100\,000 + 3 \cdot [DAX(2) - 10\,000 + \max\{10\,000 - DAX(2), 0\}] \\ &= 70\,000 + 3\, DAX(2) + 3 \max\{10\,000 - DAX(2), 0\} \end{aligned}$$

Das Duplikationsportfolio besteht aus

1) einem zweijährigen Zerobond mit einem Nennwert von $N = 70\,000$
2) drei DAX-Zertifikaten
3) drei zweijährigen DAX-Puts mit Ausübungspreis $X = 10\,000$

Der faire Wert beträgt mithin

$$\begin{aligned} & 70\,000 + 3 \cdot DAX(0) + 3 \cdot P_{DAX}(10\,000) \\ &= 100\,000 + 3 \cdot P_{DAX}(10\,000), \end{aligned}$$

wobei $P_{DAX}(10\,000)$ den Preis der vorstehend genannten Put-Option bezeichne.

iii) Zu verwenden ist die Put/Call-Parität. Die Put/Call-Parität lautet für einen einjährigen Zeithorizont

$$P_{DAX}(X) = C_{DAX}(X) - S_0 + X(1 + r)^{-1}.$$

Mit $X = S_0 = 10\,000$ und $r = 0$ resultiert $P_{DAX}(10\,000) = C_{DAX}(10\,000)$. Damit stimmen die vorstehenden Werte der beiden Duplikationsportfolios überein.

Aufgabenteil 4c:

i) $$L_1 = \max\{18900\,(1.05),\, 18900 + 18900\,(0.6)\; R_{DAX}\}\ ,$$

wobei

$$R_{DAX} = \frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)}\ .$$

ii) Es gilt

$$\begin{aligned}
L_1 &= \max\left\{19\,845,\ 18\,900 + \frac{18\,900\,(0.6)}{DAX\,(0)}\left[DAX\,(1) - DAX\,(0)\right]\right\} \\
&= 19\,845 + \max\left\{-\ 945\ +\ 1.8\ \left[DAX\,(1) - DAX\,(0)\right],\, 0\right\} \\
&= 19\,845 + 1.8\,\max\left\{\ DAX\,(1) - DAX\,(0) - \frac{945}{1.8},\, 0\right\} \\
&= 19\,845 + 1.8\,\max\left\{DAX\,(1) - 6\,300 - 525,\ 0\right\} \\
&= 19\,845 + 1.8\,\max\left\{DAX\,(1) - 6\,825\,,\, 0\right\}
\end{aligned}$$

Eingebettet ist ein einjähriger DAX-Call mit einem Ausübungspreis von 6 825.

iii) Faire Bewertung:

Es muss gemäß ii) gelten

$$L_0 = 19\,845\ (1.05)^{-1} + 1.8\ C_{DAX}\ (6\,825).$$