**Prüfung Finanzmathematik und Investmentmanagement 2015**

**Aufgabe 1:** (19 Minuten)

a) Der effiziente Rand einer Menge von vorgegebenen riskanten Anlagen ist gegeben durch ($h > 0$, $\sigma \geq \sigma_{MVP}$)

$$\mu = \mu_{MVP} + \sqrt{h(\sigma^2 - \sigma_{MVP}^2)}\ .$$

Dem Investor steht zusätzlich eine risikolose Anlage zum Zins $r_0$ zur Verfügung. Das resultierende Tangentialportfolio besitze die Koordinaten $(\sigma_T, \mu_T)$ im $(\sigma, \mu)$-Raum.
Der Investor möchte nun ein effizientes Portfolio P mit $E(R_P) = \mu_0$ realisieren.

i) Welche grundsätzliche Struktur muss dieses Portfolio besitzen?
ii) Welche Investmentgewichte ergeben sich aus i)?

(6 min)

b) Gegeben seien zwei Aktien mit zugehörigen Einperiodenrenditen $R_1$ und $R_2$. Für den Korrelationskoeffizienten gelte $-1 < \rho(R_1, R_2) < 1$.

i) Bestimmen Sie zunächst die Größe $x_{MVP}$, wobei $(x_{MVP}, 1 - x_{MVP})$ die Investmentgewichte des global varianzminimalen Portfolios bezeichnen!
ii) Begründen Sie, warum der erhaltene Ausdruck für $x_{MVP}$ wohldefiniert ist!
iii) Welchen Wert muss $\rho(R_1, R_2)$ annehmen, damit $x_{MVP}$ einen vorgegebenen Wert $x_0$ annimmt, d.h. $x_{MVP} = x_0$ gilt?
iv) Für welchen Wert von $x_0$ besitzt die Aufgabenstellung iii) keine wohldefinierte Lösung?

(13 min)

**Lösungsskizze:**

a) i) Es muss gelten

$$R_P = x\, r_0 + (1 - x)\, R_T$$

ii) Hieraus erhalten wir

$$E(R_P) = x\, r_0 + (1 - x)\, E(R_T)$$

bzw.

$$\mu_P = x\, r_0 + (1 - x)\mu_T = x(r_0 - \mu_T) + \mu_T$$

Aus der Bedingung $\mu_P = \mu_0$ erhalten wir

$$x(r_0 - \mu_T) + \mu_T = \mu_0$$

und damit insgesamt

$$x = \frac{\mu_0 - \mu_T}{r_0 - \mu_T} = \frac{\mu_T - \mu_0}{\mu_T - r_0}$$

sowie

$$1 - x = \frac{\mu_0 - r_0}{\mu_T - r_0}.$$

b) Es bezeichne $R = xR_1 + (1 - x)R_2$ die Rendite eines beliebigen Portfolios aus den beiden Aktien. Es bezeichnen ferner $\sigma^2 = Var(R)$, $\sigma_1^2 = Var(R_1)$, $\sigma_2^2 = Var(R_2)$, $\rho = \rho(R_1, R_2)$.

Es gilt damit:

$\sigma^2 = \sigma^2(x) = x^2\sigma_1^2 + (1 - x)^2 \sigma_2^2 + 2\rho x(1 - x)\sigma_1\sigma_2$.

i) Bestimmung der varianzminimalen Position:

$$0 = \frac{d\sigma^2}{dx} = 2x\,\sigma_1^2 - 2(1 - x)\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 - 4x\rho\sigma_1\sigma_2.$$

Es folgt:

$2x\,\sigma_1^2 + 2x\,\sigma_2^2 - 4x\rho\sigma_1\sigma_2 = 2\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$

und damit

$$x_{MVP} = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}.$$

ii) Es gilt $Var(R_1 - R_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$. Es gilt $Var(R_1 - R_2) > 0$, wenn $R_1 - R_2$ eine nicht-degenerierte Zufallsgröße ist, d.h. es gilt nicht $R_1 - R_2 = c$ bzw. $R_1 = R_2 + c$. Der letzte Ausdruck impliziert, dass $R_1$ und $R_2$ linear abhängig sind. Dies ist ausgeschlossen, da nach Voraussetzung $|\rho| < 1$ gilt.

iii) Aus $x_{MVP} = x_0$ folgt

$\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 = x_0(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)$

bzw.

$2\rho x_0\sigma_1\sigma_2 - \rho\sigma_1\sigma_2 = x_0\sigma_1^2 + x_0\sigma_2^2 - \sigma_2^2$.

Damit gilt insgesamt

$$\rho = \frac{x_0\sigma_1^2 - (1 - x_0)\sigma_2^2}{(2x_0 - 1)\sigma_1\sigma_2}$$

iv) Offenbar für $x_0 = 1/2$.

**Aufgabe 2:** (25 Minuten)

a) Betrachten Sie ein selbstfinanzierendes Portfolio, das einerseits aus $a_t$ Einheiten einer Aktie besteht, die einer geometrischen Brownschen Bewegung $\{S_t\}$ folgt, und andererseits aus $b_t$ Einheiten einer risikolosen Anlage mit Kursentwicklung $\{B_t = B_0 e^{rt}\}$.

i) Bestimmen Sie die stochastische Differentialgleichung des Wertprozesses $\{V_t; t \geq 0\}$ dieses Portfolios! Wie lauten Drift und Diffusion dieses Prozesses?

<u>Hinweis:</u> Ist $V_t = a_t S_t + b_t B_t$, so gilt für ein selbstfinanzierendes Portfolio $dV_t = a_t\, dS_t + b_t\, dB_t$.

ii) Bestimmen Sie nun die Portfoliogewichte so, dass stets b Anteile des Gesamtwerts des Portfolios riskant und stets 1-b Anteile risikolos investiert sind. Wie lauten nun Drift und Diffusion des "Renditeprozesses" $dV_t/V_t$?

iii) Folgt der Wertprozess $\{V_t\}$ unter ii) einer geometrischen Brownschen Bewegung? (Begründung erforderlich!)

(10 min)

b) Betrachten Sie den Prozess $(t \geq 0,\ m > 0,\ \sigma > 0)$

$$V_t = \ln(1 + mt) + \sigma\, W_t,$$

wobei $\{W_t\}$ den Standard-Wienerprozess bezeichne. Bestimmen Sie nun die stochastische Differentialgleichung (kanonische Form) des Prozesses

$$Z_t = \frac{1}{V_t}$$

auf der Basis des Lemmas von Itô! Wie lauten Drift und Diffusion des Prozesses $\{Z_t\}$?
(15 min)

**Lösungsskizze:**

a) i) $V_t = a_t\, S_t + b_t\, B_t$

Es gilt:

1) $dS_t = \mu\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dW_t$

2) $B_t = B_0\, e^{rt}$

$dB_t / dt = r\, B_0\, e^{rt} = rB_t$

$dB_t = rB_t\, dt$

Damit gilt nach Hinweis:

$dV_t = a_t\, dS_t + b_t\, dB_t$

$= a_t\, (\mu\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dW_t) + b_t(rB_t\, dt)$

$= (a_t\, \mu\, S_t + b_t\, rB_t)\, dt + a_t\, \sigma\, S_t\, dW_t$

ii) Bedingung:

$a_t S_t = bV_t$, $b_t B_t = (1 - b) V_t$

Damit:

$$dV_t = a_t S_t (\mu\, dt + \sigma\, dW_t) + b_t B_t\, r\, dt$$
$$= bV_t (\mu\, dt + \sigma\, dW_t) + (1 - b) V_t\, r\, dt$$
$$= [bV_t \mu + (1 - b)V_t r]\, dt + b\, \sigma V_t\, dW_t$$
$$= [b\mu + (1 - b)\, r]\, V_t\, dt + b\, \sigma V_t\, dW_t\, .$$

Damit:

Drift: $b\mu + (1 - b)\, r$

Diffusion: $b\sigma$

iii) Ja, da Drift und Diffusion von $V_t$ jeweils proportional zu $V_t$.

b) Definiere

$V_t = \ln(1 + mt) + \sigma W_t = f(t) + \sigma W_t$,

wobei $f(t) = \ln(1 + mt)$.

Die korrespondierende Transformationsfunktion für den Prozess

$$Z_t = \frac{1}{V_t} = [f(t) + \sigma W_t]^{-1}$$

lautet

$F(t,x) = [f(t) + \sigma x]^{-1}$.

Ableitungen:

$$f'(t) = \frac{m}{1 + mt}$$

$$F_t = -f'(t)\, f(t) + \sigma x]^{-2} = -f'(t)F^2 = -\frac{m}{1 + mt} F^2$$

$$F_x = -\sigma[f(t) + \sigma x]^{-2} = -\sigma F^2$$

$$F_{xx} = 2\sigma^2[f(t) + \sigma x]^{-3} = 2\sigma^2 F^3$$

Ito:

$$\mu_F = F_t + F_x\, \mu_W + \frac{1}{2} F_{xx}\, \sigma_W^2$$

$\sigma_F = F_x \sigma_W$.

Mit $\mu_W = 0$ und $\sigma_W = 1$ folgt hieraus

$$\mu_F = -\frac{m}{1 + mt} F^2 + \sigma^2 F^3$$

$\sigma_F = -\sigma F^2$.

Hieraus folgt dann insgesamt

$$dZ_t = [-\frac{m}{1 + mt}\, Z_t^2 + \sigma^2 Z_t^3]dt - \sigma Z_t^2 dW_t.$$

Damit:

Drift: $\mu_Z = -\frac{m}{1+mt} Z_t^2 + \sigma^2 Z_t^3$

Diffusion: $\sigma_Z = -\sigma Z_t^2$

**Aufgabe 3:** (21 Minuten)

a) Gegeben sei ein Basisobjekt mit Wertentwicklung $\{K_t, 0 \le t \le T\}$, das zum Zeitpunkt u, $0 < u < T$, ein sicheres Einkommen der Höhe $Z_u$ abwirft. Es bestehe die Möglichkeit einer Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme zum sicheren Einperiodenzins r.

Bestimmen Sie den Cost of Carry-Preis in t = 0 eines Forwards auf das Basisobjekt. Verwenden Sie bei der Darstellung der Preisformel insbesondere den Barwert (in t = 0) der Zahlung $Z_u$. Explizieren Sie dabei die Arbitrageüberlegung, die der Ableitung des Cost of Carry-Preises zugrunde liegt! (6 min)

b) Die Renditeformulierung einer Hedge-Position lautet

$$R_h = R_K - h\, R_F,$$

dabei bezeichnet $R_K$ die Einperiodenrendite der Kassaposition (Spot Position) und $R_F$ die Einperiodenrendite der Futures-Position.

i) Bestimmen Sie $E(R_h)$ und $Var(R_h)$!

ii) Bestimmen Sie denjenigen Wert $h_{MV}$ der Größe h, der zu einem varianzminimalen Hedge (in der Renditeformulierung) führt.

Hinweis: Es genügt die Überprüfung der notwendigen Bedingung für das Vorliegen eines Optimums.

iii) Wie lautet das optimale Hedge bei Verwendung des Nutzenfunktionals

$$\Phi(X) = E(X) - a\, Var(X)?$$

Hinweis: Auch hier genügt die Überprüfung der notwendigen Bedingung für das Vorliegen eines Optimums.

iv) Welchen Wert muss $E(R_F)$ annehmen, damit das nutzenoptimale Hedge dem varianzminimalen Hedge entspricht?

(9 min)

c) Weisen Sie nach, dass bei einer Formulierung der Hedge-Position auf der Wertebene im Falle $\rho(K_t, F_t) \neq 0$ durch den Verkauf der varianzminimalen Anzahl an Futures stets eine Minderung der Original-Risikoposition resultiert. Gehen Sie dabei davon aus, dass n Einheiten der Kassaposition abzusichern sind.

Hinweis: Benutzen Sie, dass in diesem Fall die Hedge Ratio durch $\beta_{KF}(t) = Cov(K_t, F_t) / Var(F_t)$ gegeben ist. (6 min)

**Lösungsskizze:**

a) Es bezeichne $\{K_t; 0 \leq t \leq T\}$ die Wertentwicklung des Basisobjekts.
Entwicklung der Kreditkosten:

$$[K_0 (1 + r)^u - Z_u] (1 + r)^{T-u}$$
$$= K_0 (1 + r)^T - Z_u (1 + r)^{T-u}$$
$$= K_0 (1 + r)^T - Z_u(1 + r)^T(1 + r)^{-u}$$
$$= [K_0 - BW(Z_u)](1 + r)^T$$

Der Kredit erfordert einen Kapitaleinsatz von 0, ebenso wie die Etablierung des For ward. Im Falle des Forward lautet die Endposition $K_T - F_0$, im Falle des Erwerbs auf Kredit $K_T - [K_0 - BW(Z_u)](1 + r)^T$. Damit gilt insgesamt

$$F_0 = [K_0 - BW(Z_u)](1 + r)^T.$$

b) i) $E(R_h) = E(R_K) - h\, E(R_F)$

$Var(R_h) = Var(R_h) + h^2\, Var(R_F) - 2h\, Cov(R_h, R_F)$

ii) Varianzminimales Hedge:

$dVar(R_h)/dh = 2hVar(R_F) - 2Cov(R_h, R_F)$.

Aus $dVar(R_h)/dh = 0$ folgt

$$h_{MV} = \frac{Cov(R_h, R_F)}{Var(R_F)}$$

iii) $\Phi(R_h) = E(R_h) - a\, Var(R_h)$

Mit (i)

$d\Phi(R_h)/dh = -E(R_F) - 2ah\, Var(R_F) – 2a\, Cov(R_h, R_F)$

Aus $d\Phi(R_h)/dh = 0$ folgt

$$h_{opt} = \frac{Cov(R_h, R_F)}{Var(R_F)} - \frac{1}{2a}\frac{E\,(R_F)}{Var(R_F)}\,.$$

iv) $E(R_F) = 0$.

c) Hedge-Position:

$G_t = n(K_t - K_s) - x(F_t - F_s)$

$Var(G_t) = n^2\, Var(K_t) + x^2\, Var(F_t) - 2nx\, Cov(K_t, F_t)$

Setze $x = n\beta_{KF}(t) = n\, Cov(K_t, F_t)/Var(F_t)$.

Dann:

$$Var(G_t) = n^2\, Var(K_t) + n^2\, Cov(K_t, F_t)^2/Var(F_t)$$
$$-2\, n^2\, Cov(K_t, F_t)^2/Var(F_t)$$
$$= n^2\{Var(K_t) - Cov(K_t, F_t)^2/Var(F_t)\}$$

$$= n^2\, Var(K_t)\{1 - \frac{Cov(K_t, F_t)^2}{Var(K_t)\, Var(F_t)}\}$$

$$= n^2\, Var(K_t)\{1 - \frac{\rho^2 Var(K_t)\, Var(F_t)}{Var(K_t)\, Var(F_t)}\}$$

$$= n^2\, Var(K_t)(1 - \rho^2)$$

Für $\rho \neq 0$ gilt somit stets $Var(G_t) < Var(nK_t)$.

**Aufgabe 4:** (25 Minuten)

a) Die M-Aktie notiert in t = 0 bei 30 Euro. Bank A handelt mit Optionen und bietet an, als Stillhalter sowohl in Put- als auch in Call-Optionen der M-Aktie mit einem Ausübungspreis von Euro 28,50 und einer Laufzeit von einem Jahr zu fungieren, mit den folgenden Preisen:
Preis der Call-Option: Euro 4,80
Preis der Put-Option: Euro 1,90.
Wie hoch muss der einjährige Marktzinssatz sein, damit die Angebotspreise der A-Bank arbitragefrei sind? (4 min)

b) Ein Investor besitzt ein anfängliches Vermögen $W_0$, das er benutzt, um einerseits Zerobonds der Laufzeit T = 5 zu erwerben und andererseits Puts auf die M-Aktie. Welches Mindest-Endvermögen $W_{min}$ kann der Investor auf diese Weise erreichen? Unterstellen Sie dabei, dass die fünfjährige Spot Rate $r_5$ beträgt.

Bestimmen Sie die korrespondierende annualisierte Mindestrendite $r_{min}$ bezogen auf das anfängliche Vermögen $W_0$ und vergleichen Sie diese mit $r_5$. Welche Konsequenz hat die Konstellation $r_{min} = r_5$? (5 min)

c) Ein Investor besitzt 100 Z-Aktien. Da am Markt keine Garantiezertifikate auf die Z-Aktie erhältlich sind, möchte er solche durch Duplikation generieren.
   i) Wie lautet die hierfür erforderliche Duplikationsposition, wenn der Investor 100 Garantiezertifikate auf eine Einheit der Z-Aktie generieren möchte? Wie hoch ist der Garantiebetrag? Wie viele Optionen muss der Investor erwerben? Welche Modalitäten besitzen diese Optionen?
   ii) Die Bank AAA, bei der der Investor die Optionen erworben hat, möchte ihr Risiko aus der Stillhalter-Position eliminieren, in dem sie eine einjährige Aktienanleihe emittiert. Wie muss diese Aktienanleihe gestaltet sein, damit das Aktienrisiko der Bank in T = 1 vollständig eliminiert wird?
   iii) Die Bank AAA emittiert die Aktienanleihe zum Nennwert und stattet die Anleihe mit einem Zins der Höhe $i^* = r_1 + \Delta$ aus (dabei bezeichnet $r_1$ die einjährige Spot Rate), um den Käufer der Anleihe für das zusätzlich eingegangene Risiko zu entschädigen. Welchen Wert darf $\Delta$ maximal annehmen, damit die Bank AAA insgesamt keinen Verlust erleidet?

(16 min)

**Lösungsskizze:**

a) Ausgangspunkt: Put-Call-Parität

$$C_t - P_t = S_t - X(1 + r)^{-(T-t)}$$

mit $t = 0$, $T = 1$, $X = 28{,}50$, $C_0 = 4{,}80$, $P_0 = 1{,}90$ und $S_0 = 30$, mithin

$$2{,}90 = 30 - 28{,}50(1 + r)^{-1}$$

bzw. $28{,}50(1 + r)^{-1} = 27{,}10$

und damit

$$r = \frac{28{,}50}{27{,}10} - 1 = 0{,}05166 \quad (5{,}166\%).$$

b) Der Investor erwerbe n Puts zum Preis $P_0$. Damit kann er $W_0$ - n $P_0$ in Zerobonds anlegen. Korrespondierende Wertentwicklung:

$$W_5 = (W_0 - n\,P_0)(1 + r_5)^5 + n\,\max(X - S_5, 0),$$

wobei $\{S_t\}$ die Wertentwicklung der M-Aktie und X den Ausübungspreis des Put bezeichne.

Da $\max(X – S_T, 0) \geq 0$ folgt:

$$W_5 \geq (W_0 - n\,P_0)(1 + r_5)^5 =: W_{min}$$

Bestimmung der Mindestrendite:

$$W_0 = (1 + r_{min})^5 = W_{min} = (W_0 - n\,P_0)(1 + r_5)^5.$$

Hieraus folgt:

$$1 + r_{min} = \sqrt[5]{1 - n(P_0 / W_0)}\;(1 + r_5)$$

Es muss gelten $r_{min} \leq r_5$. Im Falle $r_{min} = r_5$ werden keine Puts erworben ($n = 0$) und das gesamte anfängliche Vermögen wird in den Zerobond investiert.

c) i) Das zu duplizierende Rückzahlungsprofil des Garantiezertifikats lautet

$\max(S_1, G)$.

Es gilt $\max(S_1, G) = S_1 + \max(G - S_1, 0)$. Bei 100 Garantiezertifikaten damit

$$100\,S_1 + 100\,\max(G - S_1, 0).$$

Es muss daher gelten:

$$100\,G = N \text{ bzw. } G = N/100$$

Der Investor muss 100 Puts auf die Z-Aktie mit Laufzeit $T = 1$ und Ausübungspreis $X = G$ erwerben.

ii) Rückzahlungsprofil Aktienanleihe in $T = 1$ mit Nennwert N aus Käufersicht allgemein:

$$Z + \min(N, nS_1)$$

Es gilt:

$\min(N, nS_1) = N + \min(nS_1 - N, 0)$

$= N - \max(N - nS_1, 0)$

Damit lautet das Rückzahlungsprofil aus Investorsicht insgesamt:

$Z + N - \max(N - nS_1, 0)$

Aus Sicht der emittierenden Bank AAA mithin:

$-Z - N + \max(N - nS_1, 0) = -Z - N + 100 \max(G - S_1, 0)$

Die Bank AAA hat nun 100 Short Put-Positionen mit Ausübungspreis $G = N/100$ inne, d.h. es gilt in $T = 1$:

$-100 \max(G - S_1, 0)$.

Bei Wahl von $n = 100$ folgt insgesamt in $T = 1$:

$-Z - N + 100 \max(G - S_1, 0) – 100 \max(G - S_1, 0)$

$= -N - Z = -(N + Z)$.

Das Aktienrisiko der Bank AAA ist damit eliminiert.

<u>Alternativ:</u> Im Falle $S_1 < G = N/100$ wird Option ausgeübt und die Bank AAA muss 100 Z-Aktien zu G erwerben (Position: $100(S_1 – G)$). Im Falle $S_1 < G$ liefert die Bank AAA die Aktien bzw. deren Marktwert 100 $S_1$ und zahlt einen Coupon von Z (Position: $-100S_1 –Z$; Saldoposition: $-(100G + Z)) = - (N+Z)$.

iii) In $t = 0$ erhält die Bank AAA die Optionsprämie 100 $P_0(G)$ sowie den Nennwert N der Anleihe. Diese Beträge kann sie ein Jahr risikolos anlegen, d.h. sie hat

$[100\, P_0(G) + N]\,(1 + r_1)$

zur Verfügung, wobei $r_1$ die einjährige Spot Rate bezeichne.

Es muss daher gelten:

$[100\, P_0(G) + N]\,(1 + r_1) \geq Z + N = N(1 + i^*)$

bzw.

$$1 + i^* \leq \left(\frac{100P_0(G) + N}{N}\right)(1 + r_1) = \left(1 + \frac{100P_0(G)}{N}\right)(1 + r_1)$$

bzw.

$$i^* \leq r_1 + \frac{100P_0(G)}{N}\,(1 + r_1)$$

bzw.

$$\Delta = i^* - r_1 \leq \frac{100P_0(G)}{N}\,(1 + r_1).$$