Prüfung Grundprinzipien der Versicherungs- und Finanzmathematik 2014

<u>Aufgabe 1:</u> (20 Minuten)

a) Gegeben sei ein einperiodiger State Space-Markt mit drei Zuständen, der aus drei Wertpapieren bestehe, einer sicheren Anlage zu 10% sowie zwei risikobehafteten Wertpapieren. Wertpapier 1 weist dabei einen anfänglichen Preis von 41 und den Rückflussvektor $(44,44,48)^T$ auf, Wertpapier 2 einen anfänglichen Preis von 19 und den Rückflussvektor $(22,18,22)^T$.

i) Bestimmen Sie die zugehörige State Space-Matrix V und den anfänglichen Preisvektor w!

ii) Weisen Sie nach, dass der vorstehend spezifizierte State Space-Markt arbitragefrei ist! Wie lautet der preiserzeugende Vektor?

iii) Bestimmen Sie die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten!

iv) Bestimmen Sie den arbitragefreien Preis eines Finanztitels mit dem Rückflussvektor $(20,10,40)^T$!

(15 min)

b) Ein Power-Call besitze das allgemeine Rückzahlungsprofil $PC_T = \max[(S_T - X)^3, 0]$. Bestimmen Sie für den Fall T = 1 durch Duplikation den Preis des Power-Calls mit Ausübungspreis X = 110 in der folgenden Situation. Die Kursentwicklung $\{S_t\}$ des Basistitels folge einem einperiodigen Binomialprozess mit Startwert $s_0 = 100$. In T = 1 kann der Kurs um 20% gefallen oder um 20% gestiegen sein. Der Einperiodenzins betrage 4%. (5 min)

<u>Lösungsskizze:</u>

<u>Teilaufgabe a)</u>

i) $$V = \begin{pmatrix} 1.1 & 44 & 22 \\ 1.1 & 44 & 18 \\ 1.1 & 48 & 22 \end{pmatrix}$$

$$w = (1,\ 41,\ 19)^T$$

ii) Zu überprüfen ist, ob das Gleichungssystem

$V^T x = w$,

wobei $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, eine strikt positive Lösung besitzt.

Dies führt auf das folgende Lineare Gleichungssystem (dabei multiplizieren wir die erste Zeile mit 40)

(I) $\quad 44\,x_1 + 44\,x_2 + 44x_3 = 40$

(II) $\quad 44\,x_1 + 44\,x_2 + 48\,x_3 = 41$

(III) $\quad 22\,x_1 + 18\,x_2 + 22\,x_3 = 19$.

Aus (II) – (I) folgt $x_3 = 0.25$ und aus (I) – 2(III) folgt $x_2 = 0.25$. Aus (I) folgt dann $x_1 = 9/22 = 0.4091$.

Das Gleichungssystem besitzt damit eine strikt positive Lösung, der State Space-Markt ist somit arbitragefrei.

Der preiserzeugende Vektor lautet $(9/22, 0.25, 0.25)^T$.

iii) Der risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsvektor q ergibt sich zu:

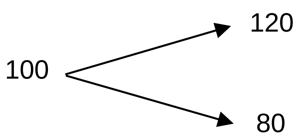
$$q = 1.1(9/22, 0.25, 0.25)^T$$
$$= (0.45, 0.275, 0.275)^T .$$

iv) Die arbitragefreie Bewertung ergibt sich durch Diskontierung des risikoneutralen Erwartungswerts, d.h.

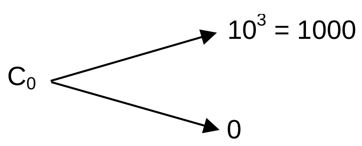
$$P = (1.1)^{-1}[20(0.45) + 10(0.275) + 40(0.275)]$$
$$= (1.1)^{-1}(22.75) = 20.68 .$$

Teilaufgabe b)

Für den Basistitel gilt



Für den Power-Call mit Ausübungspreis X = 110 entsprechend



Duplikation in t = 1:

(I) $\quad 120x + 1.04\,y = 1000$

(II) $\quad 80x + 1.04\,y = 0$

Aus (I)-(II) folgt $40x = 1000$ und damit $x = 25$. Für y resultiert hieraus

$y = [1000 - 120\,(25)]/1.04 = -2000/1.04 = -1923.08.$

Der Preis C_0 des Power-Calls ergibt sich als Preis des Duplikationsportfolios zu

$C_0 = 100x + y = 100(25) - 1923.08 = 576.92.$

Aufgabe 2: (25 Minuten)

a) Es seien $Z = \{ Z_1,...,Z_T \}$ und $V = \{ V_1,...,V_T \}$ zwei Zahlungsreihen mit zugehörigen Barwerten P_Z und P_V bzw. Macaulay-Durationen D_Z und D_V. Von Zahlungsreihe Z werden x Einheiten, von Zahlungsreihe V werden y Einheiten erworben. Weisen Sie nach, dass für die Duration D_W der Zahlungsreihe $W = xZ + yV$ die folgende Beziehung gilt:

$$D_W = \frac{x\,P_Z D_Z + y\,P_V D_V}{xP_Z + y\,P_V}.$$

(5 min)

b) Ein Investor möchte einen Anlagebetrag von EUR 9 999 bei einem derzeitigen Marktzins von 10% p.a. und flacher Zinsstruktur in festverzinsliche Wertpapiere investieren. Ihm stehen Einheits-Zerobonds mit einer Restlaufzeit von einem (Zerobond 1) und sieben Jahre (Zerobond 2) zur Verfügung. Wie muss er sein Investitionsbudget aufteilen, damit sein Vermögen nach fünf Jahren gegen mögliche Zinsänderungen, die sich unmittelbar nach Anlage realisieren, immunisiert ist? Wie viele absolute Stückzahlen erwirbt der Investor dabei von Zerobond 1 sowie von Zerobond 2 ? (Vernachlässigen Sie dabei Ganzzahligkeitsbedingungen.)
<u>Hinweis:</u> Benutzen Sie das Ergebnis von Teilaufgabe a).
(10 min)

c) Berechnen Sie das Vermögen des Investors nach fünf Jahren, wenn sich der Marktzins nach der Investition
(i) nicht ändert,
(ii) unmittelbar nach Anlage auf 8% absinkt und im Weiteren dort verbleibt,
(iii) unmittelbar nach Anlage auf 12% ansteigt und im Weiteren dort verbleibt.
<u>Hinweis:</u> Sollten Sie Teilaufgabe b) nicht gelöst haben, gehen Sie von einer Aufteilung des Investitionsbudgets im Verhältnis 1/3 Zerobond 1 sowie 2/3 Zerobond 2 aus.
(10 min)

Lösungsskizze:

a) <u>Vorüberlegung:</u> Es gilt

$$D_Z \cdot P_Z = \sum t\,Z_t (1+r)^{-t}, D_V \cdot P_V = \sum t\,V_t (1+r)^{-t}.$$

Damit folgt:

$$D_W = \frac{\sum t\,(xZ_t + yV_t)(1+r)^{-t}}{\sum (xZ_t + yV_t)(1+r)^{-t}}$$
$$= \frac{x\sum t\,Z_t(1+r)^{-t} + y\sum t\,V_t(1+r)^{-t}}{x\sum Z_t(1+r)^{-t} + y\sum V_t(1+r)^{-t}}$$
$$= \frac{xD_Z P_Z + yD_V P_V}{xP_Z + yP_V}$$

b) Investor erwirbt x Einheiten von Zero-Bond 1, sowie y Einheiten von Zero-Bond 2

Zielduration: $D_W = 5$

$D_Z = 1$, $D_V = 7$

$P_Z = (1+r)^{-1} = (1.1)^{-1}$

$P_V = (1+r)^{-7} = (1.1)^{-7}$

<u>Bedingung 1:</u> $I_0 = 9\,999 = x\,P_Z + y\,P_V$

<u>Folgerung:</u> $y\,P_V = I_0 - x\,P_Z$

<u>Bedingung 2:</u> (aus Teilaufgabe a)

$$5 = D_W = \frac{xD_Z P_Z + (I_0 - xP_Z)D_V}{I_0}$$
$$x = \frac{I_0(5 - D_V)}{P_Z(D_Z - D_V)} = \frac{1}{3} I_0(1.1)$$
$$= 3\,333(1.1) = 3\,666.30$$

⇒ Investor erwirbt 3 666.30 Einheiten von Zerobond 1 mit Investitionswert in t = 0 von EUR 3 333.

Analog: $y = \frac{I_0 - xP_Z}{P_V} = 6\,666\,(1.1)^7 = 6\,666\,(1.948717) = 12\,990.15$

⇒ Investor erwirbt 12 990.50 Einheiten von Zerobond 2 mit Investitionswert in t = 0 von EUR 6 666.

<u>Fazit:</u> Es erfolgt eine Aufteilung des Investitionsbudgets zu 1/3 Zerobond 1 und 2/3 Zerobond 2.

c) i) $3\,333\,(1.1)^5 + 6\,666\,(1.1)^5 = 9\,999\,(1.1)^5 = 9\,999\,(1.61051) = 16\,103.49$

ii) Entwicklung Zerobond 1: Rückzahlung zu 1 in t = 1, dann Wiederanlage über 4 Jahre zu 8 %, d.h. $(1.08)^4 = 1.360489$.

Entwicklung Zerobond 2: Wert in t = 5 entspricht abgezinstem Endwert unter 8 %, d.h. $(1.08)^{-2} = 0.857339$.
Wert in t = 5 <u>insgesamt</u> somit: 3 666.30 (1.360489) + 12 990.50 (0.857339)
= 4 987.96 + 11 137.26 = 16 125.22

iii) Analog: 3 666.30 $(1.12)^4$ + 12 990.50 $(1.12)^{-2}$ = 3 660.30 (1.573519)
+ 12 990.50 (0.797194) = 5 768.99 + 10 355.95 = 16 124.94

Aufgabe 3: (20 Minuten)

Gehen Sie aus von der gestutzten Lebensdauer CT = CT_x einer x-jährigen Person. Arbeiten Sie dabei der Einfachheit halber mit einem unendlichen Wertebereich für CT.

a) Bestimmen Sie den Leistungsbarwert $LBW_{LT}(v)$ einer lebenslänglichen Todesfallversicherung mit einer Versicherungssumme der Höhe 1 in Termen von CT und in Abhängigkeit vom Diskontierungsfaktor v ! (1 min)

b) Bestimmen Sie auf dieser Basis den erwarteten Leistungsbarwert $A_x(v)$ der lebenslänglichen Todesfallversicherung unter Benutzung von aufgeschobenen Sterbewahrscheinlichkeiten und bestimmen Sie die Varianz des Leistungsbarwerts in Termen von $A_x(v)$. (3 min)

c) Betrachten Sie nun eine lebenslängliche Todesfallversicherung mit einer geometrisch wachsenden Versicherungssumme. Dabei weise die (potentielle) Zahlung zum Zeitpunkt x + t die Höhe $(1+c)^t$ $(0 < c < 1)$ auf. Bestimmen Sie den Leistungsbarwert LBW_{ILT} dieser Versicherung. Welche Beziehung besteht zu $LBW_{LT}(v)$? (3 min)

d) Bestimmen Sie den erwarteten Leistungsbarwert und die Varianz des Leistungsbarwerts der lebenslänglichen Todesfallversicherung aus Aufgabenteil c), jeweils in Termen von $A_x(v)$. (3 min)

e) Betrachten Sie nun eine im Alter x sofort beginnende Leibrente mit einer geometrisch wachsenden Rente. Dabei weise die (potentielle) Rentenzahlung zum Zeitpunkt x + t die Höhe $(1+c)^t$ $(0 < c < 1)$ auf. Die Größe (1+c)v sei dabei verschieden von Eins. Bestimmen Sie den Leistungsbarwert LBW_{ILR} dieser Versicherung. Welche Beziehung besteht zu $LBW_{LT}(v)$? (5 min)

f) Bestimmen Sie den erwarteten Leistungsbarwert und die Varianz des Leistungsbarwerts der Leibrente aus Aufgabenteil e), jeweils in Termen von $A_x(v)$. (5 min)

Lösungsskizze:

a) Die Leistung der lebenslänglichen Todesfallversicherung erfolgt im Todeszeitpunkt, d.h. in CT+1. Der korrespondierende Leistungsbarwert ist daher gegeben durch

$$LBW_{LT}(v) = v^{CT+1}.$$

b) $$A_x(v) = E\left[LBW_{LT}(v)\right] = E(v^{CT+1}) = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} P(CT = t)$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_{t|}q_x$$

$$\begin{aligned} Var(LBW_{LT}) &= E\left[(v^{CT+1})^2\right] - E(v^{CT+1})^2 \\ &= E\left[(v^2)^{CT+1}\right] - A_x(v)^2 \\ &= A_x(v^2) - A_x(v)^2 \end{aligned}$$

c) Der Barwert der Zahlung im Todeszeitpunkt x + t lautet $h^t v^t = (hv)^t$, wobei h := 1+c. Hieraus folgt

$$LBW_{ILT} = (hv)^{CT+1}$$

Damit gilt

$$LBW_{ILT} = LBW_{LT}(h\,v)$$

d) Es gilt

$$E(LBW_{ILT}) = E\left[LBW_{LT}(hv)\right] = A_x(hv)$$

sowie

$$Var(LBW_{ILT}) = Var[LBW_{LT}(hv)] = [A_x(h^2v^2) - A_x(hv)^2]$$

e) Für den Leistungsbarwert der geometrisch wachsenden Leibrente gilt mit h:= 1 + c

$$\begin{aligned} LBW_{ILR} &= 1 + hv + \ldots + (hv)^{CT} \\ &= \frac{1-(hv)^{CT+1}}{1-hv} \end{aligned}$$

Somit gilt

$$LBW_{ILR} = \frac{1-LBW_{LT}(hv)}{1-hv}$$

f)

$$\begin{aligned} E(LBW_{ILR}) &= \frac{1-E\left[LBW_{LT}(hv)\right]}{1-hv} \\ &= \frac{1-A_x(hv)}{1-hv} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(\mathrm{LBW}_{\mathrm{ILR}}) = \frac{\mathrm{Var}\left[\mathrm{LBW}_{\mathrm{LT}}(\mathrm{hv})\right]}{(1-\mathrm{hv})^2}$$

$$= \frac{A_x(h^2v^2) - A_x(\mathrm{hv})^2}{(1-\mathrm{hv})^2}$$

<u>Aufgabe 4:</u> (25 Minuten)

Ein 55-jähriger Versicherungsnehmer schließe eine DAX-gebundene Lebensversicherung auf den Erlebensfall mit einer Laufzeit von einem Jahr ab. Eine Todesfallleistung wird nicht fällig bzw. wird in der Analyse ausgeblendet, ebenso bleiben Betriebskosten außen vor.

a) Die Versicherungsleistung bei Erleben betrage mindestens 104% bezogen auf einen Betrag von EUR 18 000. Im Falle einer **negativen** DAX-Entwicklung betrage - <u>wenn</u> die Mindestversicherungsleistung hierdurch überschritten wird - die Rückzahlung EUR 18 000 zuzüglich einer Partizipation in Höhe von 40% der einjährigen (negativen) DAX-Rendite bezogen auf einen investierten Betrag von EUR 18 000. Bestimmen Sie das Rückzahlungsprofil des Produkts zum Zeitpunkt t = 1! (3 min)

b) Gegeben sei nun ein einperiodiges Binomialmodell für die DAX-Entwicklung. Der Startwert des DAX betrage DAX(0) = 6 000. Am Ende der Periode ist der DAX entweder um 40% gestiegen oder um 25% gefallen. Der risikolose Zins betrage 5%. Bestimmen Sie die Einmalprämie der DAX-gebundenen Lebensversicherung gemäß Teilaufgabe a) durch **direkte Duplikation des Rückzahlungsprofils**! (10 min)

c) Zerlegen Sie nun das Rückzahlungsprofil gemäß Aufgabenteil a) unter Zugrundelegung des Binomialmodells gemäß Aufgabenteil b) so, dass die **eingebettete Option** expliziert wird. Welche Modalitäten weist diese Option auf? Welchen fairen Wert besitzt diese Option? (12 min)

<u>Lösungsskizze:</u>

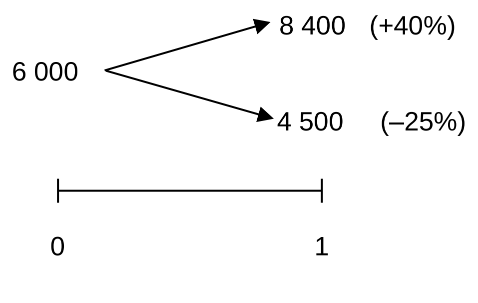
a) $$L_1 = \max\left\{18000\,(1.04),\, 18000 - 18000\,(0.4)\,R_{\mathrm{DAX}}\right\}$$

$$= \max\left\{18720,\, 18000\,(1 - 0.4\,R_{\mathrm{DAX}})\right\},$$

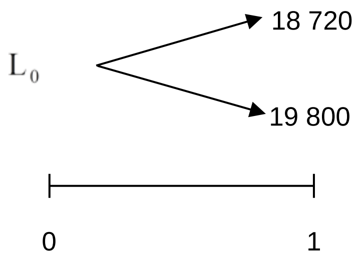
wobei

$$R_{\mathrm{DAX}} = \frac{\mathrm{DAX}(1) - \mathrm{DAX}(0)}{\mathrm{DAX}(0)} \;.$$

b) DAX-Entwicklung:



Wenn der DAX steigt, so beträgt die Rückzahlung 18 720. Wenn der DAX fällt, beträgt die Rückzahlung 18 000 (1 + 0.4(0.25)) = 18 000 (1.1) = 19 800.



Duplikation in t = 1:

(I) 8 400 x + 1.05 y = 18 720
(II) 4 500 x + 1.05 y = 19 800.

Aus (I) – (II) folgt 3 900 x = – 1 080 und damit x = – 0.276923.

Aus (I) folgt dann

$$y = [18\,720 + 8\,400\,(0.276923)]\,(1.05)^{-1} = 20\,043.96\,.$$

Wert des Duplikationsportfolios in t = 0:

$$\begin{aligned} 6\,000\,x + y &= -\,6\,000\,(0.276923) + 20\,043.96 \\ &= 20\,043.96 - 1\,661.54 = 18\,382.42\,. \end{aligned}$$

Die Einmalprämie beträgt damit

$$EP = 18\,382.42 \cdot p_{55}\,.$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} L_1 &= \max\left\{18\,720,\, 18\,000 - \frac{18\,000\,(0.4)}{DAX(0)}\,[DAX(1) - DAX(0)]\right\} \\ &= 18\,720 + \max\{-\,720 + 1.2\;[DAX(0) - DAX(1)],\, 0\} \\ &= 18\,720 + 1.2\,\max\left\{DAX(0) - DAX(1) - \frac{720}{1.2},\, 0\right\} \\ &= 18\,720 + 1.2\,\max\{6\,000 - DAX(1) - 600,\, 0\} \\ &= 18\,720 + 1.2\,\max\{5\,400 - DAX(1),\, 0\} \end{aligned}$$

Eingebettet ist ein einjähriger DAX-Put mit einem Ausübungspreis von EUR 5 400.

Faire Bewertung:

i) Es muss gemäß b) gelten

$18\,382.42 = 18\,720\,(1.05)^{-1} + 1.2\,P_{DAX}\,(5\,400)$.

Hieraus folgt

$$P_{DAX}(5\,400) = \frac{18\,382.42 - 17\,828.57}{1.2} = 461.54\,.$$

ii) Alternativ über Duplikation des Puts. Das Rückzahlungsprofil des DAX-Put lautet:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 900 \end{pmatrix}$$