Prüfung Grundprinzipien der Versicherungs- und Finanzmathematik 2016

Aufgabe 1: (27 min)

a) Gegeben sei ein einperiodiger State Space-Markt bestehend aus einer risikolosen Anlage zum sicheren Zins r und einer "Binomialaktie" mit Wert s in t = 0 sowie Werten us bzw. ds (0 < d < u) in t = 1.

i) Bestimmen Sie die State Space-Matrix V und den anfänglichen Preisvektor w dieses Markts! (1 min)

ii) Bestimmen Sie den Wertebereich von r, für den die Arbitragefreiheit des Markts gewährleistet ist! (6 min)

iii) Wie lauten in diesem Falle die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten? (1 min)

iv) Betrachten Sie einen Forward auf die Binomialaktie und bestimmen Sie den arbitragefreien Schlussabrechnungspreis F_0 dieses Forward durch Analyse eines geeigneten State Space-Markts! (6 min)

b) Gegeben sei nun ein allgemeiner einperiodiger State Space-Markt mit s Zuständen und n+1 Finanztiteln. Der Markt sei vollständig. Der Finanztitel 0 entspreche dabei der risikolosen Anlage zum sicheren Zins r. Der preiserzeugende Vektor $w^* = (w_1^*, \dots, w_s^*)^T$ des State Space-Markts existiere und sei strikt positiv.

i) Weisen Sie nach, dass $\sum_{i=1}^{s} q_i = 1$ gilt. (4 min)

Hinweis: Benutzen Sie die Beziehung $V^T w^* = w$, wobei w dem Preisvektor der Finanztitel des Marktes entspricht und V die State Space-Matrix ist.

ii) Bestimmen Sie den Preis des Finanztitels, dessen Rückflussvektor $C = (c_1, \dots, c_s)^T$ in t=1 dem ersten Einheitsvektor entspricht ($c_1 = 1$, $c_j = 0$ für $j \neq 1$) durch *risikoneutrale Bewertung*! Interpretieren Sie das Ergebnis! (3 min)

iii) Bestimmen Sie den Preis des i-ten Einheitsvektors ($c_i = 1$, $c_j = 0$ für $j \neq i$) durch *Duplikation*! (6 min)

Lösungsskizze:

Aufgabenteil a) :

i) State Space-Matrix

$$V = \begin{pmatrix} 1+r & us \\ 1+r & ds \end{pmatrix}$$

Preisvektor

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$$

ii) Zu untersuchen ist das Gleichungssystem $V^T w^* = w$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1+r & 1+r \\ us & ds \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} .$$

Es gilt zunächst

$$|V| = (1+r)\, s\,(d-u) \neq 0 ,$$

da nach Voraussetzung $u > d$. Das Gleichungssystem ist somit eindeutig lösbar.

Cramersche Regel:

$$w_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+r \\ s & ds \end{vmatrix}}{|V|} = \frac{s\left[d-(1+r)\right]}{(1+r)s(d-u)} = \frac{1+r-d}{(1+r)(u-d)}$$

$$w_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 1+r & 1 \\ us & s \end{vmatrix}}{|V|} = \frac{s\left[(1+r)-u\right]}{(1+r)s(d-u)} = \frac{u-(1+r)}{(1+r)(u-d)}$$

Für die Arbitragefreiheit des Marktes muss $w_1^* > 0$ sowie $w_2^* > 0$ gewährleistet sein. Da $(1+r)(u-d) > 0$ reduziert sich dies auf die Forderungen $(1+r)-d > 0$ bzw. $u-(1+r) > 0$ und damit insgesamt auf

$$d < 1+r < u$$

iii) Es gilt $q_1 = (1+r)\,w_1^*$ und $q_2 = (1+r)\,w_2^*$ und damit

$$q_1 = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad q_2 = \frac{u-(1+r)}{u-d}$$

iv) Betrachte den State Space-Markt bestehend aus sicherer Anlage, Aktie und Forward. Die State Space-Matrix V ist dann gegeben durch

$$V = \begin{pmatrix} 1+r & us & us-w \\ 1+r & ds & ds-w \end{pmatrix}$$

und der Preisvektor durch $w = (1, s, 0)^T$. Der Markt ist arbitragefrei, wenn das Gleichungssystem

$$V^T x = w$$

eine strikt positive Lösung besitzt.
Konkret lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1+r & 1+r \\ us & ds \\ us-w & ds-w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Einzelgleichungen lauten somit:

(1) $(1+r)(x_1 + x_2) = 1$
(2) $usx_1 + dsx_2 = s$
(3) $usx_1 + dsx_2 = w(x_1 + x_2)$

Aus (3) in Verbindung mit (1) und (2) folgt dann

$$w = \frac{usx_1 + dsx_2}{x_1 + x_2} = (1+r)s.$$

Aufgabenteil b) :

i) Die erste Zeile von V^T ist gegeben durch den Vektor $(1 + r)(1, \ldots, 1)$ und die erste Zeile von w ist gegeben durch den Skalar 1. Die erste Zeile des Gleichungssystems $V^T w^* = w$ lautet somit $(1+r)\sum_{i=1}^{n} w_i^* = 1$ und damit gilt $\Sigma q_i = 1$.

ii) $$w_C = \frac{1}{1+r} E_Q[C] = \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^{s} c_j \, q_j$$
$$= \frac{1}{1+r} c_1 q_1 = \frac{1}{1+r}(1+r) w_1^* = w_1^* .$$

Der arbitragefreie Preis des ersten Einheitsvektors entspricht dem ersten Wert des preiserzeugenden Vektors.

iii) Da der State Space-Markt vollständig ist, d.h. die Matrix V den Rang s hat, lässt sich jeder (s,1)-Vektor als Linearkombination darstellen, d.h. es gibt einen Portfoliovektor x mit $Vx = e_i$, wobei $e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^T$ dem i-ten Einheitsvektor entspricht. Der Preis dieses Portfolios ist gegeben durch

$$\Sigma x_i w_i = w^T x = (V^T w^*)^T x = w^{*T} V x$$
$$= w^{*T} e_i = w_i^* .$$

Aufgabe 2: (17 min)

a) Gegeben seien zwei Standardbonds A und B mit korrespondierenden Kursen P_A und P_B in t = 0, Nennwerten N_A und N_B, Nominalzinsen i_A und i_B sowie Restlaufzeiten $T_A = 2$ und $T_B = 3$. Gehen Sie ferner davon aus, dass die einjährige Spot Rate r_1 bereits bekannt ist.

i) Wie lauten die Zahlungsströme der Bonds A und B? (1 min)

ii) Bestimmen Sie die zugehörige Diskontstruktur (Kurse der Einheitszerobonds) $\{b_1, b_2, b_3\}$ sowie die (restliche) Zinsstruktur (Spot Rates) $\{r_2, r_3\}$! (6 min)

b) Weisen Sie die folgende Eigenschaft der (Macaulay-)Duration nach

$$D_\tau(r) = D(r) - \tau \,,$$

d.h. die Duration verkürzt sich um den Betrag der verstrichenen Laufzeit. (4 min)

Hinweis: $P_\tau(r) = (1+r)^\tau P_0(r)$.

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion $K_s(r) = (1+r)^s P_0(r)$ im Zeitpunkt s = D(r) einen Extremwert aufweist. Dabei bezeichne $P_0(r)$ den Barwert eines Festzinstitels. (4 min)

d) Welcher allgemeine Zusammenhang besteht zwischen der t-jährigen Spot Rate zum Zeitpunkt 0 und den einperiodigen Forwardrates (implizite Terminzinssätze)? (1 min)

e) Welcher allgemeine Zusammenhang besteht zwischen der t-jährigen Spot Rate zum Zeitpunkt 0 und dem Preis eines Einheitszerobonds mit Laufzeit t? (1 min)

Lösungsskizze:

a) Der Zahlungsstrom von Bond A lautet $\{-P_A, N_A \cdot i_A, N_A \cdot i_A + N_A\}$, der Zahlungsstrom von Bond B lautet $\{-P_B, N_B \cdot i_B, N_B \cdot i_B, N_B \cdot i_B + N_B\}$.
Der Kurs b_1 eines Einheitszerobonds mit einer Laufzeit von einem Jahr bei bekannter Spot Rate ist gegeben durch

(I) $b_1 = (1+r_1)^{-1}$.

Ferner gilt

(II) $P_A = N_A \cdot i_A \cdot b_1 + (N_A \cdot i_A + N_A) \cdot b_2$

(III) $P_B = N_B \cdot i_B \cdot b_1 + N_B \cdot i_B \cdot b_2 + (N_B \cdot i_B + N_B) b_3$.

Da b_1 gemäß (I) bekannt ist, folgt aus (II)

$$b_2 = \frac{P_A - N_A \cdot i_A \cdot b_1}{N_A \cdot i_A + N} = \frac{P_A - N_A \cdot i_A \cdot b_1}{N_A (1 + i_A)}$$

und damit aus (III)

$$b_3 = \frac{P_B - N_B \cdot i_B(b_1 + b_2)}{N_B \cdot i_B + N_B} = \frac{P_B - N_B \cdot i_B(b_1 + b_2)}{N_B(1 + i_B)} \ .$$

Hieraus folgt schließlich für die restlichen Spot Rates

$$r_2 = \sqrt{\frac{1}{b_2}} - 1$$

sowie

$$r_3 = \sqrt{\frac{1}{b_3}} - 1 \ .$$

b) Zunächst gilt (Produktregel)

$$P'_\tau(r) = \tau(1+r)^{\tau-1} P_0(r) + (1+r)^\tau P'_0(r)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} D_\tau(r) &= -\frac{(1+r)P'_\tau(r)}{P_\tau(r)} \\ &= \frac{-\tau(1+r)^\tau P_0(r) - (1+r)^{\tau+1} P'_0(r)}{(1+r)^\tau P_0(r)} \\ &= -\tau - (1+r)\frac{P'_0(r)}{P_0(r)} \\ &= D(r) - \tau \ . \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} K'_s(r) &= s(1+r)^{s-1} P(r) + (1+r)^s P'(r) \\ &= H(r)\left[s + (1+r)\frac{P'(r)}{P(r)}\right] \\ &= H(r)[s - D(r)] \end{aligned}$$

Da H(r) > 0 gilt $K'_s(r) = 0$ genau dann, wenn s = D(r).

<u>Alternativ:</u> $K'_s(r) = 0$ genau dann, wenn $sP(r) = (1+r)P'(r)$ und damit s = D(r).

d) Es gilt

$$[1+r(0,t)]^t = [1+f_1(0)] \cdot \ldots [1+f_t(0)],$$

wobei $r(0,t)$ die betreffende Spot Rate und $f_j(0)$, j = 1, …, t, die betreffenden Forward Rates bezeichnen.

Alternativ:

$$1+f_t(0) = \frac{[1+r_0(t)]^t}{[1+r_0(t-1)]^{t-1}}$$

e) Es gilt

$$b(0,t) = [1+r(0,t)]^{-t},$$

bzw.

$$r(0,t) = [1/b(0,t)]^{1/t} - 1,$$

wobei $r(0,t)$ die betreffende Spot Rate und $b(0,t)$ den Preis des betreffenden Einheitszerobonds bezeichnen.

Aufgabe 3: (18 min)

Gehen Sie aus von der gestutzten Lebensdauer $CT = CT_x$ einer x-jährigen Person!

a) Fassen Sie den (stochastischen) Leistungsbarwert der Kapitallebensversicherung als Summe der (stochastischen) Leistungsbarwerte der Risikolebensversicherung sowie der Erlebensfallversicherung auf.

   i) Bestimmen Sie auf dieser Grundlage den Leistungsbarwert einer n-jährigen Kapitallebensversicherung in Termen von CT! (5 min)

   ii) Bestimmen Sie auf dieser Grundlage ferner die Varianz des Leistungsbarwerts der Kapitallebensversicherung in Abhängigkeit der Leistungsbarwerte der Risikolebensversicherung sowie der Erlebensfallversicherung. Interpretieren Sie das Ergebnis! (3 min)

b) Bestimmen Sie den Prämienbarwert einer vorschüssigen laufenden Prämienzahlung eines n-jährigen Versicherungskontrakts in Termen von CT! Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Prämienbarwert und dem Leistungsbarwert einer Kapitallebensversicherung nach a i)? (4 min)

   Hinweis: Setzen Sie dabei die Kenntnis der stochastischen geometrischen Summe voraus!

c) i) Charakterisieren Sie die Leistungsseite einer Risikolebensversicherung mit einer Vertragslaufzeit der Länge n und einer arithmetisch fallenden Versicherungssumme in Termen der gestutzten Lebensdauer CT. Die im Zeitpunkt x + 1 (potentiell) zu zahlende Leistung beträgt 1. Diese Leistung vermindert sich pro Folgeperiode um den Betrag 1/n. (4 min)

ii) Bestimmen Sie auf dieser Grundlage den (stochastischen) Leistungsbarwert dieser Versicherung! (2 min)

Lösungsskizze:

a)

i) Für den Leistungsbarwert LBW_{EF} einer n-jährigen Erlebensfallversicherung gilt:

$$LBW_{EF} = v^n \cdot I\,(CT \geq n) = \begin{cases} 0 & CT = 0, \ldots, n-1 \\ v^n & CT = n,\ n+1, \ldots \end{cases}$$

Für den Leistungsbarwert LBW_{RL} einer n-jährigen Risikolebensversicherung gilt:

$$LBW_{RL} = v^{CT+1} \cdot I\,(CT \leq n-1) = \begin{cases} v^{CT+1} & CT = 0,\ 1, \ldots,\ n-1 \\ 0 & CT = n,\ n+1, \ldots \end{cases}$$

Für den Leistungsbarwert LBW_{KL} einer n-jährigen Kapitallebensversicherung gilt damit:

$$\begin{aligned} LBW_{KL} &= LBW_{EF} + LBW_{RL} \\ &= \begin{cases} v^{CT+1} & CT = 0, 1, \ldots,\ n-1 \\ v^n & CT = n,\ n+1, \ldots \end{cases} \end{aligned}$$

ii) Für die Varianz erhalten wir zunächst:

$$\begin{aligned} Var(LBW_{KL}) &= Var(LBW_{RL} + LBW_{EF}) \\ &= Var(LBW_{RL}) + Var(LBW_{EF}) + 2Cov(LBW_{RL}, LBW_{EF}) \\ &= Var(LBW_{RL}) + Var(LBW_{EF}) \\ &\quad + 2\left[E\,(LBW_{RL} \cdot LBW_{EF}) - E(LBW_{RL})\, E(LBW_{EF})\right]. \end{aligned}$$

Offenbar gilt aber:

$LBW_{RL} \cdot LBW_{EF} \equiv 0$ und damit $E\,(LBW_{RL} \cdot LBW_{EF}) = 0$.

Insgesamt erhalten wir damit:

$$\mathrm{Var}(LBW_{KL}) = \mathrm{Var}(LBW_{RL}) + \mathrm{Var}(LBW_{EF}) - 2E(LBW_{RL})\,E(LBW_{EF}).$$

b) Für den Prämienbarwert PBW gilt mit d = 1 – v:

$$PBW = \begin{cases} 1 + v + v^2 + \ldots + v^{CT} & CT = 0, 1, \ldots, n-1 \\ 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} & CT = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{d}(1 - v^{CT+1}) & CT = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \frac{1}{d}(1 - v^{n}) & CT = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

Offenbar gilt:

$$PBW = \frac{1}{d}(1 - LBW_{KL}).$$

c) i) Zum Zeitpunkt $x + t$ $(t \leq n)$ erfolgt eine Zahlung der Höhe

$$1 - \frac{t-1}{n} = \frac{n-t+1}{n}.$$

Der Barwert dieser Zahlung beträgt

$$\left(1 - \frac{t-1}{n}\right) v^t.$$

ii) Damit gilt

$$LBW_{DRL} = \begin{cases} \left(1 - \frac{CT}{n}\right) v^{CT+1} & CT = 0, \ldots, n-1 \\ 0 & CT \geq n \end{cases}$$

$$= \left(1 - \frac{CT}{n}\right) v^{CT+1}\, I_{\{CT<n\}}$$

<u>Aufgabe 4:</u> (28 min)

Gegeben sei ein einperiodiges Binomialmodell für die Entwicklung I(t) eines Aktienindex. Der Startwert des Index betrage I(0) = 700. Am Ende der Periode ist der Index entweder um 40% gestiegen oder um 25% gefallen. Der risikolose Zins betrage 5%.

Ein 55-jähriger Versicherungsnehmer schließe nun eine Lebensversicherung auf den Erlebensfall mit einem Jahr Laufzeit ab. Eine Todesfallleistung wird nicht fällig bzw. wird in der Analyse ausgeblendet, ebenso bleiben Betriebskosten außen vor.

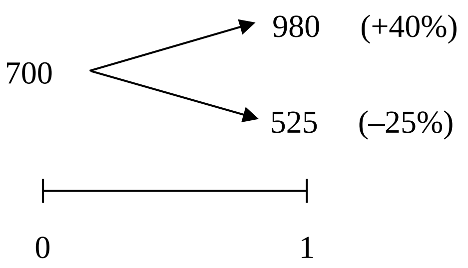
a) Die Versicherungsleistung bei Erleben betrage mindestens EUR 1 400 oder bei **negativer** Entwicklung des Index EUR 1 400 vermehrt um den Betrag der negativen (einperiodigen) Rendite des Index. Bestimmen Sie die Einmalprämie dieser Versicherung durch **risikoneutrale Bewertung** des Rückzahlungsprofils (eine Explizierung der eingebetteten Option ist in diesem Fall nicht erforderlich!). (12 min)

b) Bestimmen Sie alternativ die Einmalprämie der Versicherung unter a), indem Sie insbesondere die eingebettete Option isolieren und einer **risikoneutralen Bewertung** unterziehen. Welche Option ist in der Versicherung eingebettet? (6 min)

c) Die einjährige Erlebensfallversicherung werde nun gegen eine Einmalprämie von EUR 2 100 erworben. Die Rückzahlung betrage mindestens EUR 2 100 oder aber – im Falle einer **negativen** Entwicklung des Index – EUR 2 100 vermehrt um die Partizipation an dem Betrag der negativen Rendite des Index mit einer Partizipationsrate 0 < pr < 1. Bestimmen Sie in diesem Falle die faire Partizipationsrate über die **direkte Duplikation des Rückzahlungsprofils** der Erlebensfallversicherung! (10 min)

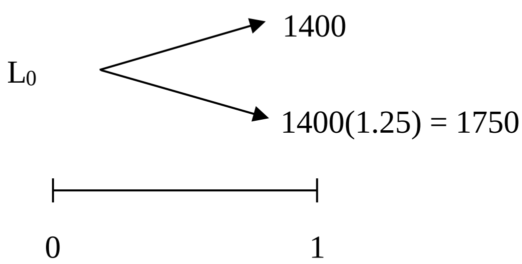
<u>Lösungsskizze:</u>

a) Indexentwicklung:



$$L_1 = \max\left\{1400, 1400 - 1400\,\frac{I(1) - I(0)}{I(0)}\right\}.$$

Korrespondierendes Rückzahlungsprofil im Erlebensfall



Um eine risikoneutrale Bewertung durchzuführen, sind die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Dies erfordert zunächst die Berechnung des preiserzeugenden Vektors.

State Space-Matrix und Preisvektor

$$V = \begin{pmatrix} 1.05 & 980 \\ 1.05 & 525 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 700 \end{pmatrix} .$$

Das Gleichungssystem zur Bestimmung des preiserzeugenden Vektors $(w_1^*, w_2^*)^T$ ist dann gegeben durch $V^T w^* = w$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1.05 & 1.05 \\ 980 & 525 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 700 \end{pmatrix} .$$

Für die Determinante gilt: det(V^T) = – 4 77.75.

Lösung nach Cramerscher Regel:

$$w_1^* = \frac{525 - 700(1.05)}{-477.75} = \frac{210}{477.75} = \frac{40}{91} = 0.439560$$

$$w_2^* = \frac{700(1.05) - 980}{-477.75} = \frac{245}{477.75} = \frac{20}{39} = 0.512821 .$$

Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten aus

$$q_1 = (1.05) w_1^* = \frac{6}{13} = 0.461538$$

$$q_2 = (1.05) w_2^* = \frac{7}{13} = 0.538462 .$$

Es gilt $q_i > 0$ und $q_1 + q_2 = 1$.

Risikoneutrale Bewertung des Rückzahlungsprofils ergibt

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{1.05}(1400 \cdot q_1 + 1750 \cdot q_2) \\ &= \frac{1}{1.05}(646.1532 + 943.085) = \frac{1588.4617}{1.05} \\ &= 1512.82 . \end{aligned}$$

Die korrespondierende Einmalprämie beträgt

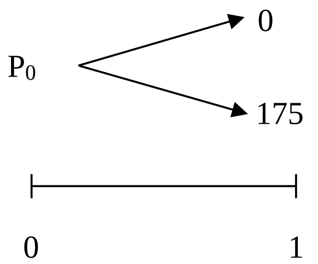
$$EP = 15\,12.82 \cdot p_{55}$$

b) Es gilt

$$L_1 = \max\left\{1400, 1400 - 1400\,\frac{I(1)-I(0)}{I(0)}\right\}$$
$$= 1400 + \frac{1400}{700}\max\{I(0)-I(1), 0\}$$
$$= 1400 + 2\max\{I(0)-I(1), 0\}$$

Eingebettet in die Versicherung ist eine einjährige Europäische Putoption auf den DAX mit einem Ausübungspreis von X = I(0) = 700.

Entwicklung der Putoption:



Risikoneutrale Bewertung ergibt:

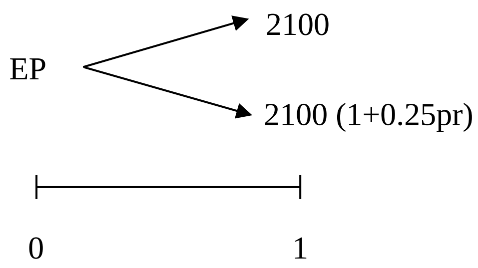
$$P_0 = \frac{1}{1.05}(0 \cdot q_1 + 175 \cdot q_2) = \frac{94.23}{1.05} = 89.74 \;.$$

Hieraus erhalten wir insgesamt

$$L_0 = 1400\,(1.05)^{-1} + 2 \cdot (89.74) = 1333.33 + 179.49$$
$$= 1512.82$$

und damit eine identische Lösung wie in Aufgabenteil a) !

c) Die Entwicklung der Lebensversicherung lautet



Dabei gilt $EP = 2100 = L_0\, p_x$, wobei L_0 den Marktwert in t = 0 des Rückzahlungsprofils L_1 der Lebensversicherung bezeichne.

Duplikation in t = 1:
(I) $980\,x + (1.05)\,y = 2100$

(II) $525x + (1.05)y = 2100\,(1 + 0.25 \cdot pr) = 2100 + 525 \cdot pr$

(I) – (II) ergibt

$455x = -525 \cdot pr$ bzw. $x = -525 \cdot pr/455 = -15 \cdot pr/13$

und damit

$$(1.05)y = 2100 - \frac{980}{455}(2100 \cdot 0.25 \cdot pr)$$

bzw. $(1.05)y = 2100\,(1 + 0.53846154 \cdot pr)$

bzw. $y = 2100\,(1 + 0.53846154 \cdot pr)(1.05)^{-1} = 2000 + 1076.80 \cdot pr$.

Hieraus folgt in t = 0

$$\begin{aligned}\frac{2100}{p_x} &= L_0 = 700\,x + y \\ &= -2100\,\frac{700 \cdot 0.25}{455}pr + 2100\,(1 + 0.53846154 \cdot pr)(1.05)^{-1}\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{1}{p_x} = -0.3846154 \cdot pr + (1.05)^{-1} + 0.5128205 \cdot pr$$

bzw. $\left[\frac{1}{p_x} - \frac{1}{1.05}\right] = 0.1281896 \cdot pr$

und hieraus schließlich

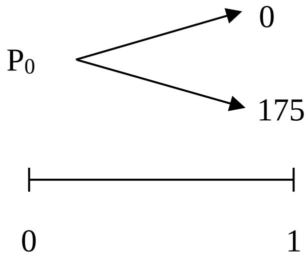
$$\begin{aligned}pr &= 7.8\left[\frac{1}{p_x} - 0.952381\right] \\ &= \frac{7.8}{p_x} - 7.42857\ .\end{aligned}$$

<u>Alternativer Lösungsweg:</u>

Es gilt zunächst

$$\begin{aligned}L_1 &= \max\left\{2100,\ 2100 - 2100 \cdot pr \cdot \frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)}\right\} \\ &= 2100 + 3 \cdot pr \cdot \max\{700 - DAX(1), 0\}\ .\end{aligned}$$

Die eingebettete Option ist – wie in Aufgabenteil b) – ein Put mit der Entwicklung



Duplikation in t = 1

(I) $980x + (1.05)y = 0$
(II) $525x + (1.05)y = 175$

(I) – (II) ergibt

$455x = -175$ und damit $x = -0.3846154$
sowie

$$y = 980\,(0.3846154)/(1.05) = 358.975\,.$$

Wert des Duplikationsportfolios und damit des Put:

$$P_0 = 700x + y = -269.23 + 358.97 = 89.74\,.$$

Dies entspricht der in Aufgabenteil b) bestimmten Lösung.

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} L_0 &= 2100\,(1.05)^{-1} + 3 \cdot pr \cdot 89.74 \\ &= 2100\,(1.05)^{-1} + 269.23 \cdot pr\,. \end{aligned}$$

Aus

$$\frac{2100}{p_x} = L_0 = \frac{2100}{1.05} + 269.23 \cdot pr$$

folgt

$$\begin{aligned} pr &= \frac{2100}{269.23}\left[\frac{1}{p_x} - \frac{1}{1.05}\right] \\ &= 7.8\left[\frac{1}{p_x} - \frac{1}{1.05}\right] \\ &= \frac{7.8}{p_x} - 7.42857\,. \end{aligned}$$