Prüfung Grundprinzipien der Versicherungs- und Finanzmathematik 2013

Aufgabe 1: (20 Minuten)

Gegeben sei ein einperiodiger State Space-Markt bestehend aus einer risikolosen Anlage zum sicheren Zins r und einer "Binomialaktie" mit Wert s in t = 0 sowie Werten us bzw. ds $(0 < d < u)$ in t = 1.

a) Bestimmen Sie die State Space-Matrix sowie den Preisvektor dieses Markts! (1 min)

b) Bestimmen Sie den Wertebereich von r , für den die Arbitragefreiheit des Markts gewährleistet ist! (6 min)

c) Wie lauten in diesem Falle die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten? (1 min)

d) Bewerten Sie den Finanztitel mit dem Rückfluss

$$\begin{pmatrix} c^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch risikoneutrale Bewertung! (2 min)

e) Bewerten Sie den Finanztitel mit dem Rückfluss

$$\begin{pmatrix} 0 \\ c^2 \end{pmatrix}$$

durch Duplikation! (4 min)

f) Betrachten Sie einen Forward auf die Binomialaktie und bestimmen Sie den arbitragefreien Schlussabrechnungspreis F_0 dieses Forward durch Analyse eines geeigneten State Space-Markts! (6 min)

Lösungsskizze:

a) State Space-Matrix

$$V = \begin{pmatrix} 1+r & us \\ 1+r & ds \end{pmatrix}$$

Preisvektor

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$$

b) Zu untersuchen ist das Gleichungssystem $V^T w^* = w$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1+r & 1+r \\ us & ds \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} .$$

Es gilt zunächst

$$|V| = (1+r)\, s\,(d-u) \neq 0,$$

da nach Voraussetzung $u > d$. Das Gleichungssystem ist somit eindeutig lösbar.

Cramersche Regel:

$$w_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+r \\ s & ds \end{vmatrix}}{|V|} = \frac{s[d-(1+r)]}{(1+r)s(d-u)} = \frac{1+r-d}{(1+r)(u-d)}$$

$$w_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 1+r & 1 \\ us & s \end{vmatrix}}{|V|} = \frac{s[(1+r)-u]}{(1+r)s(d-u)} = \frac{u-(1+r)}{(1+r)(u-d)}$$

Für die Arbitragefreiheit des Marktes muss $w_1^* > 0$ sowie $w_2^* > 0$ gewährleistet sein. Da $(1+r)(u-d) > 0$ reduziert sich dies auf die Forderungen $(1+r)-d > 0$ bzw. $u-(1+r) > 0$ und damit insgesamt auf

$$d < 1+r < u$$

c) Es gilt $q_1 = (1+r)\,w_1^*$ und $q_2 = (1+r)\,w_2^*$ und damit

$$q_1 = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad q_2 = \frac{u-(1+r)}{u-d}$$

d) Zu bestimmen ist der diskontierte Erwartungswert des Rückflusses unter Q, d.h.

$$\frac{1}{1+r}\left(c^2 q_1 + 0 \cdot q_2\right)$$

$$= \frac{c^2(1+r-d)}{(1+r)\,(u-d)} = c^2\ w_2^*$$

e) Duplikation in t = 1

$$x_1 \begin{pmatrix} 1+r \\ 1+r \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} su \\ sd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c^2 \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt

$$x_2 = -\frac{c^2}{s(u-d)}$$

und damit

$$x_1 = \frac{c^2 u}{(1+r)(u-d)} \quad .$$

Wert des Duplikationsportfolios:

$$x_1 + s x_2 = \frac{c^2 u}{(1+r)(u-d)} - \frac{s c^2}{s(u-d)}$$

$$= \frac{c^2 [u-(1+r)]}{(1+r)(u-d)} == c^2 \ w_1^*$$

f) Betrachte den State Space-Markt bestehend aus sicherer Anlage, Aktie und Forward. Die State Space-Matrix V ist dann gegeben durch

$$V = \begin{pmatrix} 1+r & us & us-w \\ 1+r & ds & ds-w \end{pmatrix}$$

und der Preisvektor durch $w = (1, s, 0)^T$. Der Markt ist arbitragefrei, wenn das Gleichungssystem

$$V^T x = w$$

eine strikt positive Lösung besitzt.
Konkret lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1+r & 1+r \\ us & ds \\ us-w & ds-w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Einzelgleichungen lauten somit:

(1) $(1+r)(x_1 + x_2) = 1$

(2) $usx_1 + dsx_2 = s$

(3) $usx_1 + dsx_2 = w(x_1 + x_2)$

Aus (3) in Verbindung mit (1) und (2) folgt dann

$$w = \frac{usx_1 + dsx_2}{x_1 + x_2} = (1+r)s \, .$$

Aufgabe 2: (20 Minuten)

Ein dreijähriger Standardbond ist charakterisiert durch die Zahlungsreihe {Z, Z, Z+N} seiner Zins- und Tilgungszahlungen. Dabei bedeute N den Nennwert des Bonds und $Z = Ni$ die Höhe der jeweiligen Zinszahlungen, wobei i den Nominalzins des Bonds bezeichne.

a) Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für den fairen Wert des Bonds unter Benutzung der geometrischen Summe, wenn ein fristigkeitsunabhängiger Marktzins in Höhe von r zu Grunde gelegt wird! (5 min)

b) Weisen Sie auf der Grundlage von a) nach, dass im Falle $r = i$ der faire Wert des Bonds seinem Nennwert entspricht (Pari-Notierung)! (2 min)

c) Bestimmen Sie den fairen Wert des Bonds zum Zeitpunkt s , wobei $0 < s < 1$. (2 min)

d) Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die effektive Rendite (Baldwin-Verzinsung) des Bonds bei Annahme der Wiederanlage der Zinsrückflüsse zum Marktzins r und einem Kaufpreis von P_0! Benutzen Sie dabei die geometrische Summe. (4 min)

e) Bestimmen Sie die Konvexität eines Zerobonds mit Rückzahlungsbetrag N und Laufzeit T. (3 min)

f) Welcher allgemeine Zusammenhang besteht zwischen der t-jährigen Spot Rate zum Zeitpunkt 0 und den einperiodigen Forwardrates (implizite Terminzinssätze)? (2 min)

g) Welcher allgemeine Zusammenhang besteht zwischen der t-jährigen Spot Rate zum Zeitpunkt 0 und dem Preis eines Einheitszerobonds mit Laufzeit t? (2 min)

Lösungsskizze:

a) Definiere den Aufzinsungsfaktor durch $q := 1 + r$
Es gilt dann

$$
\begin{aligned}
P_0(r) &= Zq^{-1} + Zq^{-2} + Zq^{-3} + Nq^{-3} \\
&= Zq^{-3}(q^2 + q + 1) + Nq^{-3} \\
&= \frac{Z}{q^3}\left(\frac{q^3 - 1}{q - 1}\right) + Nq^{-3} \\
&= \frac{Z}{r}\left(1 - \frac{1}{q^3}\right) + Nq^{-3}
\end{aligned}
$$

<u>Alternativ:</u> $\left(v := q^{-1}\right)$

$$P_0(r) = Z\left(v + v^2 + v^3\right) + N v^3$$

$$= Z v \left(1 + v + v^2\right) + N v^3$$

$$= Z v \frac{1 - v^3}{1 - v} + N v^3$$

b) Für Z = N i und r = i folgt aus a)

$$P_0(i) = N\left(1 - \frac{1}{q^3}\right) + N q^{-3} = N$$

c)

$$P_s(r) = (1+r)^s P_0(r) = q^s P_0(r)$$

d) Es muss gelten

$$P_0(1 + r_{eff})^3 = Z q^2 + Z q + Z + N$$

$$= Z(1 + q + q^2) + N$$

$$= Z \frac{q^3 - 1}{q - 1} + N$$

und damit

$$r_{eff} = \sqrt[3]{\left(Z \frac{q^3 - 1}{r} + N\right) / P_0} - 1$$

e) Die Konvexität einer Zahlungsreihe $\{Z_1, \ldots, Z_T\}$ ist allgemein definiert durch

$$C(r) = \frac{P''(r)}{P(r)} = \frac{\sum_{t=1}^{T} t(t+1) Z_t (1+r)^{-t}}{(1+r)^2 \sum_{t=1}^{T} Z_t (1+r)^{-t}} \; .$$

Im Falle des betrachteten Zerobonds gilt $Z_1 = \ldots Z_{T-1} = 0$ und $Z_T = N$. Damit reduziert sich der Ausdruck für die Konvexität auf

$$C(r) = \frac{T(T+1) N (1+r)^{-T}}{(1+r)^2 N (1+r)^{-T}} \, .$$

Die Konvexität des Zerobonds ist somit gegeben durch

$$C(r) = T(T+1)(1+r)^{-2}.$$

f) Es gilt

$$[1+r(0,t)]^t = [1+f_1(0)] \cdot \ldots [1+f_t(0)],$$

wobei $r(0,t)$ die betreffende Spot Rate und $f_j(0)$, j = 1, …, t, die betreffenden Forward Rates bezeichnen.

<u>Alternativ:</u>

$$1+f_t(0) = \frac{[1+r_0(t)]^t}{[1+r_0(t-1)]^{t-1}}$$

g) Es gilt

$$b(0,t) = [1+r(0,t)]^{-t},$$

bzw.

$$r(0,t) = [1/b(0,t)]^{1/t} - 1,$$

wobei $r(0,t)$ die betreffende Spot Rate und $b(0,t)$ den Preis des betreffenden Einheitszerobonds bezeichnen.

<u>**Aufgabe 3:**</u> (20 Minuten)

Gehen Sie aus von der gestutzten Lebensdauer CT = CT_x einer x-jährigen Person. Arbeiten Sie dabei der Einfachheit halber mit einem unendlichen Wertebereich für CT.

a) Bestimmen Sie den Leistungsbarwert $LBW_{LT}(v)$ einer lebenslänglichen Todesfallversicherung mit einer Versicherungssumme der Höhe 1 in Termen von CT und in Abhängigkeit vom Diskontierungsfaktor v !

b) Bestimmen Sie auf dieser Basis den erwarteten Leistungsbarwert $A_x(v)$ der lebenslänglichen Todesfallversicherung unter Benutzung von aufgeschobenen Sterbewahrscheinlichkeiten und bestimmen Sie die Varianz des Leistungsbarwertes in Termen von $A_x(v)$.

c) Betrachten Sie nun eine lebenslängliche Todesfallversicherung mit einer (geometrisch) steigenden Versicherungssumme. Dabei weise die (potentielle) Zahlung zum Zeitpunkt x + t die Höhe $(1+c)^{t-1}$ $(0 < c < 1)$ auf. Bestimmen Sie den Leistungsbarwert LBW_{ILT} dieser Versicherung. Welche Beziehung besteht zu $LBW_{LT}(v)$?

d) Bestimmen Sie den erwarteten Leistungsbarwert und die Varianz des Leistungsbarwerts der lebenslänglichen Todesfallversicherung aus Aufgabenteil c), jeweils in Termen von $A_x(v)$.

e) Betrachten Sie nun eine Risikolebensversicherung mit einer Vertragslaufzeit der Länge n und einer (arithmetisch) fallenden Versicherungssumme. Die im Zeitpunkt x + 1 (potentiell) zu zahlende Leistung beträgt 1. Diese Leistung vermindert sich pro Folgeperiode um den Betrag $1/n$. Bestimmen Sie den Leistungsbarwert LBW_{DRL} und den erwarteten Leistungsbarwert dieser Versicherung!

Lösungsskizze:

a) Die Leistung der lebenslänglichen Todesfallversicherung erfolgt im Todeszeitpunkt, d.h. in CT+1. Der korrespondierende Leistungsbarwert ist daher gegeben durch

$$LBW_{LT}(v) = v^{CT+1}.$$

b)
$$A_x(v) = E\left[LBW_{LT}(v)\right] = E(v^{CT+1}) = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} P(CT = t)$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_{t|}q_x$$

$$\begin{aligned} Var(LBW_{LT}) &= E\left[(v^{CT+1})^2\right] - E(v^{CT+1})^2 \\ &= E\left[(v^2)^{CT+1}\right] - A_x(v)^2 \\ &= A_x(v^2) - A_x(v)^2 \end{aligned}$$

c) Der Barwert der Zahlung im Zeitpunkt x + t lautet $h^{t-1}\ v^t$, wobei h := 1+c. Hieraus folgt

$$LBW_{ILT} = h^{CT} \cdot v^{CT+1}$$

Damit gilt

$$LBW_{ILT} = \frac{1}{h} h^{CT+1}\ v^{CT+1} = \frac{1}{h}(h\,v)^{CT+1}$$

$$= \frac{1}{h} LBW_{LT}(h\,v)$$

d) Es gilt

$$E(LBW_{ILT}) = \frac{1}{h} E\left[LBW_{LT}(hv)\right] = \frac{1}{h} A_x(hv)$$

sowie

$$Var(LBW_{ILT}) = \frac{1}{h^2} Var\left[LBW_{LT}(hv)\right]$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[A_x(h^2 v^2) - A_x(hv)^2\right]$$

e) Zum Zeitpunkt $x + t \ (t \le n)$ erfolgt eine Zahlung der Höhe

$$1 - \frac{t-1}{n} = \frac{n-t+1}{n}.$$

Der Barwert dieser Zahlung beträgt

$$\left(1 - \frac{t-1}{n}\right) v^t.$$

Damit gilt

$$LBW_{DRL} = \begin{cases} \left(1 - \frac{CT}{n}\right) v^{CT+1} & CT = 0,\ldots,n-1 \\ 0 & CT \ge n \end{cases}$$

$$= \left(1 - \frac{CT}{n}\right) v^{CT+1}\, I_{\{CT<n\}}$$

Hieraus folgt

$$E\left(LBW_{DRL}\right) = \sum_{t=0}^{n-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right) v^{t+1}\ {}_{t|}q_x\ .$$

$$= E(LBW_{RL}) - \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} t\, v^{t+1}\ {}_{t|}q_x$$

Aufgabe 4: (30 Minuten)

Ein 50-jähriger Versicherungsnehmer schließe eine DAX-gebundene Lebensversicherung auf den Erlebensfall mit einer Laufzeit von einem Jahr ab. Eine Todesfallleistung wird nicht fällig bzw. wird in der Analyse ausgeblendet, ebenso bleiben Betriebskosten außen vor.

a) Die Versicherungsleistung bei Erleben betrage mindestens 5% bezogen auf einen Betrag von EUR 18 900. Im Falle einer positiven DAX-Entwicklung betrage die Rückzahlung EUR 18 900 zuzüglich einer Partizipation in Höhe von 60% der einjährigen DAX-Rendite bezogen auf einen investierten Betrag von EUR 18 900. Bestimmen Sie das Rückzahlungsprofil des Produkts zum Zeitpunkt t = 1! (2 min)

b) Gegeben sei nun ein einperiodiges Binomialmodell für die DAX-Entwicklung. Der Startwert des DAX betrage DAX(0) = 6 300. Am Ende der Periode ist der DAX entweder um 40% gestiegen oder um 25% gefallen. Der risikolose Zins betrage 5%. Bestimmen Sie die Einmalprämie der DAX-gebundenen Lebensversicherung gemäß Teilaufgabe a) durch **direkte Duplikation des Rückzahlungsprofils**! (6 min)

c) Bestimmen Sie alternativ die Einmalprämie der Versicherung nach Aufgabenteil a) unter Zugrundelegung des Binomialmodels nach Aufgabenteil b) auf der Basis einer **risikoneutralen Bewertung** des Rückzahlungsprofils! (10 min)

d) Zerlegen Sie nun das Rückzahlungsprofil gemäß Aufgabenteil a) unter Zugrundelegung des Binomialmodells gemäß Aufgabenteil b) so, dass die eingebettete Kaufoption expliziert wird. Welche Modalitäten weist diese Kaufoption auf? Welchen fairen Wert besitzt die Kaufoption? (12 min)

<u>Lösungsskizze:</u>

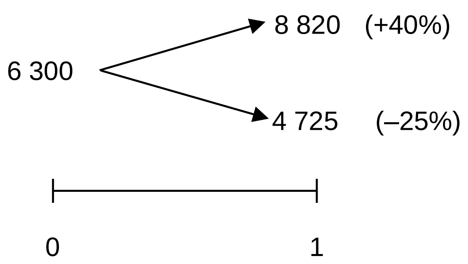
a)
$$L_1 = \max\{18900\,(1.05),\, 18900 + 18900\,(0.6)\,R_{DAX}\}$$
$$= \max\{18945,\, 18900\,[1 + 0.6\,R_{DAX}]\}$$

wobei

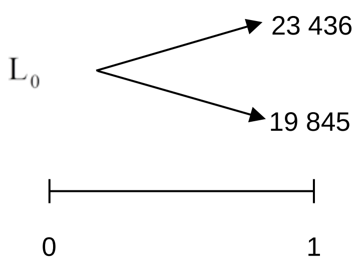
$$R_{DAX} = \frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)} \; .$$

<u>Anmerkung:</u> Alternativ wurde auch 18 900 (0.05) = 945 anstelle von 18 945 (1.05) als korrekt anerkannt.

b) DAX-Entwicklung:



Wenn der DAX fällt, so beträgt die Rückzahlung 19 845. Wenn der DAX steigt, beträgt die Rückzahlung 18 900 + 18 900 (0.6) (0.4) = 23 436.



Duplikation in t = 1:

(I) $8\,820\ x + 1.05\ y = 23\,436$
(II) $4\,725\ x + 1.05\ y = 19\,845$.

Aus (I) – (II) folgt $4\,095\ x = 3\,591$ und damit $x = 0.87692$.

Aus (I) folgt dann

$$y = [23\,436 - 8\,820\,(0.87692)]\,(1.05)^{-1} = 14\,953.87\ .$$

Wert des Duplikationsportfolios in t = 0:

$$\begin{aligned} 6\,300\ x + y &= 6\,300\,(0.87692) + 14\,953.87 \\ &= 5\,524.60 + 14\,953.87 = 20\,478.47\ . \end{aligned}$$

Die Einmalprämie beträgt damit

$$EP = 20\,478.47 \cdot p_{50}\ .$$

c) Um eine risikoneutrale Bewertung durchzuführen, sind die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Dies erfordert zunächst die Berechnung des preiserzeugenden Vektors.

State Space-Matrix und Preisvektor

$$V = \begin{pmatrix} 1.05 & 8\,820 \\ 1.05 & 4\,725 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 6\,300 \end{pmatrix}\ .$$

Das Gleichungssystem zur Bestimmung des preiserzeugenden Vektors $(w_1^*, w_2^*)^T$ ist dann gegeben durch $V^T w^* = w$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1.05 & 1.05 \\ 8\,820 & 4\,725 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6\,300 \end{pmatrix}\ .$$

Für die Determinante gilt: $\det(V^T) = -\,4\,299.75$.

Lösung nach Cramerscher Regel:

$$w_1^* = \frac{4\,725 - 6\,300(1.05)}{-\,4\,299.75} = \frac{1\,890}{4\,299.75} = \frac{40}{91} = 0.43956$$

$$w_2^* = \frac{6\,300(1.05) - 8\,820}{-\,4\,299.75} = \frac{2\,205}{4\,299.75} = \frac{20}{39} = 0.51282\ .$$

Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten aus

$$q_1 = (1.05)w_1^* = \frac{6}{13} = 0.461538$$

$$q_2 = (1.05)w_2^* = \frac{7}{13} = 0.538462 \ .$$

Es gilt $q_i > 0$ und $q_1 + q_2 = 1$.

<u>Alternativ:</u> q_1 und q_2 aus Aufg. 1c

$$q_1 = \frac{1.05 - 0.75}{0.65} = \frac{0.3}{0.65} = \frac{30}{65} = \frac{6}{13}$$

$$q_2 = \frac{0.35}{0.65} = \frac{35}{65} = \frac{7}{13} \ .$$

Risikoneutrale Bewertung des Rückzahlungsprofils ergibt

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{1.05}(23\,436 \cdot q_1 + 19\,845 \cdot q_2) \\ &= \frac{21\,502.38}{1.05} \\ &= 20\,478.46 \ . \end{aligned}$$

Die korrespondierende Einmalprämie beträgt

$$EP = 20\,478.46 \cdot p_{50}$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned} L_1 &= \max\left\{19\,845,\, 18\,900 + \frac{18\,900\,(0.6)}{DAX(0)}\left[DAX\,(1) - DAX\,(0)\right]\right\} \\ &= 19\,845 + \max\left\{-\,945 + 1.8\ \left[DAX(1) - DAX(0)\right],\, 0\right\} \\ &= 19\,845 + 1.8\,\max\left\{DAX(1) - DAX(0) - \frac{945}{1.8},\, 0\right\} \\ &= 19\,845 + 1.8\,\max\left\{DAX(1) - 6\,300 - 525,\, 0\right\} \\ &= 19\,845 + 1.8\,\max\left\{DAX(1) - 6\,825,\, 0\right\} \end{aligned}$$

Eingebettet ist ein einjähriger DAX-Call mit einem Ausübungspreis von EUR 6 825.

Faire Bewertung:

i) Es muss gemäß b) bzw. c) gelten

$20\,478.46 = 19\,845\,(1.05)^{-1} + 1.8\, C_{DAX}\,(6\,825)$.

Hieraus folgt

$$C_{DAX}(6\,825) = \frac{20\,478.46 - 18\,900}{1.8} = 876.92$$

ii) Alternativ über risikoneutrale Bewertung:

Das Rückzahlungsprofil des DAX-Call ist $\begin{pmatrix} 1\,995 \\ 0 \end{pmatrix}$

Somit gilt

$$C_{DAX}(6\,825) = \frac{1\,995 \cdot q_1}{1.05} = \frac{920.768}{1.05} = 876.92$$

iii) Alternativ über Duplikation.