Prüfung Grundprinzipien der Versicherungs- und Finanzmathematik 2012

Aufgabe 1: (20 Minuten)

Gegeben sei ein einperiodiger vollständiger State Space-Markt mit s Zuständen und n+1 Finanztiteln. Der Finanztitel 0 entspreche dabei der risikolosen Anlage zum sicheren Zins r. Der preiserzeugende Vektor $w^* = (w_1^*, \ldots, w_s^*)^T$ des State Space-Markts existiere und sei strikt positiv.

a) In welcher Beziehung stehen der Vektor $q = (q_1, \ldots, q_s)^T$ der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten und w* zueinander?

b) Weisen Sie nach, dass gilt $\sum_{i=1}^{s} q_i = 1$, d.h. q ist ein Wahrscheinlichkeitsvektor.

   Hinweis: Benutzen Sie die Beziehung $V^T w^* = w$, wobei w dem Preisvektor der Finanztitel des Marktes entspricht und V die State Space-Matrix ist.

c) Bestimmen Sie den Preis des Finanztitels, dessen Rückflussvektor $C = (c_1, \ldots, c_s)^T$ in t=1 dem ersten Einheitsvektor entspricht ($c_1 = 1$, $c_j = 0$ für $j \neq 1$) durch *risikoneutrale Bewertung*! Interpretieren Sie das Ergebnis!

d) Bestimmen Sie den Preis des i-ten Einheitsvektors ($c_i = 1$, $c_j = 0$ für $j \neq i$) durch *Duplikation*!

e) Gegeben sei nun ein arbitragefreier Markt bestehend aus einer risikolosen Anlage zum sicheren Zins r sowie einer "Binomialaktie" mit Wert s in t = 0 sowie Werten us bzw. ds ($0 < d < u$) in t = 1. Betrachten Sie einen Forward auf die Binomialaktie und bestimmen Sie den arbitragefreien Schlussabrechnungspreis F_0 dieses Forward durch Analyse eines geeigneten State Space-Markts!

Lösungsskizze:

a) $q = (1+r)\,w^*$, d.h. $q_i = (1+r)\,w_i^*$.

b) Die erste Zeile von V^T ist gegeben durch den Vektor $(1 + r)(1, \ldots, 1)$ und die erste Zeile von w ist gegeben durch den Skalar 1. Die erste Zeile des Gleichungssystems $V^T w^* = w$ lautet somit $(1+r)\sum_{i=1}^{n} w_i^* = 1$ und damit gilt $\Sigma q_i = 1$.

c)
$$w_C = \frac{1}{1+r} E_Q[C] = \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^{s} c_j\, q_j$$
$$= \frac{1}{1+r} c_1 q_1 = \frac{1}{1+r}(1+r)\,w_1^* = w_1^* \; .$$

Der arbitragefreie Preis des ersten Einheitsvektors entspricht dem ersten Wert des preiserzeugenden Vektors.

d) Da der State Space-Markt vollständig ist, d.h. die Matrix V den Rang s hat, lässt sich jeder (s,1)-Vektor als Linearkombination darstellen, d.h. es gibt einen Portfoliovektor x mit $Vx = e_i$, wobei $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)^T$ dem i-ten Einheitsvektor entspricht. Der Preis dieses Portfolios ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\Sigma x_i w_i &= w^T x = (V^T w^*)^T x = w^{*T} Vx \\ &= w^{*T} e_i = w_i^* \quad .\end{aligned}$$

e) Betrachte den State Space-Markt bestehend aus sicherer Anlage, Aktie und Forward. Die State Space-Matrix V ist dann gegeben durch

$$V = \begin{pmatrix} 1+r & us & us-w \\ 1+r & ds & ds-w \end{pmatrix}$$

und der Preisvektor durch $w = (1, s, 0)^T$. Der Markt ist arbitragefrei, wenn das Gleichungssystem

$$V^T x = w$$

eine strikt positive Lösung besitzt.

Konkret lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1+r & 1+r \\ us & ds \\ us-w & ds-w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Einzelgleichungen lauten somit:

(1) $(1+r)(x_1 + x_2) = 1$

(2) $usx_1 + dsx_2 = s$

(3) $usx_1 + dsx_2 = w(x_1 + x_2)$

Aus (3) in Verbindung mit (1) und (2) folgt dann

$$w = \frac{usx_1 + dsx_2}{x_1 + x_2} = (1+r)s\,.$$

Aufgabe 2: (20 Minuten)

a) Gegeben seien zwei Standardbonds A und B mit korrespondierenden Kursen P_A und P_B in $t = 0$, Nennwerten N_A und N_B, Nominalzinsen i_A und i_B sowie Restlaufzeiten $T_A = 2$ und $T_B = 3$. Gehen Sie ferner davon aus, dass die einjährige Spot Rate r_1 bereits bekannt ist.

Wie lauten die Zahlungsströme der Bonds A und B?

Bestimmen Sie die zugehörige Diskontstruktur (Kurse der Einheitszerobonds) $\{b_1, b_2, b_3\}$ sowie die (restliche) Zinsstruktur (Spot Rates) $\{r_2, r_3\}$!

b) Weisen Sie die folgende Eigenschaft der (Macaulay-)Duration nach

$$D_\tau(r) = D(r) - \tau \, ,$$

d.h. die Duration verkürzt sich um den Betrag der verstrichenen Laufzeit.

Hinweis: $P_\tau(r) = (1+r)^\tau \, P_0(r)$.

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion $K_s(r) = (1+r)^s \, P_0(r)$ im Zeitpunkt $s = D(r)$ einen Extremwert aufweist. Dabei bezeichne $P_0(r)$ den Barwert eines Festzinstitels.

d) Bestimmen Sie die modifizierte Duration eines Zerobonds mit Nennwert N und T Jahren Laufzeit!

Lösungsskizze:

a) Der Zahlungsstrom von Bond A lautet $\{-P_A, N_A \cdot i_A, N_A \cdot i_A + N_A\}$, der Zahlungsstrom von Bond B lautet $\{-P_B, N_B \cdot i_B, N_B \cdot i_B, N_B \cdot i_B + N_B\}$.
Der Kurs b_1 eines Einheitszerobonds mit einer Laufzeit von einem Jahr bei bekannter Spot Rate ist gegeben durch

(I) $\quad b_1 = (1 + r_1)^{-1}$.

Ferner gilt

(II) $\quad P_A = N_A \cdot i_A \cdot b_1 + (N_A \cdot i_A + N_A) \cdot b_2$

(III) $\quad P_B = N_B \cdot i_B \cdot b_1 + N_B \cdot i_B \cdot b_2 + (N_B \cdot i_B + N_B) b_3$.

Da b_1 gemäß (I) bekannt ist, folgt aus (II)

$$b_2 = \frac{P_A - N_A \cdot i_A \cdot b_1}{N_A \cdot i_A + N} = \frac{P_A - N_A \cdot i_A \cdot b_1}{N_A (1 + i_A)}$$

und damit aus (III)

$$b_3 = \frac{P_B - N_B \cdot i_B (b_1 + b_2)}{N_B \cdot i_B + N_B} = \frac{P_B - N_B \cdot i_B (b_1 + b_2)}{N_B (1 + i_B)} \, .$$

Hieraus folgt schließlich für die restlichen Spot Rates

$$r_2 = \sqrt{\frac{1}{b_2}} - 1$$

sowie

$$r_3 = \sqrt{\frac{1}{b_3}} - 1 \ .$$

b) Zunächst gilt (Produktregel)

$$P'_\tau(r) = \tau(1+r)^{\tau-1} P_0(r) + (1+r)^\tau P'_0(r)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} D_\tau(r) &= -\frac{(1+r)P'_\tau(r)}{P_\tau(r)} \\ &= \frac{-\tau(1+r)^\tau P_0(r) - (1+r)^{\tau+1} P'_0(r)}{(1+r)^\tau P_0(r)} \\ &= -\tau - (1+r)\frac{P'_0(r)}{P_0(r)} \\ &= D(r) - \tau \ . \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} K'_s(r) &= s(1+r)^{s-1} P(r) + (1+r)^s P'(r) \\ &= H(r)\left[s + (1+r)\frac{P'(r)}{P(r)} \right] \\ &= H(r)[s - D(r)] \end{aligned}$$

Da $H(r) > 0$ gilt $K'_s(r) = 0$ genau dann, wenn $s = D(r)$.

d) Für die modifizierte Duration gilt

$$D_M(r) = -P'(r)/P(r) \ .$$

Für einen Zerobond mit Nennwert N und T Jahren Laufzeit gilt

$$P(r) = N(1+r)^{-T}$$

und damit

$$P'(r) = -T\,N(1+r)^{-T-1} \;.$$

Insgesamt gilt

$$D_M(r) = -\frac{-T\,N(1+r)^{-T-1}}{N(1+r)^{-T}} = \frac{T}{1+r} \;.$$

Aufgabe 3: (20 Minuten)

Gehen Sie aus von der gestutzten Lebensdauer $CT = CT_x$ einer x-jährigen Person. Gehen Sie dabei (auch im Weiteren) aus von einem unendlichen Wertebereich von CT.

a) Bestimmen Sie den Leistungsbarwert einer lebenslänglichen Todesfallversicherung mit einer Versicherungssumme der Höhe 1 in Termen von CT !

b) Bestimmen Sie auf dieser Basis den erwarteten Leistungsbarwert $A_x(v)$ der lebenslänglichen Todesfallversicherung unter Benutzung von aufgeschobenen Sterbewahrscheinlichkeiten und bestimmen Sie die Varianz des Leistungsbarwertes in Termen von $A_x(v)$.

c) Weisen Sie nach, dass für $t = w - x + 1$ gilt: ${}_{t|}q_x = 0$, wobei w das kalkulatorische Höchstalter bezeichne.

d) Bestimmen Sie den Leistungsbarwert einer um m Jahre aufgeschobenen lebenslänglichen Todesfallversicherung (d.h., bei Tod im Aufschubzeitraum erfolgt keine Leistung) mit einer Versicherungssumme der Höhe 1 in Termen von CT!

e) Bestimmen Sie den erwarteten Leistungsbarwert ${}_{m|}A_x(v)$ der aufgeschobenen lebenslänglichen Todesfallversicherung und bestimmen Sie die Varianz des Leistungsbarwertes in Termen von ${}_{m|}A_x(v)$!

f) Stellen Sie nun den erwarteten Leistungsbarwert der aufgeschobenen lebenslänglichen Todesfallversicherung gemäß e) durch Umformung in Termen des erwarteten Leistungsbarwertes der lebenslänglichen Todesfallversicherung gemäß b) dar !

Lösungsskizze:

a) Die Leistung der lebenslänglichen Todesfallversicherung erfolgt im Todeszeitpunkt, d.h. in CT+1. Der korrespondierende Leistungsbarwert ist daher gegeben durch

$$LBW_{LT} = v^{CT+1} \,.$$

b) $$A_x = E(LBW_{LT}) = E(v^{CT+1}) = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\,P(CT = t)$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\,{}_{t|}q_x$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(LBW_{LT}) &= E\left[(v^{CT+1})^2\right] - E(v^{CT+1})^2 \\ &= E\left[(v^2)^{CT+1}\right] - A_x(v)^2 \\ &= A_x(v^2) - A_x(v)^2\end{aligned}$$

c) Es gilt

$${}_{w-x+1|}q_x = {}_{w-x+1}p_x \; q_{w+1} \,.$$

Weiter gilt

$${}_{w-x+1}p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_w \text{ bzw. } {}_{w-x+1}p_x = {}_{w-x}p_x \cdot p_w \;.$$

Da w der (kalkulatorisch) letztmögliche Lebenszeitpunkt ist, gilt aber $p_w = 0$.

Hieraus folgt das gewünschte Ergebnis.

d) Es gilt

$$LBW_{ALT} = \begin{cases} 0 & CT = 0, 1, \ldots, m-1 \\ v^{CT+1} & CT = m, m+1, \ldots \end{cases}$$

e) $${}_{m|}A_x(v) = E(LBW_{ALT}) = \sum_{t=m}^{\infty} v^{t+1} \; P(CT = t) = \sum_{t=m}^{\infty} v^{t+1} \; {}_{t|}q_x$$

$$\operatorname{Var}(LBW_{ALT}) = E(LBW_{ALT}^2) - E(LBW_{ALT})^2 \,.$$

Nun gilt

$$LBW_{ALT}^2 = \begin{cases} 0 & CT = 0, 1, \ldots, m-1 \\ (v^{CT+1})^2 & CT = m, m+1, \ldots \end{cases}$$

Aufgrund von $(v^{CT+1})^2 = (v^2)^{CT+1}$ gilt daher

$E(LBW_{ALT}^2) = {}_{m|}A_x(v^2)$ und damit insgesamt

$$\operatorname{Var}(LBW_{ALT}) = {}_{m|}A_x(v^2) - {}_{m|}A_x(v)^2 \,.$$

f) Es gilt

$${}_{m|}A_x = \sum_{t=m}^{\infty} v^{t+1} \; {}_{t|}q_x = v^m \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \; {}_{m+t|}q_x \;.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}{}_{m+t|}q_x &= {}_{m+t}p_x \; q_{x+m+t} = {}_{m}p_x \;\; {}_{t}p_{x+m} \;\; q_{x+m+t} \\ &= {}_{m}p_x \;\; {}_{t|}q_{x+m} \;.\end{aligned}$$

Damit folgt insgesamt

$$
\begin{aligned}
{}_{m|}A_x &= v^m \, {}_m p_x \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \, {}_{t|}q_{x+m} \\
&= v^m \, {}_m p_x \, A_{x+m} \, .
\end{aligned}
$$

<u>Aufgabe 4:</u> (30 Minuten)

Gegeben sei ein einperiodiges Binomialmodell für die DAX-Entwicklung. Der Startwert des DAX betrage DAX(0) = 7 000. Am Ende der Periode ist der DAX entweder um 40% gestiegen oder um 25% gefallen. Der risikolose Zins betrage 5%.

Ein 50-jähriger Versicherungsnehmer schließe nun eine Lebensversicherung auf den Erlebensfall mit einem Jahr Laufzeit ab. Eine Todesfallleistung wird nicht fällig bzw. wird in der Analyse ausgeblendet, ebenso bleiben Betriebskosten außen vor.

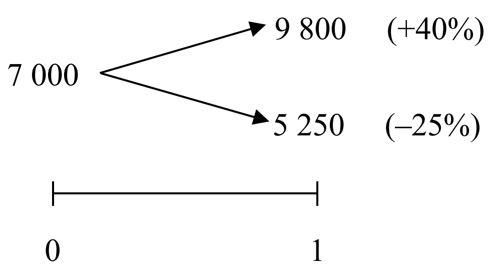
a) Die Versicherungsleistung bei Erleben betrage mindestens EUR 14 000 oder bei *negativer* DAX-Entwicklung EUR 14 000 vermehrt um den Betrag der negativen DAX-Rendite. Bestimmen Sie die Einmalprämie dieser Versicherung durch *risikoneutrale Bewertung* des Rückzahlungsprofils (eine Explizierung der eingebetteten Option ist in diesem Fall nicht erforderlich!)

b) Bestimmen Sie alternativ die Einmalprämie der Versicherung unter a), indem Sie insbesondere die eingebettete Option isolieren und einer *risikoneutralen Bewertung* unterziehen. Welche Option ist in der Versicherung eingebettet?

c) Die einjährige Erlebensfallversicherung werde nun gegen eine Einmalprämie von EUR 21 000 erworben. Die Rückzahlung betrage mindestens EUR 21 000 oder aber – im Falle einer *negativen* DAX-Entwicklung – EUR 21 000 vermehrt um die Partizipation an dem Betrag der negativen DAX-Rendite mit einer Partizipationsrate $0 < pr < 1$. Bestimmen Sie in diesem Falle die faire Partizipationsrate über die *direkte Duplikation des Rückzahlungsprofils* der Erlebensfallversicherung!

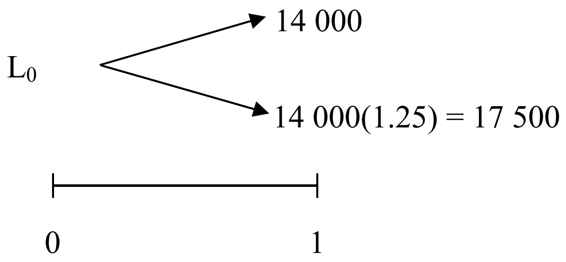
<u>Lösungsskizze:</u>

a) DAX-Entwicklung:



$$
L_1 = \max\left\{14\,000, 14\,000 - 14\,000 \frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)}\right\}.
$$

Korrespondierendes Rückzahlungsprofil im Erlebensfall



Um eine risikoneutrale Bewertung durchzuführen, sind die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Dies erfordert zunächst die Berechnung des preiserzeugenden Vektors.

State Space-Matrix und Preisvektor

$$V = \begin{pmatrix} 1.05 & 9\,800 \\ 1.05 & 5\,250 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 7\,000 \end{pmatrix} .$$

Das Gleichungssystem zur Bestimmung des preiserzeugenden Vektors $(w_1^*, w_2^*)^T$ ist dann gegeben durch $V^T w^* = w$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1.05 & 1.05 \\ 9\,800 & 5\,250 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7\,000 \end{pmatrix} .$$

Für die Determinante gilt: $\det(V^T) = -\,4\,777.50$.

Lösung nach Cramerscher Regel:

$$w_1^* = \frac{5\,250 - 7\,000(1.05)}{-4\,777.50} = \frac{2\,100}{4\,777.50} = \frac{40}{91} = 0.439560$$

$$w_2^* = \frac{7\,000(1.05) - 9\,800}{-4\,777.50} = \frac{2\,450}{4\,777.50} = \frac{20}{39} = 0.512821 .$$

Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten aus

$$q_1 = (1.05) w_1^* = \frac{6}{13} = 0.461538$$

$$q_2 = (1.05) w_2^* = \frac{7}{13} = 0.538462 .$$

Es gilt $q_i > 0$ und $q_1 + q_2 = 1$.

Risikoneutrale Bewertung des Rückzahlungsprofils ergibt

$$
\begin{aligned}
L_0 &= \frac{1}{1.05}(14\,000 \cdot q_1 + 17\,500 \cdot q_2) \\
&= \frac{1}{1.05}(6\,461.532 + 9\,423.085) = \frac{15\,884.617}{1.05} \\
&= 15\,128.21.
\end{aligned}
$$

Die korrespondierende Einmalprämie beträgt

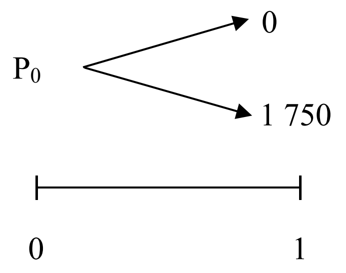
$$EP = 15\,128.21 \cdot p_{50}$$

b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \max\left\{14\,000, 14\,000 - 14\,000\frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)}\right\} \\
&= 14\,000 + \frac{14\,000}{7\,000}\max\{DAX(0) - DAX(1), 0\} \\
&= 14\,000 + 2\max\{DAX(0) - DAX(1), 0\}
\end{aligned}
$$

Eingebettet in die Versicherung ist eine einjährige Europäische Putoption auf den DAX mit einem Ausübungspreis von X = DAX(0) = 7 000.

Entwicklung der Putoption:



Risikoneutrale Bewertung ergibt:

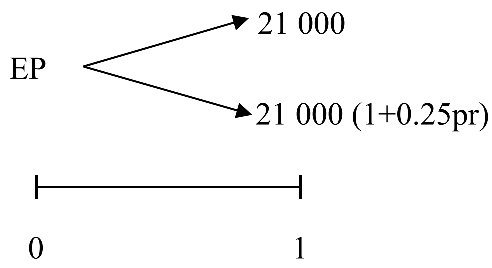
$$P_0 = \frac{1}{1.05}(0 \cdot q_1 + 1\,750 \cdot q_2) = \frac{942.31}{1.05} = 897.44 \; .$$

Hieraus erhalten wir insgesamt

$$
\begin{aligned}
L_0 &= 14\,000(1.05)^{-1} + 2 \cdot (897.44) = 13\,333.33 + 1\,794.88 \\
&= 15\,128.21
\end{aligned}
$$

und damit eine identische Lösung wie in Aufgabenteil a) !

c) Die Entwicklung der Lebensversicherung lautet



Dabei gilt $EP = 21\,000 = L_0\, p_x$, wobei L_0 den Marktwert in t = 0 des Rückzahlungsprofils L_1 der Lebensversicherung bezeichne.

Duplikation in t = 1:

(I) $\quad 9\,800\ x + (1.05)\ y = 21\,000$

(II) $\quad 5\,250\ x + (1.05)\, y = 21\,000(1 + 0.25 \cdot pr)$

(I) – (II) ergibt

$4\,550x = -21\,000 \cdot 0.25 \cdot pr$ bzw. $x = -(21\,000 \cdot 0.25 \cdot pr) / 4\,550$

und damit

$(1.05)y = 21\,000 - \frac{9\,800}{4\,550}(21\,000 \cdot 0.25 \cdot pr)$ bzw. $(1.05)y = 21\,000(1 + 0.53846154 \cdot pr)$

bzw. $y = 21\,000(1 + 0.53846154 \cdot pr)(1.05)^{-1}$.

Hieraus folgt in t = 0

$$\frac{21\,000}{p_x} = L_0 = 7\,000\,x + y$$

$$= -21\,000\ \frac{7\,000 \cdot 0.25}{4\,550} pr + 21\,000(1 + 0.53846154 \cdot pr)(1.05)^{-1}$$

und damit

$$\frac{1}{p_x} = -0.3846154 \cdot pr + (1.05)^{-1} + 0.5128205 \cdot pr$$

bzw. $\left[\frac{1}{p_x} - \frac{1}{1.05}\right] = 0.1281896 \cdot pr$

und hieraus schließlich

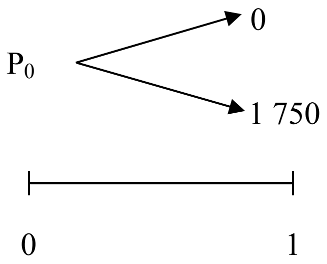
$$pr = 7.8\left[\frac{1}{p_x} - 0.952381\right]$$
$$= \frac{7.8}{p_x} - 7.42857\ .$$

Alternativer Lösungsweg:

Es gilt zunächst

$$L_1 = \max\left\{21\,000,\ 21\,000 - 21\,000 \cdot pr \cdot \frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)}\right\}$$
$$= 21\,000 + 3 \cdot pr \cdot \max\{7\,000 - DAX(1), 0\}\ .$$

Die eingebettete Option ist – wie in Aufgabenteil b) – ein Put mit der Entwicklung



Duplikation in t = 1

(I) $\quad 9\,800\ x + (1.05)\,y = 0$
(II) $\quad 5\,250\ x + (1.05)\,y = 1\,750$

(I) – (II) ergibt

$4\,550x = -1\,750$ und damit $x = -0.3846154$

sowie

$$y = 9\,800(0.3846154)/(1.05) = 3\,589.75\,.$$

Wert des Duplikationsportfolios und damit des Put:

$$P_0 = 7\,000x + y = -2\,692.31 + 3\,589.75 = 897.44\,.$$

Dies entspricht der in Aufgabenteil b) bestimmten Lösung.

Hieraus folgt

$$
\begin{aligned}
L_0 &= 21\,000\,(1.05)^{-1} + 3 \cdot \mathrm{pr} \cdot 897.44 \\
&= 21\,000(1.05)^{-1} + 2\,692.32 \cdot \mathrm{pr}\ .
\end{aligned}
$$

Aus

$$
\frac{21\,000}{p_x} = L_0 = \frac{21\,000}{1.05} + 2\,692.31 \cdot \mathrm{pr}
$$

folgt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{pr} &= \frac{21\,000}{2\,692.32}\left[\frac{1}{p_x} - \frac{1}{1.05}\right] \\
&= 7.8\left[\frac{1}{p_x} - \frac{1}{1.05}\right] \\
&= \frac{7.8}{p_x} - 7.42857\ .
\end{aligned}
$$