**Prüfung Grundprinzipien der Versicherungs- und Finanzmathematik 2011**

**Aufgabe 1:** (20 Minuten)

Unterstellen Sie für den Basistitel einer Terminposition einen einperiodigen Binomialprozess mit Startwert $s_0 = 100$ und einer prozentualen Aufwärtsbewegung von 20% bzw. einer prozentualen Abwärtsbewegung von 10%. Der einperiodige Zinssatz für eine sichere Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme betrage 5%.

a) Weisen Sie nach, dass der Modellmarkt arbitragefrei ist!

b) Wie lautet die risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsbelegung?

c) Bestimmen Sie auf dieser Grundlage den arbitragefreien Preis einer einperiodigen Putoption auf die Aktie, die einen Ausübungspreis von X = 100 besitzt.

d) Bestimmen Sie alternativ den Wert der Putoption auf der Grundlage des Duplikationsprinzips.

e) Bestimmen Sie den Wert eines einperiodigen Forwards auf den Basistitel auf der Grundlage des Duplikationsprinzips.

f) Bestimmen Sie alternativ den Wert des Forwards auf der Grundlage eines geeigneten arbitragefreien Modellmarkts.

**Lösungsskizze:**

a) Zu betrachten ist das Gleichungssystem

$$V^T x = w,$$

wobei in diesem Falle

$$V = \begin{pmatrix} 1.05 & 120 \\ 1.05 & 90 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det(V^T) = \det(V) = 94.5 - 126 = -31.5 \neq 0$.

Das Gleichungssystem ist damit (eindeutig) lösbar.

Es bezeichne des Weiteren $w^* = (w_1^*, w_2^*)^T$ die Lösung des Gleichungssystems

$V^T x = w$, d.h. es gilt

$$\begin{pmatrix} 1.05 & 1.05 \\ 120 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Nach der Cramerschen Regel folgt:

$$w_1^* = \frac{105-120}{-31.5} = \frac{15}{31.5}\left( = \frac{10}{21} = 0.4762 \right)$$

$$w_2^* = \frac{90-105}{-31.5} = \frac{15}{31.5} \quad .$$

Es liegt somit eine (eindeutige und) strikt positive Lösung des Gleichungssystems vor. Damit ist der Modellmarkt arbitragefrei.

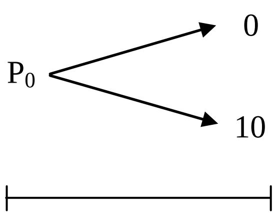
b) Die risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsbelegung ergibt sich aus $(q_1, q_2)^T = (1+r_0)\,w^*$.

Mit $1+r_0 = 1.05$ folgt:

$$q_1 = 1.05\,w_1^* = \frac{15.75}{31.5} = \frac{1}{2}$$

$$q_2 = 1.05\,w_2^* = \frac{15.75}{31.5} = \frac{1}{2}$$

c) Für die Putoption gilt aus Sicht des Investors allgemein $P_1 = \max(X - S_1, 0)$, d.h. im vorliegenden Falle:




Es gilt $P_0 = (1.05)^{-1} E_Q(P_1)$, wobei

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt:

$$P_0 = \frac{1}{1.05}\left(0 \cdot \tfrac{1}{2} + 10 \cdot \tfrac{1}{2}\right) = \frac{5}{1.05} = 4.762\ .$$

d) Die Duplikationsbedingungen sowie die Law of One Price-Beziehung lauten:

(I) $120x + 1.05\,y = 0$

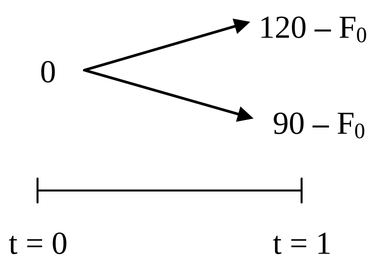
(II) $90x + 1.05\,y = 10$

(III) $100x + y = P_0$

Aus (I) – (II) folgt x= -1/3 und damit y = 38.095.

Aus (III) folgt hieraus $P_0$ = 38.095 – 33.333 = 4.762.

e) Für die Forwardposition gilt aus Sicht des Investors:




Dabei ist $F_0$ der zu bestimmende Forwardpreis. Erwirbt der Investor x Einheiten des Basistitels und y der sicheren Anlage, so gelten für die Duplikationsposition damit die folgenden Bedingungen:

100x +y = 0 (t = 0)

120x + 1.05 y = 120 – $F_0$ (t = 1, Fall a)

90x + 1.05 y = 90 – $F_0$ (t = 1, Fall b)

Aus (II) – (III) folgt x = 1 und damit y = -100. Aus (II) und (III) folgt damit jeweils $F_0$ = 105, d.h. der Forwardpreis entspricht dem zum sicheren Zins aufgezinsten heutigen Wert des Basistitels (Cost-of-Carry-Preis).

f) Zu betrachten ist der Modellmarkt mit Basistitel, sicherer Anlage und Forward. Die State Space-Matrix V lautet in diesem Fall

$$V = \begin{pmatrix} 1.05 & 120 & 120 - F_0 \\ 1.05 & 90 & 90 - F_0 \end{pmatrix}$$

und der Preisvektor ist gegeben durch

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Prüfung der Arbitragefreiheit ist das Gleichungssystem

$$V^T x = w$$

zu betrachten, für dessen Lösung $(w_1^*, w_2^*)^T$

$$\begin{pmatrix} 1.05 & 1.05 \\ 120 & 90 \\ 120-F_0 & 90-F_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gelten muss, in Form von Einzelgleichungen somit

(I) $1.05(w_1^* + w_2^*) = 1$

(II) $120\,w_1^* + 90\,w_2^* = 100$

(III) $(120 - F_0)\,w_1^* + (90 - F_0)\,w_2^* = 0$ .

Die Bedingung (III) ist äquivalent zu

(IV) $120\,w_1^* + 90\,w_2^* = F_0\,(w_1^* + w_2^*)$ .

Unter Beachtung von (I) und (II) resultiert hieraus

$100 = F_0(1.05)^{-1}$

und somit schließlich

$F_0 = 100(1.05) = 105$ .

[Alternativ: Explizite Lösung für (I) + (II) aus Aufgabenteil a),
mithin $w_1^* = w_2^* = 10/21$]

**Aufgabe 2:** (25 Minuten)

a) Es seien Z = $\{Z_1,...,Z_T\}$ und V = $\{V_1,...,V_T\}$ zwei Zahlungsreihen mit zugehörigen Barwerten $P_Z$ und $P_V$ bzw. Macaulay-Durationen $D_Z$ und $D_V$. Von Zahlungsreihe Z werden x Einheiten, von Zahlungsreihe V werden y Einheiten erworben. Setzen Sie voraus, dass für die Duration $D_W$ der Zahlungsreihe W = xZ + yV die folgende Beziehung gilt:

$$D_W = \frac{xP_Z D_Z + yP_V D_V}{xP_Z + yP_V} .$$

Ein Investor möchte einen Anlagebetrag von EUR 10 000 bei einem derzeitigen Marktzins von 4% p.a. und flacher Zinsstruktur in festverzinsliche Wertpapiere investieren. Ihm stehen Einheitszerobonds mit einer Restlaufzeit von einem Jahr bzw. zehn Jahren zur Verfügung. Wie muss er sein Investitionsbudget aufteilen, damit sein Vermögen nach vier Jahren gegen mögliche Zinsänderungen, die sich unmittelbar nach Anlage realisieren, immunisiert ist? Wie viele absolute Einheiten der Zerobonds muss er hierfür erwerben? (Vernachlässigen Sie dabei Ganzzahligkeitsbedingungen.)

b) Wir gehen aus von einem fristigkeitsunabhängigen Marktzins r und betrachten marktkonforme Kuponbonds (d.h. der Nominalzins i des Bonds entspricht jeweils dem Marktzins) unterschiedlicher Laufzeiten n.

Die Duration eines solchen marktkonformen Kuponbonds mit Laufzeit n beträgt

$$D(i) = \frac{1+i}{i}\,[1-(1+i)^{-n}].$$

Gegeben sei nun ein Zeitpunkt T.

i) Welchen Wert nimmt ein in t = 0 zum Marktzins investiertes Vermögen N zum Zeitpunkt T an?

ii) Immunisieren Sie den Wert dieses Endvermögens in T durch eine geeignete Investition in marktkonforme Kuponbonds! Wie lautet die Immunisierungsstrategie? (Vernachlässigen Sie wiederum Ganzzahligkeitsbedingungen).

c) Bei Verwendung einer fristigkeitsunabhängigen zeitstetigen Zinsrate u ergibt sich als Barwert eines Bonds mit Zahlungsreihe $\{Z_1, \ldots, Z_T\}$

$$P_u = \sum_{t=1}^{T} Z_t\, e^{-ut}$$

und als zeitstetige Macaulay-Duration

$$D(u) = \sum_{t=1}^{T} t\, Z_t\, e^{-ut} / P(u).$$

i) Stellen Sie die zeitstetige Macaulay-Duration als Funktion von $P'(u) = dP/du$ dar!

ii) Bestimmen Sie die zeitstetige Macaulay-Duration eines Zerobonds der Laufzeit T!

**Lösungsskizze:**

a) Investor erwirbt x Einheiten von Zerobond 1 sowie y Einheiten von Zerobond 2

Zielduration: $D_W = 4$

$D_Z = 1$, $D_V = 10$

$P_Z = (1+r)^{-1} = (1.04)^{-1}$

$P_V = (1+r)^{-10} = (1.04)^{-10}$

Bedingung 1: $I_0 = 10000 = x\,P_Z + y\,P_V$

Folgerung: $y\,P_V = I_0 - x\,P_Z$

Bedingung 2:

$$4 = D_W = \frac{x\,D_Z P_Z + (I_0 - xP_Z)\,D_V}{I_0}$$

Investitionswert in Zerobond 1:

$$P_Z\, x = \frac{I_0(4-D_V)}{(D_Z-D_V)} = \frac{I_0(D_V-4)}{(D_V-D_Z)} = \frac{10\,000\cdot 6}{9} = \frac{2}{3}\cdot 10\,000$$

Entsprechend Investitionswert in Zerobond 2: $\frac{1}{3}\cdot 10\,000$

Absolute Stückzahlen:

$$x = \frac{2}{3}\cdot 10\,000\cdot(1.04) = 6\,933.3333$$

$$y = \frac{1}{3}\cdot 10\,000\cdot(1.04)^{10} = 4\,934.1476\,.$$

b)

i) $V_T = N(1+r)^T = N(1+i)^T$

ii) Ansatz für Immunisierungsstrategie:

$$D(i) = \frac{1+i}{i}\,[1-(1+i)^{-n}] = T$$

Hieraus folgt

$$(1+i)^n = \frac{1+i}{1+i-Ti}$$

und damit

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1+i}{1+i-Ti}\right)}{\ln(1+i)} = 1 - \frac{\ln(1+i-Ti)}{\ln(1+i)}$$

Die Immunisierungsstrategie besteht darin, einen marktkonformen Standardbond der Laufzeit n zu erwerben.
<u>Anmerkung:</u> Es ist $1+i-Ti>0$ sicherzustellen, d.h. $T<(1+i)/i$.

c)

i) Es gilt $P'(u) = -\Sigma\, t\, Z_t\, e^{-ut}$ und damit $D(u) = -P'(u)/P(u)$.

ii) Es gilt:

$$D(u) = \frac{T\, Z_T\, e^{-uT}}{Z_T\, e^{-uT}} = T\,.$$

Auch im zeitstetigen Fall entspricht die Macauley-Duration der Laufzeit des Zerobonds!

**Aufgabe 3:** (20 Minuten)

Ein x-jähriger Versicherungsnehmer schließe eine aufgeschobene Leibrente (Aufschubzeit: m Jahre) gegen eine laufende vorschüssige Prämie während der Aufschubzeit ab.

a) Bestimmen Sie den Leistungsbarwert der vorstehenden aufgeschobenen Leibrente als Funktion der gestutzten Lebensdauer $CT_x$ !

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert dieses Leistungsbarwerts!

c) Bestimmen Sie die Varianz dieses Leistungsbarwerts!

d) Stellen Sie den Prämienbarwert als Funktion der gestutzten Lebensdauer $CT_x$ dar. Unterstellen Sie dabei, dass eine im Zeitablauf gleich hohe Nettoprämie der Höhe NP gezahlt wird.

**Lösungsskizze:**

a) Es gilt $(d = 1 - v;\ CT = CT_x)$

Für $CT = 0,\ldots,m-1$: $\quad LBW_{LR} = 0$

Für $CT = m, m+1,\ldots, w-x$:

$$\begin{aligned} LBW_{LR} &= v^m + v^{m+1} + \ldots + v^{CT} = v^m(1 + v + \ldots + v^{CT-m}) \\ &= v^m(1 - v^{CT-m+1})/d = v^m \ddot{a}_{\overline{CT-m+1|}} \end{aligned}$$

b) $$E(LBW_{LR}) = \frac{v^m}{d} \sum_{t=m}^{w-x} (1 - v^{t-m+1})_{t|}q_x$$

c) Zunächst gilt $(CT = CT_x)$:

$$LBW_{LR}^2 = \begin{cases} 0 & CT = 0,\ldots,m-1 \\ v^{2m}(1 - v^{CT-m+1})^2/d^2 & CT = m,\ldots,w-x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & CT = 0,\ldots,m-1 \\ \frac{v^{2m}}{d^2}[1 - 2v^{CT-m+1} + v^{2(CT-m+1)}] & CT = m,\ldots,w-x \end{cases}$$

Damit gilt

$$E(LBW_{LR}^2) = \frac{v^{2m}}{d^2} \sum_{t=m}^{w-x} (1 - v^{t-m+1})^2{}_{t|}q_x = \frac{v^{2m}}{d^2} \sum_{t=m}^{w-x} \left[1 - 2v^{t-m+1} + v^{2(t-m+1)}\right]_{t|}q_x$$

und insgesamt

$$\mathrm{Var} = (\mathrm{LBW}_{\mathrm{LR}}) = \mathrm{E}(\mathrm{LBW}_{\mathrm{LR}}^2) - \mathrm{E}(\mathrm{LBW}_{\mathrm{LR}})^2 .$$

d) Es gilt ($d = 1 - v$; $CT = CT_x$)

$$\mathrm{PBW} = \begin{cases} \mathrm{NP}(1 + \ldots + v^{CT}) & CT = 0,\ldots, m-1 \\ \mathrm{NP}(1 + \ldots + v^{m-1}) & CT = m,\ldots, w-x \end{cases}$$

bzw.

$$\mathrm{PBW} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{NP}}{d}(1 - v^{CT+1}) & CT = 0,\ldots, m-1 \\ \dfrac{\mathrm{NP}}{d}(1 - v^{m}) & CT = m,\ldots, w-x \end{cases}$$

**<u>Aufgabe 4:</u>** (25 Minuten)

Gegeben sei ein einperiodiges Binomialmodell für die DAX-Entwicklung, wobei die Periodenlänge fünf Jahre betrage. Der Startwert des DAX betrage DAX(0) = 7 000. Am Ende der Periode beträgt der DAX-Stand entweder DAX(5) = 9 800 oder DAX(5) = 4 900. Die annualisierte (!) Fünf-Jahres-Spot Rate betrage $r_5 = 5\%$.

Ein 60-jähriger Versicherungsnehmer schließe nun eine Lebensversicherung auf den Erlebensfall mit 5 Jahren Laufzeit ab. Eine Todesfallleistung wird nicht fällig bzw. wird in der Analyse ausgeblendet, ebenso bleiben Betriebskosten außen vor.

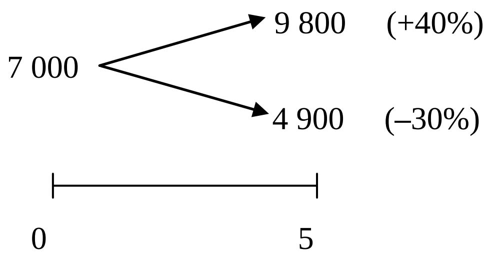
a) Die Versicherungsleistung bei Erleben betrage mindestens EUR 14 000 oder bei positiver DAX-Entwicklung EUR 14 000 vermehrt um die positive (nicht-annualisierte) DAX-Rendite. Bestimmen Sie die Einmalprämie dieser Versicherung auf Basis einer direkten Duplikation des Rückzahlungsprofils (eine Explizierung der eingebetteten Option ist in diesem Fall nicht erforderlich!)

b) Bestimmen Sie alternativ die Einmalprämie der Versicherung unter a), indem Sie insbesondere die eingebettete Option isolieren und mittels Duplikationsprinzip bewerten. Welche Option ist in der Versicherung eingebettet?

c) Die Erlebensfallversicherung werde nun gegen eine Einmalprämie von EUR 20 000 erworben. Die Rückzahlung betrage mindestens EUR 20 000 oder aber EUR 20 000 vermehrt um die Partizipation an der (nicht annualisierten) DAX-Rendite mit Partizipationsrate $0 < pr < 1$. Bestimmen Sie in diesem Falle die arbitragefreie Partizipationsrate – am einfachsten über die direkte Duplikation des Rückzahlungsprofils (wie in Aufgabenteil a) oder <u>alternativ</u> über die Duplikation der eingebetteten Option (wie in Aufgabenteil b).

**<u>Lösungsskizze:</u>**

a) DAX-Entwicklung:




$$L_5 = \max\{14\,000, 14\,000\,\mathrm{DAX}(5)/\mathrm{DAX}(0)\} = \max\{14\,000, 14\,000\,(1.4)\}$$
$$= \max\{14\,000, 19\,600\}$$

Duplikation in t = 5:

(I) $9\,800x + (1.05)^5 y = 19\,600$

(II) $4\,900x + (1.05)^5 y = 14\,000$

Aus (I) – (II) folgt 4900x = 5 600 bzw. x = 1.142857143

Hieraus folgt $(1.05)^5 y = 14\,000 - 5\,600 = 8\,400$ bzw. $y = 8\,400(1.05)^{-5} = 6\,581.62$.

Der Preis des Duplikationsportfolios in t = 0 beträgt

$7\,000x + 6\,581.62 = 8\,000 + 6\,581.62 = 14\,581.62$.

Dies ist zugleich der Marktwert des Rückzahlungsprofils der Lebensversicherung. Die zugehörige Einmalprämie beträgt

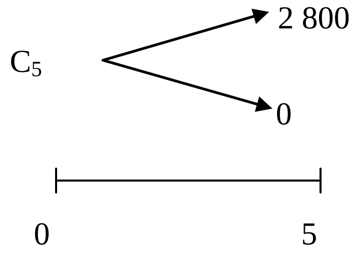
$$EP = 14\,581.62 \cdot {}_5p_{60}.$$

b) Es gilt

$$L_5 = \max\left\{14\,000, 14\,000 + 14\,000\frac{\mathrm{DAX}(5) - \mathrm{DAX}(0)}{\mathrm{DAX}(0)}\right\}$$
$$= 14\,000 + \frac{14\,000}{7\,000}\max\{\mathrm{DAX}(5) - \mathrm{DAX}(0), 0\}$$
$$= 14\,000 + 2C_5 .$$

Eingebettet in die Versicherung ist eine fünfjährige Europäische Calloption auf den DAX mit einem Ausübungspreis von X = DAX(0) = 7 000.

Entwicklung der Calloption:




Duplikation in t = 5:

(I) $9\,800x + (1.05)^5 y = 2\,800$

(II) $4\,900x + (1.05)^5 y = 0$

Aus (I) – (II) folgt $4\,900x = 2\,800$ bzw. x = 0.57142857 und

$y = -2\,800(1.05)^{-5} = -2193.873266$.

Preis des Duplikationsportfolios:

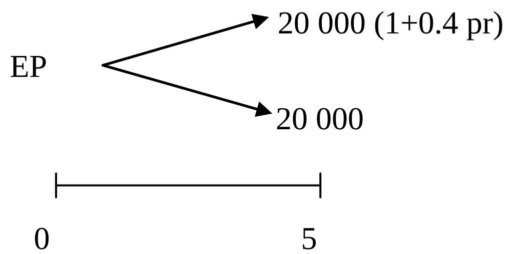
$7\,000(0.57142857) - 2\,193.873266 = 4\,000 - 2\,193.873266 = 1\ 806.126734$.

Dies ist zugleich der Wert $C_0$ des Call in t = 0. Der Marktwert $L_0$ der Versicherungs-leistung ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} L_0 &= 14\,000(1.05)^{-5} + 2(1\,806.126734) \\ &= 10\,969.36633 + 3\,612.253468 = 14\,581.62\ . \end{aligned}$$

Die Bewertung ist damit identisch mit dem Resultat unter Aufgabenteil a) !

c) Die Entwicklung der Lebensversicherung lautet




Dabei gilt $EP = 20\,000 = L_0\ {}_5p_{60}$, wobei $L_0$ den Marktwert in t = 0 des Rückzah-lungsprofils $L_5$ der Lebensversicherung bezeichne.

Duplikation in t = 5:

(I) $9\,800x + (1.05)^5 y = 20\,000(1 + 0.4\,pr)$

(II) $4\,900x + (1.05)^5 y = 20\,000$ .

(I) – (II) ergibt $4\,900x = 20\,000 \cdot 0.4 \cdot pr$ bzw. $x = (20\,000 \cdot 0.4 \cdot pr)/4\,900$ und damit

$(1.05)^5 y = 20\,000 - (20\,000 \cdot 0.4 \cdot pr)$ bzw. $y = 20\,000(1 - 0.4 \cdot pr)(1.05)^{-5}$.

Hieraus folgt in t = 0

$$\frac{20\,000}{{}_5p_{60}} = L_0 = 7\,000\,x + y$$

$$= 20\,000\ \frac{7\,000 \cdot 0.4}{4\,900} pr + 20\,000(1 - 0.4\,pr)(1.05)^{-5}$$

und damit

$$\frac{1}{{}_5p_{60}} = 0.571428571 \cdot pr + (1.05)^{-5} - 0.313410466 \cdot pr$$

bzw. $\left[\frac{1}{{}_5p_{60}} - (1.05)^{-5}\right] = 0.258 \cdot pr$

und hieraus schließlich

$$pr = 3.875697\left[\frac{1}{{}_5p_{60}} - (1.05)^{-5}\right]$$

$$= 3.875697\left[\frac{1}{{}_5p_{60}} - 0.783526166\right]$$

$$= 3.875697 / {}_5p_{60} - 3.03671\,.$$

Bei der alternativen Vorgehensweise über die Duplikation der eingebetteten Calloption ergibt sich

$$L_5 = 20\,000 + \frac{20\,000}{7\,000} \cdot pr \cdot C_5$$

und damit

$$\frac{20\,000}{{}_5p_{60}} = L_0 = 20\,000(1.05)^{-5} + \frac{20\,000}{7\,000} \cdot pr \cdot C_0\,.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{{}_5p_{60}} = (1.05)^{-5} + \frac{C_0}{7\,000} \cdot pr$$

und somit insgesamt

$$pr = \left[\frac{1}{{}_5p_{60}} - (1.05)^{-5}\right] \cdot \frac{7\,000}{1806.126734}$$

$$= \left[\frac{1}{{}_5p_{60}} - (1.05)^{-5}\right] \cdot 3.875697\,,$$

mithin insgesamt eine identische Lösung!