Prüfung Grundprinzipien der Versicherungs- und Finanzmathematik 2010

Aufgabe 1: (25 Minuten)

a) Gegeben sei ein einperiodiger State Space-Markt mit drei Zuständen, der aus drei Wertpapieren bestehe, einer sicheren Anlage zu 10% sowie zwei risikobehafteten Wertpapieren. Wertpapier 1 weist dabei einen anfänglichen Preis von 41 und den Rückflussvektor $(44,44,48)^T$ auf, Wertpapier 2 einen anfänglichen Preis von 19 und den Rückflussvektor $(22,18,22)^T$.

i) Bestimmen Sie die zugehörige State Space-Matrix V und den anfänglichen Preisvektor w!

ii) Weisen Sie nach, dass der vorstehend spezifizierte State Space-Markt arbitragefrei ist! Wie lautet der preiserzeugende Vektor?

iii) Bestimmen Sie die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten!

iv) Bestimmen Sie den arbitragefreien Preis eines Finanztitels mit dem Rückflussvektor $(20,10,40)^T$!

b) Ein Power-Call besitze das allgemeine Rückzahlungsprofil $PC_T = \max[(S_T - X)^2, 0]$. Bestimmen Sie für den Fall T = 1 durch Duplikation den Preis des Power-Calls mit Ausübungspreis X = 100 in der folgenden Situation. Die Kursentwicklung $\{S_t\}$ des Basistitels folge einem einperiodigen Binomialprozess mit Startwert $s_0 = 100$. In T = 1 kann der Kurs um 20% gefallen oder um 20% gestiegen sein. Der Einperiodenzins betrage 4%.

Lösungsskizze:

Teilaufgabe a)

i) $$V = \begin{pmatrix} 1.1 & 44 & 22 \\ 1.1 & 44 & 18 \\ 1.1 & 48 & 22 \end{pmatrix}$$

$$w = (1,\ 41,\ 19)^T$$

ii) Zu überprüfen ist, ob das Gleichungssystem

$V^T x = w$,

wobei $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, eine strikt positive Lösung besitzt.

Dies führt auf das folgende Lineare Gleichungssystem (dabei multiplizieren wir die erste Zeile mit 40)

(I) $44\,x_1 + 44\,x_2 + 44x_3 = 40$

(II) $44\,x_1 + 44\,x_2 + 48\,x_3 = 41$

(III) $22\,x_1 + 18\,x_2 + 22\,x_3 = 19$.

Aus (II) – (I) folgt $x_3 = 0.25$ und aus (I) – 2(III) folgt $x_2 = 0.25$. Aus (I) folgt dann $x_1 = 9/22 = 0.4091$.

Das Gleichungssystem besitzt damit eine strikt positive Lösung, der State Space-Markt ist somit arbitragefrei.

Der preiserzeugende Vektor lautet $(9/22, 0.25, 0.25)^T$.

iii) Der risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsvektor q ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} q &= 1.1(9/22, 0.25, 0.25)^T \\ &= (0.45, 0.275, 0.275)^T . \end{aligned}$$

iv) Die arbitragefreie Bewertung ergibt sich durch Diskontierung des risikoneutralen Erwartungswerts, d.h.

$$\begin{aligned} P &= (1.1)^{-1}[20(0.45) + 10(0.275) + 40(0.275)] \\ &= (1.1)^{-1}(22.75) = 20.68 . \end{aligned}$$

Teilaufgabe b)

Für den Basistitel gilt

$$100 \begin{array}{l} \nearrow 120 \\ \searrow 80 \end{array}$$

Für den Power-Call entsprechend

$$C_0 \begin{array}{l} \nearrow (20)^2 = 400 \\ \searrow (-20)^2 = 400 \end{array}$$

Duplikation in t = 1:

(I) $120x + 1.04\,y = 400$

(II) $80x + 1.04\,y = 400$

Aus (I)-(II) folgt $40x = 0$ und damit $x = 0$. Für y resultiert hieraus

$y = 400/(1.04) = 384.6154$.

Der Preis C_0 des Power-Calls ergibt sich als Preis des Duplikationsportfolios zu

$C_0 = 100x + y = 384.62$.

Aufgabe 2: (20 Minuten)

a) Ein Standardbond ist charakterisiert durch die Zahlungsreihe $\{Z, ..., Z, Z+N\}$ seiner Zins- und Tilgungszahlungen. Dabei bedeute N den Nennwert des Bonds und Z die Höhe der jeweiligen Zinszahlungen. Der Standardbond habe eine Laufzeit von T Jahren und einen anfänglichen Kaufkurs in Höhe von P_0.
Bestimmen Sie die effektive Rendite des Standardbonds bei Annahme der Wiederanlage der Zinsrückflüsse zu einem gegebenen Marktzins r_0.

b) Weisen Sie die Immunisierungseigenschaft der (Macaulay-)Duration nach! (Nachweis der Eigenschaft eines lokalen Extremwerts genügt)

c) Bestimmen Sie die Konvexität eines Zerobonds mit Rückzahlungsbetrag N und Laufzeit T.

Lösungsskizze:

a) Endwert der Rückflüsse unter $r_0 (q_0 := 1 + r_0)$:

$$Z(q_0^{T-1} + ... + q_0 + 1) + N = Z(1 + q_0 + ... + q_0^{T-1}) + N$$

$$= Z\frac{q_0^T - 1}{q_0 - 1} + N$$

Bestimmungsgleichung für die effektive Rendite:

$$P_0(1 + r_{eff})^T = Z\frac{q_0^T - 1}{q_0 - 1} + N$$

Folgerung:

$$r_{eff} = \left\{\frac{1}{P_0}\left[Z\frac{q_0^T - 1}{q_0 - 1} + N\right]\right\}^{\frac{1}{T}} - 1$$

b) Gegeben eine Zahlungsreihe $\{Z_1, ..., Z_T\}$, so ist gesucht ein Zeitpunkt s, so dass die Barwertfunktion in s ein lokales Minimum annimmt.

Es gilt:

$$K_s(r) = \Sigma\ Z_t(1 + r)^{s-t}$$

$$K_s^{'}(r) = (1 + r)^{s-1}\Sigma(s - t)Z_t(1 + r)^{-t}$$

Hieraus folgt

$$K_s^{'}(r) = s(1 + r)^{s-1}\Sigma Z_t(1 + r)^{-t} - (1 + r_0)^{s-1}\Sigma\, t\, Z_t(1 + r)^{-t}$$

$$= s(1 + r)^{s-1}P(r) - (1 + r)^{s-1}\Sigma\, t\, Z_t(1 + r)^{-t}\ .$$

Mit der Bedingung $K_s^{'}(r) = 0$ ergibt sich hieraus durch Auflösung nach s

$$s = \frac{\Sigma\, t\, Z_t(1 + r)^{-t}}{P(r)} = D(r)\,.$$

c) Es gilt allgemein

$$C(r) = P''(r) / P(r)\ .$$

Im vorliegenden Fall gilt $P(r) = N(1 + r)^{-T}$ und damit $P'(r) = -TN(1 + r)^{-(T+1)}$ sowie $P''(r) = -T(T + 1)(1 + r)^{-(T+2)}$.

Für die Konvexität des Zerobond folgt hieraus insgesamt:

$$C(r) = \frac{T(T + 1)\,N(1 + r)^{T-2}}{N(1 + r)^{-T}} = T(T + 1)(1 + r)^{-2}\,.$$

Aufgabe 3: (20 Minuten)

Betrachten Sie eine im Alter x sofort beginnende vorschüssige Leibrente der Höhe 1.

a) Stellen Sie den Leistungsbarwert dieser Leibrente als Funktion der gestutzten Lebensdauer dar!

b) Bestimmen Sie auf dieser Grundlage den Erwartungswert dieses Leistungsbarwerts! Verwenden Sie hierzu die Eintrittswahrscheinlichkeiten der gestutzten Lebensdauer!

c) Bestimmen Sie zudem die Varianz dieses Leistungsbarwerts!

d) Bestimmen Sie den Prämienbarwert (im Falle eines x-jährigen Versicherten und einer n-jährigen Vertragslaufzeit) als Funktion der gestutzten Lebensdauer. Gehen Sie dabei von vorschüssigen Prämienzahlungen der Höhe 1 aus.

Hinweis : Eine Benutzung komplexer versicherungsmathematischer Symbole ist nicht erforderlich!

Lösungsskizze:

Es bezeichne $CT = CT_x$ die gestutzte Lebensdauer.

a) Für den Leistungsbarwert LBW der Leibrente gilt dann ($d := 1/v$)

$$\begin{aligned} LBW &= 1 + v + \ldots + v^{CT} \\ &= \frac{1}{d}(1 - v^{CT+1}) \end{aligned}$$

b) $E(LBW) := \frac{1}{d}[1 - E(v^{CT+1})].$

$$\begin{aligned} H(v) := E(v^{CT+1}) &= v\,E(v^{CT}) \\ &= v\sum_{t=0}^{\infty} v^t\, P(CT = t)\ , \end{aligned}$$

wobei $P(CT = t) = {}_tp_x\ q_{x+t}\ (= {}_{t|}q_x)$.

Damit gilt insgesamt:

$$E(LBW) = \frac{1}{d}[1 - H(v)] = \frac{1}{d}(1 - A_x)\,.$$

c) $$\begin{aligned} Var(LBW) &= \frac{1}{d^2}\ Var(v^{CT+1}) \\ &= \frac{1}{d^2}\ \{E[(v^{CT+1})^2] - E(v^{CT+1})^2\}\ . \end{aligned}$$

$E(v^{CT+1})$ wurde berechnet in Teilaufgabe b). Zu bestimmen ist daher noch $E[(v^{CT+1})^2] = E[(v^2)^{CT+1}]$. Die Funktion H(v) gemäß Teilaufgabe b) ist daher auszuwerten in v^2.

Insgesamt gilt damit

$$\mathrm{Var}(LBW) = \frac{1}{d^2}[H(v^2) - H^2(v)].$$

d) Es gilt:

$$PBW = \begin{cases} 1 + v + ... + v^{CT} & CT = 0, 1, ..., n-1 \\ 1 + v + ... + v^{n-1} & CT = n, n+1, ... \end{cases}$$

bzw.

$$PBW = \begin{cases} \frac{1}{d}(1 - v^{CT+1}) & CT = 0, 1, ..., n-1 \\ \frac{1}{d}(1 - v^{n}) & CT = n, n+1, .. \end{cases}$$

Aufgabe 4: (25 Minuten)

Gegeben sei eine DAX-gebundene Erlebensfallversicherung (d.h. eine Versicherungsleistung wird nur im Erlebensfall fällig) mit Zinsgarantie. Die Laufzeit dieser Versicherung betrage zwei Jahre.

Die Versicherung erfolgt gegen eine Einmalprämienzahlung in t = 0. Betriebskosten werden im Weiteren vernachlässigt.

Die Leistung im Erlebensfall beträgt mindestens N. Im Falle einer negativen DAX-Entwicklung umfasst die Erlebensfallleistung zusätzlich eine Partizipation von 100α% am Betrag der (nicht-annualisierten) Zweijahres-DAX-Rendite.

a) Welches Leistungsprofil (für die Überlebenden) weist diese DAX-gebundene Versicherung in t = 2 auf?

b) Zerlegen Sie dieses Leistungsprofil in geeigneter Weise mit dem Ziel einer Explizierung der Optionskomponente.

c) Bestimmen Sie auf dieser Basis die zu zahlende Einmalprämie EP (DAX und Sterblichkeit werden dabei als unabhängig vorausgesetzt) bei Annahme fristigkeitsabhängiger Zinsen!

d) Formulieren Sie für einen endlichen State Space-Markt die Eigenschaft der starken Arbitragefreiheit sowie die Eigenschaft des Law of One Price. Weisen Sie nach, dass aus der starken Arbitragefreiheit das Law of One Price folgt.

Lösungsskizze:

a) $$VL_2 = \max\left\{N, N\left[1-\alpha\left(\frac{DAX(2)}{DAX(0)}-1\right)\right]\right\}.$$

b) $$VL_2 = N + \max\left\{0, \alpha\, N\left(\frac{DAX(0)-DAX(2)}{DAX(0)}\right)\right\}$$

$$= N + \frac{\alpha\, N}{DAX(0)} \max\{DAX(0)-DAX(2), 0\}.$$

Die Max-Komponente entspricht einem zweijährigen DAX-Put mit Ausübungspreis in Höhe des anfänglichen DAX-Stands, d.h. X = DAX(0).

c) Es bezeichne P_0 die Prämie des Zweijahres-DAX-Puts mit Ausübungspreis DAX(0), r_2 die Zweijahres-Spot Rate, x das Eintrittsalter des Versicherten und ${}_2p_x$ die zweijährige Überlebenswahrscheinlichkeit.

Der Marktwert VL_0 der Versicherungsleistung in t = 0 beträgt dann

$$VL_0 = N(1+r_2)^{-2} + \frac{\alpha\, N}{DAX(0)} P_0.$$

Da diese Versicherungsleistung nur an die Überlebenden gezahlt wird, gilt insgesamt für die Einmalprämie:

$$EP = {}_2p_x \cdot VL_0 = {}_2p_x\, N\left\{(1+r_2)^{-2} + \frac{\alpha}{DAX(0)} P_0\right\}.$$

d) Gegeben sei ein Portfoliovektor x. Es bezeichnen V(x) den Vektor der zufallsabhängigen Rückflüsse des Portfolios x in t = 1 und w(x) den Preis des Porfolios x in t = 0.

Starke Arbitragefreiheit:
(1) $V(x) \geq 0$ und $V(x) \neq 0 \Rightarrow w(x) > 0$
(2) $V(x) = 0 \Rightarrow w(x) = 0$

Law of One Price (LOP)
$V(x_1) = V(x_2) \Rightarrow w(x_1) = w(x_2)$

Beweis von LOP erfolgt auf Basis der zweiten Teilbedingung für die starke Arbitrage-freiheit.
$V(x_1) = V(x_2) \Rightarrow V(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow w(x_1 - x_2) = 0$
$\Rightarrow w(x_1) = w(x_2)$.