Bericht zur Prüfung im Oktober 2009 über Grundprinzipien der Versicherungs- und Finanzmathematik (Grundwissen)

Peter Albrecht (Mannheim)

Am 16. Oktober 2009 wurde zum vierten Mal eine Prüfung im Fach Grundprinzipien der Versicherungs- und Finanzmathematik nach PO III (Grundwissen Teil A) durchgeführt. Es waren 285 Teilnehmerinnen und Teilnehmer zu verzeichnen.

Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der vier Aufgaben gestellt wurden, die sämtlich zu bearbeiten waren. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 45 von 90 möglichen Punkten erzielt werden.

Aufgabe 1: (25 Minuten)

Unterstellen Sie für den Basistitel einer Terminposition einen einperiodigen Binomialprozess mit Startwert $s_0 = 100$ und einer prozentualen Aufwärtsbewegung von 10% bzw. einer prozentualen Abwärtsbewegung von 20%. Der einperiodige Zinssatz für eine sichere Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme betrage 5%.

a) Weisen Sie nach, dass der Modellmarkt arbitragefrei ist!

b) Wie lautet die risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsbelegung?

c) Bestimmen Sie auf dieser Grundlage den arbitragefreien Preis einer einperiodigen Calloption auf die Aktie, die einen Ausübungspreis von X = 90 besitzt.

d) Bestimmen Sie alternativ den Wert der Calloption auf der Grundlage des Duplikationsprinzips.

e) Bestimmen Sie den Wert eines einperiodigen Forwards auf den Basistitel auf der Grundlage des Duplikationsprinzips.

Lösungsskizze:

a) Zu betrachten ist das Gleichungssystem

$$V^T x = w,$$

wobei in diesem Falle

$$V = \begin{pmatrix} 1.05 & 110 \\ 1.05 & 80 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det(V^T) = \det(V) = 84 - 115.5 = -31.5 \neq 0$.

Das Gleichungssystem ist damit eindeutig lösbar.

Es bezeichne des Weiteren $w^* = (w_1, w_2)^T$ die Lösung des Gleichungssystems $V^T x = w$, d.h. es gilt

$$\begin{pmatrix} 1.05 & 1.05 \\ 110 & 80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Nach der Cramerschen Regel folgt:

$$w_1^* = \frac{80 - 105}{-31.5} = \frac{25}{31.5} \approx 0.79365$$

$$w_2^* = \frac{105 - 110}{-31.5} = \frac{5}{31.5} \approx 0.15873.$$

Es liegt eine eindeutige und strikt positive Lösung des Gleichungssystems vor. Damit ist der Modellmarkt arbitragefrei.

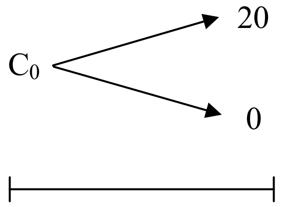
b) Die risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsbelegung ergibt sich aus $(q_1, q_2)^T = (1 + r_0)\, w^*$.

Mit $1 + r_0 = 1.05$ folgt:

$$q_1 = 1.05\, w_1^* = \frac{26.25}{31.5} = \frac{5}{6} = 0.8\overline{3},$$

$$q_2 = 1.05\, w_2^* = \frac{5.25}{31.5} = \frac{1}{6} = 0.1\overline{6}.$$

c) Für die Calloption gilt aus Sicht des Investors allgemein $C_1 = \max(S_1 - X, 0)$, d.h. im vorliegenden Falle:



Es gilt $C_0 = (1.05)^{-1} E_Q(C_1)$, wobei

$$C_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt:

$$C_0 = \frac{1}{1.05}\left(20 \cdot \frac{5}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{16.\overline{6}}{1.05} = 15.873\,.$$

d) Die Duplikationsbedingungen sowie die Law of One Price-Beziehung lauten:

(I) $110x + 1.05\,y = 20$

(II) $80x + 1.05\,y = 0$

(III) $100x + y = P_0$

Aus (I) – (II) folgt $x = 2/3$ und damit $y = -50.794$.

Aus (III) folgt hieraus $P_0 = 66.667 - 50.794 = 15.873$.

e) Für die Forwardposition gilt aus Sicht des Investors:

$$0 \;\begin{array}{l} \nearrow\; 110 - F_0 \\ \searrow\; 80 - F_0 \end{array}$$

t = 0 t = 1

Dabei ist F_0 der zu bestimmende Forwardpreis. Erwirbt der Investor x Einheiten des Basistitels und y der sicheren Anlage, so gelten für die Duplikationsposition damit die folgenden Bedingungen:

$100x + y = 0$ (t = 0)

$110x + 1.05\,y = 110 - F_0$ (t = 1, Fall a)

$80x + 1.05\,y = 80 - F_0$ (t = 1, Fall b)

Aus (II) – (III) folgt x = 1 und damit y = -100. Aus (II) und (III) folgt damit jeweils $F_0 = 105$, d.h. der Forwardpreis entspricht dem zum sicheren Zins aufgezinsten heutigen Wert des Basistitels (Cost-of-Carry-Preis).

Aufgabe 2: (20 Minuten)

a) Gegeben sei ein beliebiger Zinstitel mit Barwert $P_0(r)$ unter der zum Zeitpunkt 0 bestehenden flachen Zinsstruktur der Höhe r. Sei $t > 0$ ein beliebiger Zeitpunkt. Welche Beziehung besteht zwischen der modifizierten Duration in t und der modifizierten Duration in 0 ?

<u>Hinweis:</u> $P_t(r) = P_0(r)\,(1+r)^t$, wobei $P_t(r)$ den Wert des Zinstitels zum Zeitpunkt t bezeichne.

b) Gegeben sei eine Anleihe mit 2 Perioden Restlaufzeit, einem Kupon von 6% und einem Nennwert von N = 100. Am Markt bestehe eine flache Zinsstrukturkurve mit einem Zinsniveau von 5%. Wie hoch ist der faire Kurs der Anleihe unter diesen Bedingungen? Wie verändert sich der faire Kurs der Anleihe approximativ, wenn das Zinsniveau auf 5.5% steigt? Verwenden Sie zur Approximation einerseits die (absolute) Duration alleine und andererseits (absolute) Duration und (absolute) Konvexität. Welche Höhe nimmt der korrekte faire Kurs der Anleihe unter der veränderten Zinsstruktur an? Interpretieren Sie die Ergebnisse.

c) Bestimmen Sie die Konvexität eines Zerobonds mit Rückzahlungsbetrag N und Laufzeit T.

Lösungsskizze:

a) Gemäß der Definition der modifizierten Duration gilt:

$D_0^M(r) = -P_0'(r)/P_0(r)$ bzw.

$D_t^M(r) = -P_t'(r)/P_t(r)$. Nun gilt $P_t'(r) = t(1+r)^{t-1}P_0(r) + P_0'(r)(1+r)^t$ und damit:

$$D_t^M(r) = -\frac{t(1+r)^{t-1}P_0(r) + (1+r)^t P_0'(r)}{(1+r)^t P_0(r)}$$

$$= -\frac{t}{1+r} - \frac{P_0'(r)}{P_0(r)} = D_0^M(r) - \frac{t}{1+r}\ .$$

b) Die Zahlungsreihe des Bonds ist gegeben durch $\{6,106\}$.

i) $P(0{,}05) = 6(1.05)\text{-}1 + 106(1.05)^{-2}$
$= 5.7143 + 96.1451 = 101.8594$

ii) Korrekter neuer Kurs:

$P(0{,}055) = 6(1.055)\text{-}1 + 106(1.055)^{2}$
$= 5.6872 + 95.2359 = 100.9231$

iii) Approximation durch Duration:

$P(r + \Delta r) \approx P(r) - D_A(r)\Delta r$, wobei $\Delta r = 0.005$, $D_A(r) = -P'(r)$

$P(r) = 6(1 + r)^{-1} + 106(1 + r)^{-2}$

$P'(r) = -6(1 + r)^{-2} - 212(1 + r)^{-3}$

$D_A(0.05) = -P'(0.05) = 188.5757$

$\Rightarrow P(0.055) \approx P(0.05) - D_A(0.05) \cdot 0.005$

$= 101.8594 - 0.9429 = 100.9165$

iv) Approximation durch Duration und Konvexität:

$P(r + \Delta r) \approx P(r) - D_A(r)\Delta r + \frac{1}{2} C_A(r)(\Delta r)^2$, wobei $C_A(r) = P''(r)$

$P''(r) = 12(1 + r)^{-3} + 636(1 + r)^{-4}$

$C_A(0.05) = P''(0.05) = 533.60482$

$\Rightarrow P(0.055) \approx P(0.05) - D_A(0.05) \cdot 0.005 + \frac{1}{2} C_A(0.05) \cdot (0.005)^2$

$= 101.8594 - 0.9429 + 0.0067 = 100.9232.$

Folgerung (Vergleich mit wahrem Kurs): Deutliche Verbesserung der Approximationsqualität durch Verwendung von Duration *und* Konvexität.

c) Die Konvexität einer Zahlungsreihe $\{Z_1, \ldots, Z_T\}$ ist allgemein definiert durch

$$C(r) = \frac{P''(r)}{P(r)} = \frac{\sum_{t=1}^{T} t(t+1)\, Z_t (1+r)^{-t}}{(1+r)^2 \sum_{t=1}^{T} Z_t (1+r)^{-t}} \quad .$$

Im Falle des betrachteten Zerobonds gilt $Z_1 = \ldots Z_{T-1} = 0$ und $Z_T = N$. Damit reduziert sich der Ausdruck für die Konvexität auf

$$C(r) = \frac{T(T+1)\, N\, (1+r)^{-T}}{(1+r)^2\, N (1+r)^{-T}} \, .$$

Die Konvexität des Zerobonds ist somit gegeben durch

$$C(r) = T(T+1)(1+r)^{-2} \, .$$

Aufgabe 3: (20 Minuten)

Gegeben sei die folgende Verlustverteilung $L := -TG = S - 1000$ eines Schadenversicherungs-portfolios:

$P(L = -1000) = 0.8$
$P(L = -500) = 0.1$
$P(L = 0) = 0.05$
$P(L = 5000) = 0.04$
$P(L = 25000) = 0.006$
$P(L = 100000) = 0.004.$

a) Bestimmen Sie den Value at Risk von L zum Konfidenzniveau $\alpha = 0.01$.

b) Bestimmen Sie den Conditional Value at Risk von L zu dem Konfidenzniveau $\alpha = 0.05$.

<u>Hinweis:</u> Der Value at Risk zum Konfidenzniveau $\alpha = 0.05$ ist gegeben durch $VaR_{0.05} = 0$.

c) Bestimmen Sie den Value at Risk zum Konfidenzniveau einer normalverteilten Verlust-variablen, d.h. $L \sim N(\mu, \sigma^2)$.

<u>Hinweis:</u> $N_{1-\alpha}$ ist das $(1-\alpha)$-Quantil einer standardnormalverteilten Zufallsvariable Z, d.h. $Z \sim N(0,1)$.

<u>Lösungsskizze:</u>

a) Es gilt $P(L \leq 5000) = 0.99$ bzw. $P(L > 5000) = 0.01$. Damit folgt

$VaR_{0.01}(L) = Q_{0.99}(L) = 5000$.

b) <u>Vorüberlegung:</u>

Für die Bestimmung des CVaR benötigt man die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$P(L = x \mid L > y)$. Diese sind wie folgt zu ermitteln.

Allgemein gilt $P(A \mid B) := P(A \cap B)/P(B)$.

Somit gilt $P(L = x \mid L > y) = P(L = x, L > y) / P(L > y)$

Für x > y reduziert sich dies auf $P(L = x) / P(L > y)$.

<u>Hier also</u>: y = 0, $P(L > 0) = 0.05$.

Somit gilt:

$$P(L = 5000 \mid L > 0) = \frac{P(L = 5000)}{P(L > 0)} = \frac{0.04}{0.05} = 0.8,$$

$P(L=25000|L>0) = \dfrac{0.006}{0.05} = 0.12$,

$P(L=100000|L>0) = \dfrac{0.004}{0.05} = 0.08.$

Insgesamt gilt damit:

$$\begin{aligned}
CVaR_{0.05}(L) &= E(L \mid L > VaR_{0.05}) \\
&= E(L \mid L > 0) \\
&= 5000\, P(L = 5000 \mid L > 0) \\
&\quad + 25000\, P(L = 25000 \mid L > 0) \\
&\quad + 100000\, P(L = 100000 \mid L > 0) \\
&= 5000\,(0.8) + 25000\,(0.12) + 100000\,(0.08) \\
&= 4000 + 3000 + 8000 = 15000
\end{aligned}$$

c) Forderung an VaR:

$P(L > VaR) = \alpha.$

Damit gilt $\alpha = P(L > VaR) = P\left(\dfrac{L-\mu}{\sigma} > \dfrac{VaR - \mu}{\sigma}\right)$

und somit

$P\left(\dfrac{L-\mu}{\sigma} \le \dfrac{VaR-\mu}{\sigma}\right) = 1-\alpha\,.$

Nun ist $Z := (L - \mu)/\sigma$ standardnormalverteilt und es gilt

$P(Z \le N_{1-\alpha}) = 1-\alpha\,.$

Durch Vergleich folgt

$\dfrac{VaR-\mu}{\sigma} = N_{1-\alpha}$

und damit schließlich

$VaR = \mu + N_{1-\alpha}\,\sigma\,.$

<u>Aufgabe 4:</u> (25 Minuten)

Gehen Sie aus von der gestutzten Lebensdauer $CT = CT_x$ einer x-jährigen Person. Gehen Sie dabei (auch im Weiteren) aus von einem unendlichen Wertebereich von CT.

a) Bestimmen Sie den Leistungsbarwert einer lebenslänglichen Todesfallversicherung mit einer Versicherungssumme der Höhe 1 in Termen von CT !

b) Bestimmen Sie auf dieser Basis den erwarteten Leistungsbarwert $A_x(v)$ der lebenslänglichen Todesfallversicherung unter Benutzung von aufgeschobenen Sterbewahrscheinlichkeiten und bestimmen Sie die Varianz des Leistungsbarwertes in Termen von $A_x(v)$.

c) Weisen Sie nach, dass für $t = w - x + 1$ gilt: ${}_{t|}q_x = 0$.

d) Bestimmen Sie den Leistungsbarwert einer um m Jahre aufgeschobenen lebenslänglichen Todesfallversicherung (d.h., bei Tod im Aufschubzeitraum erfolgt keine Leistung) mit einer Versicherungssumme der Höhe 1 in Termen von CT!

e) Bestimmen Sie den erwarteten Leistungsbarwert ${}_{m|}A_x(v)$ der aufgeschobenen lebenslänglichen Todesfallversicherung und bestimmen Sie die Varianz des Leistungsbarwertes in Termen von ${}_{m|}A_x(v)$!

f) Stellen Sie nun den erwarteten Leistungsbarwert der aufgeschobenen lebenslänglichen Todesfallversicherung gemäß e) durch Umformung in Termen des erwarteten Leistungsbarwertes der lebenslänglichen Todesfallversicherung gemäß b) dar !

<u>Lösungsskizze:</u>

a) Es gilt

$$LBW_{LT} = v^{CT+1}.$$

b)
$$A_x = E(LBW_{LT}) = E(v^{CT+1}) = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} P(CT = t)$$
$$= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_{t|}q_x$$

$$\begin{aligned} Var(LBW_{LT}) &= E\left[(v^{CT+1})^2\right] - E(v^{CT+1})^2 \\ &= E\left[(v^2)^{CT+1}\right] - A_x(v)^2 \\ &= A_x(v^2) - A_x(v)^2 \end{aligned}$$

c) Es gilt

$${}_{w-x+1|}q_x = {}_{w-x+1}p_x \, q_{w+1} \, .$$

Weiter gilt

$${}_{w-x+1}p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_w \text{ bzw. } {}_{w-x+1}p_x = {}_{w-x}p_x \cdot p_w \, .$$

Da w der (kalkulatorisch) letztmögliche Lebenszeitpunkt ist, gilt aber $p_w = 0$.

Hieraus folgt das gewünschte Ergebnis.

d) Es gilt

$$LBW_{ALT} = \begin{cases} 0 & CT = 0, 1, \dots, m-1 \\ v^{CT+1} & CT = m, m+1, \dots \end{cases}$$

e) $${}_{m|}A_x(v) = E(LBW_{ALT}) = \sum_{t=m}^{\infty} v^{t+1} \; P(CT = t) = \sum_{t=m}^{\infty} v^{t+1} \; {}_{t|}q_x$$

$$Var(LBW_{ALT}) = E(LBW_{ALT}^2) - E(LBW_{ALT})^2 .$$

Nun gilt

$$LBW_{ALT}^2 = \begin{cases} 0 & CT = 0, 1, \dots, m-1 \\ (v^{CT+1})^2 & CT = m, m+1, \dots \end{cases}$$

Aufgrund von $(v^{CT+1})^2 = (v^2)^{CT+1}$ gilt daher

$E(LBW_{ALT}^2) = {}_{m|}A_x(v^2)$ und damit insgesamt

$$Var(LBW_{ALT}) = {}_{m|}A_x(v^2) - {}_{m|}A_x(v)^2 .$$

f) Es gilt

$${}_{m|}A_x = \sum_{t=m}^{\infty} v^{t+1} \; {}_{t|}q_x = v^m \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \; {}_{m+t|}q_x \; .$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} {}_{m+t|}q_x &= {}_{m+t}p_x \; q_{x+m+t} = {}_mp_x \; {}_tp_{x+m} \; q_{x+m+t} \\ &= {}_mp_x \; {}_{t|}q_{x+m} \; . \end{aligned}$$

Damit folgt insgesamt

$$\begin{aligned} {}_{m|}A_x &= v^m \; {}_mp_x \; \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \; {}_{t|}q_{x+m} \\ &= v^m \; {}_mp_x \; A_{x+m} \; . \end{aligned}$$