Bericht zur Prüfung im Oktober 2008 über Grundprinzipien der Versicherungs- und Finanzmathematik (Grundwissen)

Peter Albrecht (Mannheim)

Am 17. Oktober 2008 wurde zum dritten Mal eine Prüfung im Fach Grundprinzipien der Versicherungs- und Finanzmathematik nach PO III (Grundwissen Teil A) durchgeführt. Es waren 198 Teilnehmerinnen und Teilnehmer zu verzeichnen.

Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der vier Aufgaben gestellt wurden, die sämtlich zu bearbeiten waren. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 45 von 90 möglichen Punkten erzielt werden.

Aufgabe 1: (20 Minuten)

a) Gegeben sind drei Kuponbonds jeweils mit einheitlichem Nennwert N = 100 und einem einheitlichen Kupon von Z = 10, den Restlaufzeiten T = 1, 2 sowie 3 und den Marktpreisen $P_1 = 99$, $P_2 = 97.5$ sowie $P_3 = 96$. Bestimmen Sie die Diskontstruktur (Kurse der Einheitszerobonds) $\{b_1, b_2, b_3\}$ sowie die Zinsstruktur (Spot Rates) $\{r_1, r_2, r_3\}$!

b) Bestimmen Sie bei vorgegebener Annuität A, anfänglicher Schuld S_0 und Aufzinsungsfaktor q die erforderliche Laufzeit der zugehörigen Annuitätentilgung!

Lösungsskizze:

a) Aus den genannten Angaben resultieren die folgenden Zahlungsströme für die drei Kuponbonds:

$\{-99, 110\}$, $\{-97.5, 10, 110\}$ sowie

$\{-96, 10, 10, 110\}$.

Hieraus folgt das Gleichungssystem

(I) $99 = 110\, b_1$

(II) $97.5 = 10\, b_1 + 110\, b_2$

(III) $96 = 10\, b_1 + 10\, b_2 + 110\, b_3$.

Aus (I) folgt

$$b_1 = \frac{99}{110} = 0.9$$

und damit $r_1 = (1/b_1) - 1 = 0.1111 \qquad (11.11\%)$.

Aus (II) folgt:

$$b_2 = \frac{97.5 - 10b_1}{110} = \frac{97.5 - 9}{110} = \frac{88.5}{110} = 0.8045$$

und damit $r_2 = \sqrt{1/b_2} - 1 = 0.1149 \qquad (11.49\%)$

Aus (III) folgt schließlich:

$$b_3 = \frac{96 - 10b_1 - 10b_2}{110} = \frac{96 - 9 - 8.045}{110} = \frac{78.955}{110} = 0.7178$$

und damit $r_3 = \sqrt[3]{1/b_3} - 1 = 0.1169 \qquad (11.69\%)$.

b) Für die Annuität gilt zunächst

$$A = S_0 \frac{q^n (q-1)}{q^n - 1} = \frac{S_0 r}{1 - q^{-n}} .$$

Hieraus folgt

$$A - Aq^{-n} = S_0 r$$

und weiter

$$q^n = \frac{A}{A - S_0 r}$$

sowie

$$n \ln q = \ln(A) - \ln(A - S_0 r)$$

und schließlich

$$n = \frac{\ln(A) - \ln(A - S_0 r)}{\ln q}$$

Aufgabe 2: (20 Minuten)

Gehen Sie aus von der gestutzten Lebensdauer $CT = CT_x$ einer x-jährigen Person!

a) Bestimmen Sie den Leistungsbarwert einer n-jährigen Erlebensfallversicherung in Termen von CT!

b) Bestimmen Sie den Leistungsbarwert einer n-jährigen Risikolebensversicherung in Termen von CT!

c) Bestimmen Sie den Leistungsbarwert einer n-jährigen Kapitallebensversicherung in Termen von CT!

d) Bestimmen Sie den Prämienbarwert einer vorschüssigen laufenden Prämienzahlung eines n-jährigen Versicherungskontrakts in Termen von CT!

e) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Prämienbarwert unter d) und dem Leistungsbarwert unter c)?

f) Benutzen Sie den Zusammenhang unter e), um die Varianz des Prämienbarwerts als Funktion der Varianz des Leistungsbarwerts darzustellen!

<u>Lösungsskizze:</u>

a) Für den Leistungsbarwert LBW_{EF} einer n-jährigen Erlebensfallversicherung gilt:

$$LBW_{EF} = \begin{cases} 0 & CT = 0, ..., n-1 \\ v^n & CT = n, n+1, ... \end{cases}$$

b) Für den Leistungsbarwert LBW_{RL} einer n-jährigen Risikolebensversicherung gilt:

$$LBW_{RL} = \begin{cases} v^{CT+1} & CT = 0, 1, ..., n-1 \\ 0 & CT = n, n+1, ... \end{cases}$$

c) Für den Leistungsbarwert LBW_{KL} einer n-jährigen Kapitallebensversicherung gilt:

$$\begin{aligned} LBW_{KL} &= LBW_{EF} + LBW_{RL} \\ &= \begin{cases} v^{CT+1} & CT = 0, 1, ..., n-1 \\ v^n & CT = n, n+1, ... \end{cases} \end{aligned}$$

d) Für den Prämienbarwert PBW gilt mit d = 1 – v:

$$\begin{aligned} PBW &= \begin{cases} 1 + v + v^2 + ... + v^{CT} & CT = 0, 1, ..., n-1 \\ 1 + v + v^2 + ... + v^{n-1} & CT = n, n+1, ... \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{d}(1 - v^{CT+1}) & CT = 0, 1, ..., n-1 \\ \frac{1}{d}(1 - v^n) & CT = n, n+1, ... \end{cases} \end{aligned}$$

e) Offenbar gilt:

$$PBW = \frac{1}{d}(1 - LBW_{KL}).$$

f)
$$Var(PBW) = \frac{1}{d^2} Var(LBW_{KL}).$$

Aufgabe 3: (30 Minuten)

Gegeben sei ein einperiodiger vollständiger Stage Space-Markt mit s Zuständen und n+1 Finanztiteln. Der Finanztitel 0 entspreche dabei der risikolosen Anlage zum sicheren Zins r. Der preiserzeugende Vektor $w^* = (w_1^*, \ldots, w_s^*)^T$ des State Space-Markts existiere und sei strikt positiv.

a) In welcher Beziehung stehen der Vektor $q = (q_1, \ldots, q_s)$ der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten und w^*?

b) Weisen Sie nach, dass gilt $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$, d.h. q ist ein Wahrscheinlichkeitsvektor.

<u>Hinweis:</u> Benutzen Sie die Beziehung $V^T w^* = w$, wobei w dem Preisvektor der Finanztitel des Marktes entspricht und V die State Space-Matrix ist.

c) Bestimmen Sie den Preis des Finanztitels, dessen Rückflussvektor $C = (c_1, \ldots, c_s)^T$ in t=1 dem i-ten Einheitsvektor entspricht ($c_i = 1$, $c_j = 0$ für $j \neq i$) durch risikoneutrale Bewertung! Interpretieren Sie das Ergebnis!

d) Bestimmen Sie den Preis des ersten Einheitsvektors ($c_1 = 1$, $c_j = 0$ für $j \neq 1$) durch Duplikation!

e) Gegeben sei nun ein arbitragefreier Markt bestehend aus einer sicheren Anlage zum Zins r sowie einer "Binomialaktie" mit Wert s in t=0 sowie Werten us bzw. ds in t=1. Betrachten Sie einen Forward auf die Binomialaktie und bestimmen Sie den arbitragefreien Abrechnungspreis w dieses Forward durch Analyse eines geeigneten State Space-Markts!

Lösungsskizze:

a) $q = (1+r)\,w^*$, d.h. $q_i = (1+r)\,w_i^*$.

b) Die erste Zeile von V^T ist gegeben durch den Vektor $(1 + r)(1, \ldots, 1)$ und die erste Zeile von w ist gegeben durch den Skalar 1. Die erste Zeile des Gleichungssystems $V^T w^* = w$ lautet somit $(1+r)\sum_{i=1}^{n} w_i^* = 1$ und damit gilt $\Sigma q_i = 1$.

c)
$$w_C = \frac{1}{1+r} E_Q[C] = \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^{s} c_j\, q_j$$
$$= \frac{1}{1+r} c_i\, q_i = \frac{1}{1+r}(1+r)\,w_i^* = w_i^* .$$

Der arbitragefreie Preis des i-ten Einheitsvektors entspricht dem i-ten Wert des preiserzeugenden Vektors.

d) Da der State Space-Markt vollständig ist, d.h. die Matrix V den Rang s hat, lässt sich jeder (s,1)-Vektor als Linearkombination darstellen, d.h. es gibt einen Portfoliovektor x mit $Vx = (1, 0, \ldots, 0)^T$. Der Preis dieses Portfolios ist gegeben durch

$$\Sigma x_i w_i = w^T x = (V^T w^*)^T x = w^{*^T} V x$$
$$= w^{*^T} (1,0,\ldots,0)^T = w_1^* \,.$$

e) Betrachte den State Space-Markt bestehend aus sicherer Anlage, Aktie und Forward. Die State Space-Matrix V ist dann gegeben durch

$$V = \begin{pmatrix} 1+r & us & us-w \\ 1+r & ds & ds-w \end{pmatrix}$$

und der Preisvektor durch $w = (1, s, 0)^T$. Der Markt ist arbitragefrei, wenn das Gleichungssystem

$$V^T x = w$$

eine strikt positive Lösung besitzt.

Konkret lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1+r & 1+r \\ us & ds \\ us-w & ds-w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Einzelgleichungen lauten somit:

(1) $(1+r)(x_1 + x_2) = 1$
(2) $usx_1 + dsx_2 = s$
(3) $usx_1 + dsx_2 = w(x_1 + x_2)$

Aus (3) in Verbindung mit (1) und (2) folgt dann

$$w = \frac{usx_1 + dsx_2}{x_1 + x_2} = (1+r)s\,.$$

Aufgabe 4: (20 Minuten)

Gegeben sei eine DAX-gebundene Erlebensfallversicherung (d.h. eine Versicherungsleistung wird nur im Erlebensfall fällig) mit Zinsgarantie. Die Laufzeit dieser Versicherung betrage fünf Jahre.

Die Versicherung erfolgt gegen eine Einmalprämienzahlung in t = 0. Betriebskosten werden im Weiteren vernachlässigt.

Die Leistung im Erlebensfall beträgt mindestens N. Im Falle einer positiven DAX-Entwicklung umfasst die Erlebensfallleistung zusätzlich eine Partizipation von 100α% an der Fünfjahres-DAX-Rendite. Die Fünfjahres-Spot Rate sei dabei durch r_5 gegeben!

a) Welches Leistungsprofil (für die Überlebenden) weist diese DAX-gebundene Versicherung in t = 5 auf?

b) Zerlegen Sie dieses Leistungsprofil in geeigneter Weise mit dem Ziel einer Explizierung der Optionskomponente.

c) Welchen Marktwert besitzt dieses Leistungsprofil in t = 0?

d) Bestimmen Sie auf dieser Basis die zu zahlende Einmalprämie EP (DAX und Sterblichkeit werden dabei als unabhängig vorausgesetzt)!

<u>Lösungsskizze:</u>

a) $$VL_5 = \max\left\{N, N\left[1+\alpha\left(\frac{DAX(5)}{DAX(0)}-1\right)\right]\right\}.$$

b) $$VL_5 = N + \max\left\{0,\ \alpha N\left(\frac{DAX(5)-DAX(0)}{DAX(0)}\right)\right\}$$
$$= N + \frac{\alpha N}{DAX(0)}\max\{DAX(5)-DAX(0), 0\}.$$

Die Max-Komponente entspricht einem fünfjährigen DAX-Call mit Ausübungspreis in Höhe des anfänglichen DAX-Standes, d.h. X = DAX(0).

c) Es bezeichne C_0 die Prämie des Fünfjahres DAX-Calls mit Ausübungspreis DAX(0) und r_5 die Fünfjahres-Spot Rate.

Der Marktwert VL_0 der Versicherungsleistung in t = 0 beträgt dann

$$VL_0 = N(1+r_5)^{-5} + \frac{\alpha N}{DAX(0)}C_0.$$

d) Es bezeichne x das Eintrittsalter des Versicherten und ${}_5p_x$ die fünfjährige Überlebenswahrscheinlichkeit. Da die Versicherungsleistung nur an die Überlebenden gezahlt wird, gilt insgesamt für die Einmalprämie:

$$EP = {}_5p_x \cdot VL_0 = {}_5p_x\, N\left\{(1+r_5)^{-5} + \frac{\alpha}{DAX(0)}C_0\right\}.$$