Bericht zur Prüfung im Oktober 2007 über Grundprinzipien der Versicherungs- und Finanzmathematik (Grundwissen)

Peter Albrecht (Mannheim)

Am 05. Oktober 2007 wurde zum zweiten Mal eine Prüfung im Fach Grundprinzipien der Versicherungs- und Finanzmathematik nach PO III (Grundwissen Teil A) durchgeführt. Es waren 104 Teilnehmerinnen und Teilnehmer zu verzeichnen.

Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der vier Aufgaben gestellt wurden, die sämtlich zu bearbeiten waren. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 45 von 90 möglichen Punkten erzielt werden.

Aufgabe 1: (20 Minuten)

Gegeben sei ein einperiodiger State Space-Markt mit drei Zuständen, der aus drei Wertpapieren bestehe, einer sicheren Anlage zu 10% sowie zwei risikobehafteten Wertpapieren. Wertpapier 1 weist dabei einen anfänglichen Preis von 10.25 und den Rückflussvektor $(11,11,12)^T$ auf, Wertpapier 2 einen anfänglichen Preis von 9.5 und den Rückflussvektor $(11,9,11)^T$.

a) Bestimmen Sie die zugehörige State Space-Matrix V und den anfänglichen Preisvektor w!

b) Weisen Sie nach, dass der vorstehend spezifizierte State Space-Markt arbitragefrei ist! Wie lautet der preiserzeugende Vektor?

c) Bestimmen Sie die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten!

d) Bestimmen Sie den arbitragefreien Preis eines Finanztitels mit dem Rückflussvektor $(10,5,20)^T$!

Lösungsskizze:

a) $$V = \begin{pmatrix} 1.1 & 11 & 11 \\ 1.1 & 11 & 9 \\ 1.1 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

$$w = (1, 10.25, 9.5)^T$$

b) Zu überprüfen ist, ob das Gleichungssystem

$V^T x = w$,

wobei $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ eine positive Lösung besitzt.

Dies führt auf das folgende Lineare Gleichungssystem (dabei multiplizieren wir die erste Zeile mit 10)

(I) $11 x_1 + 11 x_2 + 11x_3 = 10$

(II) $11 x_1 + 11x_2 + 12 x_3 = 10.25$

(III) $11 x_1 + 9 x_2 + 11 x_3 = 9.5$.

Aus (II) – (I) folgt $x_3 = 0.25$ und aus (I) – (III) folgt $x_2 = 0.25$. Aus (I) folgt dann $x_1 = 4.5/11 = 9/22$.

Das Gleichungssystem besitzt damit eine strikt positive Lösung, der State Space-Markt ist somit arbitragefrei.

Der preiserzeugende Vektor lautet $(9/22, 0.25, 0.25)^T$.

c) Der risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsvektor q ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} q &= 1.1(9/22, 0.25, 0.25)^T \\ &= (0.45, 0.275, 0.275) . \end{aligned}$$

d) Die arbitragefreie Bewertung ergibt sich durch Diskontierung des risikoneutralen Erwartungswerts, d.h.

$$\begin{aligned} P &= (1.1)^{-1} [10(0.45) + 5(0.275) + 20(0.275)] \\ &= (1.1)^{-1} (11.375) = 10.34 . \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (20 Minuten)

a) Es seien $Z = \{Z_1,...,Z_T\}$ und $V = \{V_1,...,V_T\}$ zwei Zahlungsreihen mit zugehörigen Barwerten P_Z und P_V bzw. Macaulay-Durationen D_Z und D_V. Von Zahlungsreihe Z werden x Einheiten, von Zahlungsreihe V werden y Einheiten erworben. Setzen Sie voraus, dass für die Duration D_W der Zahlungsreihe $W = xZ + yV$ die folgende Beziehung gilt:

$$D_W = \frac{xP_Z D_Z + yP_V D_V}{xP_Z + yP_V}.$$

Ein Investor möchte einen Anlagebetrag von EUR 10000 bei einem derzeitigen Marktzins von 10% p.a. und flacher Zinsstruktur in festverzinsliche Wertpapiere investieren. Ihm stehen Einheitszerobonds mit einer Restlaufzeit von einem Jahr bzw. sieben Jahren zur Verfügung. Wie muss er sein Investitionsbudget aufteilen, damit sein Vermögen nach vier Jahren gegen mögliche Zinsänderungen, die sich unmittelbar nach Anlage realisieren, immunisiert ist? Wie viele absolute Einheiten der Zerobonds muss er hierfür erwerben? (Vernachlässigen Sie dabei Ganzzahligkeitsbedingungen.)

b) Berechnen Sie das Vermögen des Investors nach vier Jahren, wenn sich der Marktzins nach der Investition
(i) nicht ändert,
(ii) unmittelbar nach Anlage auf 8% absinkt und im Weiteren dort verbleibt,
(iii) unmittelbar nach Anlage auf 12% ansteigt und im Weiteren dort verbleibt.
(Sollten Sie Teilaufgabe a) nicht gelöst haben, gehen Sie von einer hälftigen Aufteilung des Investitionsbudgets aus.)

Lösungsskizze:

a) Investor erwirbt x Einheiten von Zerobond 1, sowie y Einheiten von Zerobond 2

Zielduration: $D_W = 4$

$D_Z = 1$, $D_V = 7$

$P_Z = (1+r)^{-1} = (1.1)^{-1}$

$P_V = (1+r)^{-7} = (1.1)^{-7}$

Bedingung 1: $I_0 = 10000 = x\,P_Z + y\,P_V$

Folgerung: $y\,P_V = I_0 - x\,P_Z$

Bedingung 2: (aus Teilaufgabe a)

$$4 = D_W = \frac{x\,D_Z P_Z + (I_0 - xP_Z)\,D_V}{I_0}$$

$$x = \frac{I_0(4 - D_V)}{P_Z(D_Z - D_V)} = \frac{1}{2} I_0 (1.1)$$

$$= 5000 \cdot (1.1) = 5500$$

$\Rightarrow$ Investor erwirbt 5500 Einheiten von Zerobond 1 mit <u>Investitionswert</u> in t = 0 von EUR 5000.- .

Analog: $y = \frac{I_0 - xP_Z}{P_V} = 5000\ (1.1)^7 = 9743.58$

$\Rightarrow$ Investor erwirbt 9743.58 Einheiten von Zerobond 2 mit Investitionswert t = 0 von EUR 5000.- .

<u>Fazit:</u> Es erfolgt eine <u>hälftige</u> Aufteilung des Investitionsbudgets.

b) i) $5000\ (1.1)^4 + 5000\ (1.1)^4 = 10000\ (1.1)^4 = \underline{14641.-}$.

ii) Entwicklung Zerobond 1: Rückzahlung zu 1 in t = 1, dann Wiederanlage über 3 Jahre zu 8 %, d.h. $(1.08)^3 = 1.2597$.

Entwicklung Zerobond 2: Wert in t = 4 entspricht abgezinstem Endwert unter 8%, d.h. $(1.08)^{-3} = 0.7938$

Wert in t = 4 <u>insgesamt</u> somit: $5500 \cdot 1.2597 + 9743.58 \cdot 0.7938$

$= \underline{14663.12}$.

iii) Analog: $5500\ (1.12)^3 + 9743.58\ (1.12)^{-3} = \underline{14662.53}$.

<u>Aufgabe 3:</u> (25 Minuten)

Betrachten Sie eine im Alter x sofort beginnende vorschüssige Leibrente der Höhe 1.

a) Stellen Sie den Leistungsbarwert dieser Leibrente als Funktion der gestutzten Lebensdauer dar!

b) Bestimmen Sie auf dieser Grundlage den Erwartungswert dieses Leistungsbarwerts! Verwenden Sie hierzu die Eintrittswahrscheinlichkeiten der gestutzten Lebensdauer!

c) Bestimmen Sie zudem die Varianz dieses Leistungsbarwerts!

d) Bestimmen Sie den Prämienbarwert (im Falle eines x-jährigen Versicherten und einer n-jährigen Vertragslaufzeit) als Funktion der gestutzten Lebensdauer. Gehen Sie dabei von vorschüssigen Prämienzahlungen der Höhe 1 aus.

e) Unter welchen Bedingungen an die Form der Rentenzahlung stimmen der Leistungsbarwert der Rente und der Prämienbarwert überein?

Hinweis : Eine Benutzung komplexer versicherungsmathematischer Symbole ist nicht erforderlich!

Lösungsskizze:

Es bezeichne $CT = CT_x$ die gestutzte Lebensdauer.

a) Für den Leistungsbarwert LBW der Leibrente gilt dann (d := 1/v)

$$\begin{aligned} LBW &= 1 + v + ... + v^{CT} \\ &= \frac{1}{d}(1 - v^{CT+1}) \end{aligned}$$

b) $$E(LBW) := \frac{1}{d}[1 - E(v^{CT+1})].$$

$$\begin{aligned} H(v) := E(v^{CT+1}) &= v\,E(v^{CT}) \\ &= v\sum_{t=0}^{\infty} v^t\, P(CT = t)\ , \end{aligned}$$

wobei $P(CT = t) = {}_tp_x\ q_{t+1}\ (= {}_{t|}q_x)$.

c) $$\begin{aligned} Var(LBW) &= \frac{1}{d^2}\,Var(v^{CT+1}) \\ &= \frac{1}{d^2}\,\{E[(v^{CT+1})^2] - E(v^{CT+1})^2\}\ . \end{aligned}$$

$E(v^{CT+1})$ wurde berechnet in Teilaufgabe b). Zu bestimmen ist daher noch $E[(v^{CT+1})^2] = E[(v^2)^{CT+1}]$. Die Funktion H(v) gemäß Teilaufgabe b) ist daher auszuwerten in v^2.

Insgesamt gilt damit

$$Var(LBW) = \frac{1}{d^2}[H(v^2) - H^2(v)].$$

d) Es gilt:

$$PBW = \begin{cases} 1 + v + ... + v^{CT} & CT = 0, 1, ..., n-1 \\ 1 + v + ... + v^{n-1} & CT = n, n+1, ... \end{cases}$$

bzw.

$$\mathrm{PBW} = \begin{cases} \frac{1}{d}\,(1 - v^{CT+1}) & CT = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \frac{1}{d}\,(1 - v^{n}) & CT = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

e) PBW und LBW stimmen überein, wenn die Rente nur n Perioden gezahlt wird, d.h. eine temporäre Rente vorliegt.

Aufgabe 4: (25 Minuten)

Gegeben sei eine DAX-gebundene Erlebensfallversicherung (d.h. eine Versicherungsleistung wird nur im Erlebensfall fällig) mit Zinsgarantie. Die Laufzeit dieser Versicherung betrage zwei Jahre.

Die Versicherung erfolgt gegen eine Einmalprämienzahlung in t = 0. Betriebskosten werden im Weiteren vernachlässigt.

Die Leistung im Erlebensfall beträgt mindestens N. Im Falle einer positiven DAX-Entwicklung umfasst die Erlebensfallleistung zusätzlich eine Partizipation von 100α% an der Zweijahres-DAX-Rendite.

a) Welches Leistungsprofil (für die Überlebenden) weist diese DAX-gebundene Versicherung in t = 2 auf?

b) Zerlegen Sie dieses Leistungsprofil in geeigneter Weise mit dem Ziel einer Explizierung der Optionskomponente.

c) Bestimmen Sie auf dieser Basis die zu zahlende Einmalprämie EP (DAX und Sterblichkeit werden dabei als unabhängig vorausgesetzt)!

d) Welchen Betrag nimmt diese Einmalprämie unter den folgenden Annahmen an:
   - i) N = 100 000, α = 0.6
   - ii) Der Versicherungsnehmer ist bei Vertragseintritt 50 Jahre alt, seine zweijährige Überlebenswahrscheinlichkeit beträgt 0.9858.
   - iii) Der DAX stehe bei Abschluss des Vertrages bei 5000. Der Marktpreis eines zweijährigen DAX-Calls mit Ausübungspreis 5000 beläuft sich auf 1000.
   - iv) Die Zweijahres-Spot Rate beträgt 4%.

Lösungsskizze:

a) $$\mathrm{VL}_2 = \max\left\{N, N\left[1+\alpha\left(\frac{\mathrm{DAX}(2)}{\mathrm{DAX}(0)}-1\right)\right]\right\}.$$

b) $$VL_2 = N + \max\left\{0, \alpha N \left(\frac{DAX(2) - DAX(0)}{DAX(0)}\right)\right\}$$
$$= N + \frac{\alpha N}{DAX(0)} \max\{DAX(2) - DAX(0), 0\}.$$

Die Max-Komponente entspricht einem zweijährigen DAX-Call mit Ausübungspreis in Höhe des anfänglichen DAX-Standes, d.h. X = DAX(0).

c) Es bezeichne C_0 die Prämie des Zweijahres DAX-Calls mit Ausübungspreis DAX(0), r_2 die Zweijahres-Spot Rate, x das Eintrittsalter des Versicherten und ${}_2p_x$ die zweijährige Überlebenswahrscheinlichkeit.

Der Marktwert VL_0 der Versicherungsleistung in t = 0 beträgt dann

$$VL_0 = N(1 + r_2)^{-2} + \frac{\alpha N}{DAX(0)} C_0 .$$

Da diese Versicherungsleistung nur an die Überlebenden gezahlt wird, gilt insgesamt für die Einmalprämie:

$$EP = {}_2p_x \cdot VL_0 = {}_2p_x \, N \left\{(1 + r_2)^{-2} + \frac{\alpha}{DAX(0)} C_0\right\}.$$

d) $$EP = 0.9858\ (100\ 000)\left\{(1.04)^{-2} + \frac{0.6}{5\ 000} 1\ 000\right\}$$
$$= 98\ 580\ (0.924556 + 0.12)$$
$$= 102\ 972.35.$$