Bericht zur Prüfung im Oktober 2006 über Grundprinzipien der Versicherungs- und Finanzmathematik (Grundwissen)

Peter Albrecht (Mannheim)

Am 06. Oktober 2006 wurde zum ersten Mal eine Prüfung im Fach Grundprinzipien der Versicherungs- und Finanzmathematik nach PO III (Grundwissen Teil A) durchgeführt. Es waren 45 Teilnehmerinnen und Teilnehmer zu verzeichnen.

Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der drei gleichgewichtete Aufgaben gestellt wurden, die sämtlich zu bearbeiten waren. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 45 von 90 möglichen Punkten erzielt werden.

Aufgabe 1:

Unterstellen Sie für den Basistitel einer Terminposition einen einperiodigen Binomialprozess mit Startwert $s_0 = 100$ und einer prozentualen Aufwärtsbewegung von 20% bzw. einer prozentualen Abwärtsbewegung von 10%. Der einperiodige Zinssatz für eine sichere Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme betrage 5%.

a) Weisen Sie nach, dass der Modellmarkt arbitragefrei ist!

b) Wie lautet die risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsbelegung?

c) Bestimmen Sie auf dieser Grundlage den arbitragefreien Preis einer einperiodigen Putoption auf die Aktie, die einen Ausübungspreis von X = 100 besitzt.

d) Bestimmen Sie alternativ den Wert der Putoption auf der Grundlage des Duplikationsprinzips.

e) Bestimmen Sie den Wert eines einperiodigen Forwards auf den Basistitel auf der Grundlage des Duplikationsprinzips.

f) Bestimmen Sie alternativ den Wert des Forwards auf der Grundlage eines geeigneten arbitragefreien Modellmarkts.

Lösungsskizze:

a) Zu betrachten ist das Gleichungssystem

$$V^T x = w,$$

wobei in diesem Falle

$$V = \begin{pmatrix} 1.05 & 120 \\ 1.05 & 90 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det(V^T) = \det(V) = 94.5 - 126 = -31.5 \neq 0$.

Das Gleichungssystem ist damit eindeutig lösbar.

Es bezeichne des Weiteren $w^* = (w_1, w_2)^T$ die Lösung des Gleichungssystems $V^T x = w$, d.h. es gilt

$$\begin{pmatrix} 1.05 & 1.05 \\ 120 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Nach der Cramerschen Regel folgt:

$$w_1^* = \frac{105 - 120}{-31.5} = \frac{15}{31.5}\left(= \frac{10}{21} = 0.4762 \right)$$

$$w_2^* = \frac{90 - 105}{-31.5} = \frac{15}{31.5}.$$

Es liegt eine eindeutige und strikt positive Lösung des Gleichungssystems vor. Damit ist der Modellmarkt arbitragefrei.

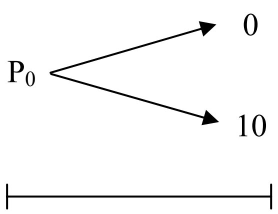
b) Die risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsbelegung ergibt sich aus $(q_1, q_2)^T = (1 + r_0)\, w^*$.

Mit $1 + r_0 = 1.05$ folgt:

$$q_1 = 1.05\, w_1^* = \frac{15.75}{31.5} = \frac{1}{2}$$

$$q_2 = 1.05\, w_2^* = \frac{15.75}{31.5} = \frac{1}{2}.$$

c) Für die Putoption gilt aus Sicht des Investors allgemein $P_1 = \max(X - S_1, 0)$, d.h. im vorliegenden Falle:



Es gilt $P_0 = (1.05)^{-1} E_Q(P_1)$, wobei

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt:

$$P_0 = \frac{1}{1.05}(0 \cdot \tfrac{1}{2} + 10 \cdot \tfrac{1}{2}) = \frac{5}{1.05} = 4.762\,.$$

d) Die Duplikationsbedingungen sowie die Law of One Price-Beziehung lauten:

(I) $120x + 1.05\,y = 0$

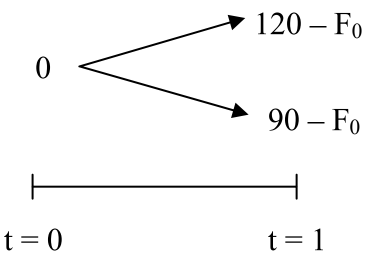
(II) $90x + 1.05\,y = 10$

(III) $100x + y = P_0$

Aus (I) – (II) folgt $x = -1/3$ und damit $y = 38.095$.

Aus (III) folgt hieraus $P_0 = 38.095 - 33.333 = 4.762$.

e) Für die Forwardposition gilt aus Sicht des Investors:



Dabei ist F_0 der zu bestimmende Forwardpreis. Erwirbt der Investor x Einheiten des Basistitels und y der sicheren Anlage, so gelten für die Duplikationsposition damit die folgenden Bedingungen:

$100x + y = 0$	(t = 0)
$120x + 1{,}05\,y = 120 - F_0$	(t = 1, Fall a)
$90x + 1{,}05\,y = 90 - F_0$	(t = 1, Fall b)

Aus (II) – (III) folgt $x = 1$ und damit $y = -100$. Aus (II) und (III) folgt damit jeweils $F_0 = 105$, d.h. der Forwardpreis entspricht dem zum sicheren Zins aufgezinsten heutigen Wert des Basistitels (Cost-of-Carry-Preis).

f) Zu betrachten ist der Modellmarkt mit Basistitel, sicherer Anlage und Forward. Die State Space-Matrix V lautet in diesem Fall

$$V = \begin{pmatrix} 1.05 & 120 & 120 - F_0 \\ 1.05 & 90 & 90 - F_0 \end{pmatrix}$$

und der Preisvektor

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Prüfung der Arbitragefreiheit ist wieder das Gleichungssystem

$$V^T x = w$$

zu betrachten, für dessen Lösung $(w_1^*, w_2^*)^T$

$$\begin{pmatrix} 1.05 & 1.05 \\ 120 & 90 \\ 120 - F_0 & 90 - F_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gelten muss, in Form von Einzelgleichungen somit

(I) $\quad 1.05(w_1^* + w_2^*) = 1$

(II) $\quad 120\,w_1^* + 90\,w_2^* = 100$

(III) $\quad (120 - F_0)\,w_1^* + (90 - F_0)\,w_2^* = 0$.

Die Bedingung (III) ist äquivalent zu

(IV) $\quad 120\,w_1^* + 90\,w_2^* = F_0\,(w_1^* + w_2^*)$.

Unter Beachtung von (I) und (II) resultiert hieraus

$$100 = F_0\,(1.05)^{-1}$$

und somit schließlich

$$F_0 = 100(1.05) = 105.$$

Aufgabe 2:

a) Ein Standardbond ist charakterisiert durch die Zahlungsreihe {Z, ..., Z, Z + N}, dabei bedeute N den Nennwert des Bonds und Z die Höhe der jeweiligen Zinszahlungen. Der Standardbond habe eine Laufzeit von T Jahren und einen anfänglichen Kaufkurs in Höhe von P_0.
Bestimmen Sie die Effektivverzinsung des Standardbonds bei Annahme der Wiederanlage der Rückflüsse zum Marktzins r_0.

b) Gegeben sei eine Anleihe mit 2 Perioden Restlaufzeit, einem Kupon von 6% und einem Nennwert von N = 100. Am Markt bestehe eine flache Zinsstrukturkurve mit einem Zinsniveau von 5%. Wie hoch ist der faire Kurs der Anleihe unter diesen Bedingungen? Wie verändert sich der faire Kurs der Anleihe approximativ, wenn das Zinsniveau auf 5.5% steigt? Verwenden Sie zur Approximation einerseits die (absolute) Duration alleine und andererseits (absolute) Duration und (absolute) Konvexität. Welche Höhe nimmt der korrekte faire Kurs der Anleihe unter der veränderten Zinsstruktur an? Interpretieren Sie die Ergebnisse.

c) Bestimmen Sie die Konvexität eines Zerobonds mit Rückzahlungsbetrag N und Laufzeit T.

Lösungsskizze:

a) Endwert der Rückflüsse unter r_0 ($q_0 := 1 + r_0$)

$$Z\sum_{t=1}^{T} q_0^{T-t} + N = Z\sum_{t=0}^{T-1} q_0^{t} + N$$
$$= Z\,\frac{q_0^T - 1}{q_0 - 1} + N$$

Bestimmungsgleichung für den Effektivzins r_{eff} :

$$P_0(1+r_{eff})^T = Z\,\frac{q_0^T - 1}{q_0 - 1} + \mathrm{N}$$

Folgerung:

$$r_{eff} = \left\{\frac{1}{P_0}\left[Z\,\frac{q_0^T - 1}{q_0 - 1} + N\right]\right\}^{\frac{1}{T}} -1 \quad .$$

b) Die Zahlungsreihe des Bonds ist gegeben durch $\{6,106\}$.

i) $\mathrm{P}(0{,}05) = 6(1.05)^{-1} + 106(1.05)^{-2}$
$= 5.7143 + 96.1451 = 101.8594$

ii) Korrekter neuer Kurs:

$$P(0{,}055) = 6(1.055)\text{-}1 + 106(1.055)^2$$
$$= 5.6872 + 95.2359 = 100.9231$$

iii) Approximation durch Duration:

$P(r + \Delta r) \approx P(r) - D_A(r)\Delta r$, wobei $\Delta r = 0.005$, $D_A(r) = -P'(r)$

$P(r) = 6(1 + r)^{-1} + 106(1 + r)^{-2}$

$P'(r) = -6(1 + r)^{-2} - 212(1 + r)^{-3}$

$D_A(0.05) = -P'(0.05) = 188.5757$

$\Rightarrow P(0.055) \approx P(0.05) - D_A(0.05) \cdot 0.005$

$= 101.8594 - 0.9429 = 100.9165$

iv) Approximation durch Duration und Konvexität:

$P(r + \Delta r) \approx P(r) - D_A(r)\Delta r + \frac{1}{2} C_A(r)(\Delta r)^2$, wobei $C_A(r) = P''(r)$

$P''(r) = 12(1 + r)^{-3} + 636(1 + r)^{-4}$

$C_A(0.05) = P''(0.05) = 533.60482$

$\Rightarrow P(0.055) \approx P(0.05) - D_A(0.05) \cdot 0.005 + \frac{1}{2} C_A(0.05) \cdot (0.005)^2$

$= 101.8594 - 0.9429 + 0.0067 = 100.9232.$

Folgerung (Vergleich mit wahrem Kurs): Deutliche Verbesserung der Approximationsqualität durch Verwendung von Duration *und* Konvexität.

c) Die Konvexität einer Zahlungsreihe $\{Z_1, \ldots, Z_T\}$ ist allgemein definiert durch

$$C(r) = \frac{P''(r)}{P(r)} = \frac{\sum_{t=1}^{T} t(t+1)\, Z_t (1+r)^{-t}}{(1+r)^2 \sum_{t=1}^{T} Z_t (1+r)^{-t}} \quad .$$

Im Falle des betrachteten Zerobonds gilt $Z_1 = \ldots Z_{T-1} = 0$ und $Z_T = N$. Damit reduziert sich der Ausdruck für die Konvexität auf

$$C(r) = \frac{T(T+1)\,N\,(1+r)^{-T}}{(1+r)^2\;N(1+r)^{-T}}\;.$$

Die Konvexität des Zerobonds ist somit gegeben durch

$$C(r) = T(T+1)\,(1+r)^{-2}\,.$$

Aufgabe 3:

a) Betrachten Sie die gestutzte Lebensdauer CT = CT_x eines x-Jährigen. Gehen Sie (auch im Weiteren) von einem unendlichen Wertebereich von CT aus. Bestimmen Sie (unter Rückgriff auf den Lebensprozess) P(CT = t).

b) Bestimmen Sie E(CT).

c) Stellen Sie für einen x-jährigen Versicherten den aktuariellen Prämienbarwert PBW einer n-periodigen vorschüssigen Prämienzahlung der Höhe 1 als Funktion der gestutzten Lebensdauer dar.

d) Bestimmen Sie auf dieser Grundlage den Erwartungswert von PBW.

e) Bestimmen Sie auf dieser Grundlage ebenfalls die Varianz von PBW.

Hinweis 1: Stellen Sie für Aufgabenteil e) den Prämienbarwert nach c) geeignet als Summe zweier Zufallsgrößen dar.

Hinweis 2: Eine Benutzung komplexer versicherungsmathematischer Symbole ist nicht erforderlich.

Lösungsskizze:

a) Es gilt

$$CT = CT_x = \min\{t \in IN_0;\; S_{x+t+1} = T,\text{ gegeben } S_x = L\}\,.$$

Damit:

$$\begin{aligned} P(CT = t) &= P(S_{x+t+1} = T,\; S_{x+t} = L\;,\dots,\; S_{x+1} = L \mid S_x = L) \\ &= {}_t p_x\, q_{x+t} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} E(CT) &= \sum_{t=0}^{\infty} t\,P(CT = t) = \sum_{t=0}^{\infty} t\;{}_t p_x\; q_{x+t} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} t\;{}_t p_x - \sum_{t=0}^{\infty} t\;{}_{t+1} p_x = \sum_{t=0}^{\infty}\;{}_t p_x. \end{aligned}$$

c) Es erfolgt eine Prämienauszahlung zu den Zeitpunkten x, x + 1, …, x + n – 1, jedoch nur, wenn der Versicherte diese Zeitpunkte erlebt. Im Falle CT = 0, 1, …, n – 1 gilt somit

$$\begin{aligned} PBW &= 1 + v + \ldots + v^{CT} = \frac{1 - v^{CT+1}}{1 - v} \\ &= \frac{1}{d}(1 - v^{CT+1}) \,. \end{aligned}$$

Im Falle CT = n, n + 1, … gilt

$$\begin{aligned} PBW &= 1 + v + \ldots + v^{n-1} = \frac{1 - v^{n}}{1 - v} \\ &= \frac{1}{d}(1 - v^{n}) \,. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt somit

$$PBW = \begin{cases} \frac{1}{d}(1 - v^{CT+1}) & \textit{für} \quad CT = 0,1,\ldots,n-1 \\[2ex] \frac{1}{d}(1 - v^{n}) & \textit{für} \quad CT = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

d) Es gilt damit

$$\begin{aligned} E(PBW) &= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{d}(1 - v^{t+1}) P(CT = t) + \sum_{t=n}^{\infty} \frac{1}{d}(1 - v^{n}) P(CT = t) \\ &= \frac{1}{d}\sum_{t=0}^{\infty} P(CT = t) - \frac{1}{d}\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} P(CT = t) - \frac{1}{d} v^{n} \sum_{t=n}^{\infty} P(CT = t) \\ &= \frac{1}{d}\left[1 - \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} P(CT = t) - v^{n} P(CT \geq n)\right] \\ &= \frac{1}{d}\left[1 - \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} P(CT = t) - v^{n} \, {}_{n}p_{x}\right]. \end{aligned}$$

e) Definiere die Zufallsgrößen X und Y durch

$$X = \begin{cases} \frac{1}{d}(1 - v^{CT+1}) & \textit{für} \quad CT = 0,1,\ldots,n-1 \\ 0 & \textit{für} \quad CT = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

sowie

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad CT = 0,1,\dots,n-1 \\ \frac{1}{d}(1-v^n) & \text{für} \quad CT = n, n+1,\dots \end{cases}$$

Offenbar ist PBW = X + Y, damit gilt:

$$\begin{aligned} Var(PBW) &= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) \\ &= E(X^2) - E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2 + 2E(XY) - 2E(X)E(Y) \\ &= E(X^2) + E(Y^2) - 2E(XY) - [E(X) + E(Y)]^2 . \end{aligned}$$

Die Größen E(X) und E(Y) wurden in Aufgabenteil b) berechnet. Offenbar gilt ferner XY = 0 und damit E(XY) = 0. Es verbleibt damit die Bestimmung von $E(X^2)$ und $E(Y^2)$.

Es gilt zunächst

$$X^2 = \begin{cases} (1-v^{CT+1})^2 / d^2 & \text{für} \quad CT = 0,1,\dots,n-1 \\ 0 & \text{für} \quad CT = n, n+1,\dots \end{cases}$$

$$Y^2 = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad CT = 0,1,\dots,n-1 \\ (1-v^n)^2 / d^2 & \text{für} \quad CT = n, n+1,\dots \end{cases}$$

und damit

$$E(X^2) = \frac{1}{d^2} \sum_{t=0}^{n-1} (1-v^{t+1}) P(CT = t)$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \frac{1}{d^2}(1-v^n)^2 \sum_{t=n}^{\infty} P(CT = t) = \frac{1}{d^2}(1-v^n)^2 \, P(CT \geq n) \\ &= \frac{1}{d^2}(1-v^n)^2 \; {}_n p_x \; . \end{aligned}$$