Prüfung Grundprinzipien der Versicherungs- und Finanzmathematik 2018

<u>Aufgabe 1:</u> (20 min)

a) Gegeben sei ein einperiodiger State Space-Markt bestehend aus einer risikolosen Anlage zum sicheren Zins r und einer "Binomialaktie" mit Wert s in t = 0 sowie Werten us bzw. ds $(0 < d < u)$ in t = 1.

i) Bestimmen Sie die State Space-Matrix V und den anfänglichen Preisvektor w dieses Markts! (1 min)

ii) Bestimmen Sie den Wertebereich von r, für den die Arbitragefreiheit des Markts gewährleistet ist! (6 min)

iii) Wie lauten in diesem Falle die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten? (1 min)

iv) Betrachten Sie einen Forward auf die Binomialaktie und bestimmen Sie den arbitragefreien Schlussabrechnungspreis F_0 dieses Forward durch Analyse eines geeigneten State Space-Markts! (6 min)

b) Formulieren Sie für einen endlichen State Space-Markt die Eigenschaft der starken Arbitragefreiheit sowie die Eigenschaft des Law of One Price. Weisen Sie nach, dass aus der starken Arbitragefreiheit das Law of One Price folgt. (6 min)

<u>Lösungshinweise:</u>

Aufgabenteil a):

i) State Space-Matrix

$$V = \begin{pmatrix} 1+r & us \\ 1+r & ds \end{pmatrix}$$

Preisvektor

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$$

ii) Zu untersuchen ist das Gleichungssystem $V^T w^* = w$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1+r & 1+r \\ us & ds \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} .$$

Es gilt zunächst

$$|V| = (1+r)\, s\,(d-u) \neq 0\,,$$

da nach Voraussetzung $u > d$. Das Gleichungssystem ist somit eindeutig lösbar.

Cramersche Regel:

$$w_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+r \\ s & ds \end{vmatrix}}{|V|} = \frac{s\left[d-(1+r)\right]}{(1+r)s(d-u)} = \frac{1+r-d}{(1+r)(u-d)}$$

$$w_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 1+r & 1 \\ us & s \end{vmatrix}}{|V|} = \frac{s\left[(1+r)-u\right]}{(1+r)s(d-u)} = \frac{u-(1+r)}{(1+r)(u-d)}$$

Für die Arbitragefreiheit des Marktes muss $w_1^* > 0$ sowie $w_2^* > 0$ gewährleistet sein. Da $(1+r)(u-d) > 0$ reduziert sich dies auf die Forderungen $(1+r)-d > 0$ bzw. $u-(1+r) > 0$ und damit insgesamt auf

$$d < 1+r < u$$

iii) Es gilt $q_1 = (1+r)\,w_1^*$ und $q_2 = (1+r)\,w_2^*$ und damit

$$q_1 = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad q_2 = \frac{u-(1+r)}{u-d}$$

iv) Betrachte den State Space-Markt bestehend aus sicherer Anlage, Aktie und Forward. Die State Space-Matrix V ist dann gegeben durch

$$V = \begin{pmatrix} 1+r & us & us-w \\ 1+r & ds & ds-w \end{pmatrix}$$

und der Preisvektor durch $w = (1, s, 0)^T$. Der Markt ist arbitragefrei, wenn das Gleichungssystem

$$V^T x = w$$

eine strikt positive Lösung besitzt.
Konkret lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1+r & 1+r \\ us & ds \\ us-w & ds-w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Einzelgleichungen lauten somit:

(1) $(1+r)(x_1+x_2)=1$
(2) $usx_1+dsx_2=s$
(3) $usx_1+dsx_2=w(x_1+x_2)$

Aus (3) in Verbindung mit (1) und (2) folgt dann

$$w=\frac{usx_1+dsx_2}{x_1+x_2}=(1+r)s\,.$$

Aufgabenteil b):

Gegeben sei ein Portfoliovektor x. Es bezeichnen V(x) den Vektor der zufallsabhängigen Rückflüsse des Portfolios x in t = 1 und w(x) den Preis des Portfolios x in t = 0.

Starke Arbitragefreiheit:

(1) $V(x)\geq 0$ und $V(x)\neq 0 \Rightarrow w(x)>0$
(2) $V(x)=0\Rightarrow w(x)=0$

Law of One Price (LOP)

$V(x_1)=V(x_2)\Rightarrow w(x_1)=w(x_2)$

Beweis von LOP erfolgt auf Basis der zweiten Teilbedingung für die starke Arbitragefreiheit:

$V(x_1)=V(x_2)\Rightarrow V(x_1-x_2)=0\Rightarrow w(x_1-x_2)=0$
$\Rightarrow w(x_1)=w(x_2)\,.$

<u>Aufgabe 2:</u> (17 min)

a) Gegeben seien zwei Standardbonds A und B mit korrespondierenden Kursen P_A und P_B in t = 0, Nennwerten N_A und N_B, Nominalzinsen i_A und i_B sowie Restlaufzeiten $T_A = 2$ und $T_B = 3$. Gehen Sie ferner davon aus, dass die einjährige Spot Rate r_1 bereits bekannt ist.

i) Wie lauten die Zahlungsströme der Bonds A und B? (1 min)

ii) Bestimmen Sie die zugehörige Diskontstruktur (Kurse der Einheitszerobonds) $\{b_1, b_2, b_3\}$ sowie die (restliche) Zinsstruktur (Spot Rates) $\{r_2, r_3\}$! (6 min)

b) Weisen Sie die folgende Eigenschaft der (Macaulay-)Duration nach

$$D_\tau(r) = D(r) - \tau\ ,$$

d.h. die Duration verkürzt sich um den Betrag der verstrichenen Laufzeit. (4 min)

<u>Hinweis:</u> $P_\tau(r) = (1+r)^\tau P_0(r)$.

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion $K_s(r) = (1+r)^s P_0(r)$ im Zeitpunkt $s = D(r)$ einen Extremwert aufweist. Dabei bezeichne $P_0(r)$ den Barwert eines Festzinstitels. (4 min)

d) Welcher allgemeine Zusammenhang besteht zwischen der t-jährigen Spot Rate zum Zeitpunkt 0 und den einperiodigen Forwardrates (implizite Terminzinssätze)? (1 min)

e) Welcher allgemeine Zusammenhang besteht zwischen der t-jährigen Spot Rate zum Zeitpunkt 0 und dem Preis eines Einheitszerobonds mit Laufzeit t? (1 min)

Lösungshinweise:

a) Der Zahlungsstrom von Bond A lautet $\{-P_A, N_A \cdot i_A, N_A \cdot i_A + N_A\}$, der Zahlungsstrom von Bond B lautet $\{-P_B, N_B \cdot i_B, N_B \cdot i_B, N_B \cdot i_B + N_B\}$.
Der Kurs b_1 eines Einheitszerobonds mit einer Laufzeit von einem Jahr bei bekannter Spot Rate ist gegeben durch

(I) $b_1 = (1+r_1)^{-1}$.

Ferner gilt

(II) $P_A = N_A \cdot i_A \cdot b_1 + (N_A \cdot i_A + N_A) \cdot b_2$

(III) $P_B = N_B \cdot i_B \cdot b_1 + N_B \cdot i_B \cdot b_2 + (N_B \cdot i_B + N_B) b_3$.

Da b_1 gemäß (I) bekannt ist, folgt aus (II)

$$b_2 = \frac{P_A - N_A \cdot i_A \cdot b_1}{N_A \cdot i_A + N} = \frac{P_A - N_A \cdot i_A \cdot b_1}{N_A (1+i_A)}$$

und damit aus (III)

$$b_3 = \frac{P_B - N_B \cdot i_B (b_1 + b_2)}{N_B \cdot i_B + N_B} = \frac{P_B - N_B \cdot i_B (b_1 + b_2)}{N_B (1+i_B)} \ .$$

Hieraus folgt schließlich für die restlichen Spot Rates

$$r_2 = \sqrt{\frac{1}{b_2}} - 1$$

sowie

$$r_3 = \sqrt{\frac{1}{b_3}} - 1 \ .$$

b) Zunächst gilt (Produktregel)

$$P'_\tau(r) = \tau(1+r)^{\tau-1} P_0(r) + (1+r)^\tau P'_0(r)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} D_\tau(r) &= -\frac{(1+r)P'_\tau(r)}{P_\tau(r)} \\ &= \frac{-\tau(1+r)^\tau P_0(r) - (1+r)^{\tau+1} P'_0(r)}{(1+r)^\tau P_0(r)} \\ &= -\tau - (1+r)\frac{P'_0(r)}{P_0(r)} \\ &= D(r) - \tau \ . \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} K'_s(r) &= s(1+r)^{s-1} P(r) + (1+r)^s P'(r) \\ &= H(r)\left[s + (1+r)\frac{P'(r)}{P(r)}\right] \\ &= H(r)[s - D(r)] \end{aligned}$$

Da H(r) > 0 gilt $K'_s(r) = 0$ genau dann, wenn s = D(r).

<u>Alternativ:</u> $K'_s(r) = 0$ genau dann, wenn $sP(r) = (1+r)P'(r)$ und damit s = D(r).

d) Es gilt

$$[1+r(0,t)]^t = [1+f_1(0)] \cdot \ldots [1+f_t(0)],$$

wobei $r(0,t)$ die betreffende Spot Rate und $f_j(0)$, j = 1, …, t, die betreffenden Forward Rates bezeichnen.

<u>Alternativ:</u>

$$1 + f_t(0) = \frac{[1+r_0(t)]^t}{[1+r_0(t-1)]^{t-1}}$$

e) Es gilt

$$b(0,t) = \left[1 + r(0,t)\right]^{-t},$$

bzw.

$$r(0,t) = \left[1/b(0,t)\right]^{1/t} - 1,$$

wobei $r(0,t)$ die betreffende Spot Rate und $b(0,t)$ den Preis des betreffenden Einheitszerobonds bezeichnen.

Aufgabe 3: (10 Minuten)

Aktuar Z erwartet zu den Zeitpunkten $t = 1{,}2$ und 3 Zahlungsverpflichtungen in Höhe von $L_1 = 50$ Mio., $L_2 = 60$ Mio. und $L_3 = 70$ Mio. Am Markt werden die folgenden Standardbonds gehandelt (die Kurse beziehen sich jeweils auf einen Nennwert von 100).

	Kurs	Restlaufzeit	Nominalzins	Yield to Maturity
Bond 1	108,00	1	10,00%	1,85%
Bond 2	105,00	2	5,00%	2,41%
Bond 3	100,00	3	2,00%	2,00%

i) Bestimmen Sie, ausgehend von den drei Standardbonds, die Spot Rates $\{r_1, r_2, r_3\}$ für Zerobonds mit den Laufzeiten 1, 2 und 3 Jahre. (3 min)

ii) Bestimmen Sie die Stückzahlen $\{N_1, N_2, N_3\}$ eines Portfolios P aus den drei Standardbonds so, dass die Zahlungsverpflichtungen exakt gedeckt sind! Welches ist der Wert des Portfolios P ? (Vernachlässigen Sie dabei wiederum Ganzzahligkeitsüberlegungen!) (7 min)

Lösungshinweise:

i) Die Spot Rate r_1 kann direkt aus der Tabelle abgelesen werden, es gilt: $r_1 = 0.0185$.

Weiter gilt

$$P_2 = 105 = 5(1.0185)^{-1} + 105(1 + r_2)^{-2}$$

Hieraus resultiert: $r_2 = 0.0242$.
Ferner gilt

$$P_3 = 100 = 2(1.0185)^{-1} + 2(1.0242)^{-2} + 102(1 + r_3)^{-3}.$$

Hieraus resultiert: $r_3 = 0.0199$.
Die Spot Rates belaufen sich somit auf $\{1.85\%, 2.42\%, 1.99\%\}$.
ii) Zunächst ist N_3 auf Basis von Bond 3 zu bestimmen. Es muss gelten:

$$102\ N_3 = 70 \text{ Mio.}$$

Hieraus resultiert $N_3 = 686\,274.51$.
Weiter gilt:

$$105\ N_2 + 2\ N_3 = 60 \text{ Mio.}$$

Hieraus resultiert: $N_2 = 558\,356.68$.
Schließlich gilt

$$110\ N_1 + 5\ N_2 + 2\ N_3 = 50 \text{ Mio.}$$

Hieraus resultiert: $N_1 = 416\,687.89$.
Der Wert des Portfolios beläuft sich damit auf

$$\begin{aligned} P &= 108\ N_1 + 105\ N_2 + 100\ N_3 \\ &= 172.2572 \text{ Mio.} \end{aligned}$$

<u>Aufgabe 4:</u> (18 min)

Gehen Sie aus von der gestutzten Lebensdauer $CT = CT_x$ einer x-jährigen Person!

a) Fassen Sie den (stochastischen) Leistungsbarwert der Kapitallebensversicherung als Summe der (stochastischen) Leistungsbarwerte der Risikolebensversicherung sowie der Erlebensfallversicherung auf.

  i) Bestimmen Sie auf dieser Grundlage den Leistungsbarwert einer n-jährigen Kapitallebensversicherung in Termen von CT! (5 min)

  ii) Bestimmen Sie auf dieser Grundlage ferner die Varianz des Leistungsbarwerts der Kapitallebensversicherung in Abhängigkeit der Leistungsbarwerte der Risikolebensversicherung sowie der Erlebensfallversicherung. Interpretieren Sie das Ergebnis! (3 min)

b) Bestimmen Sie den Prämienbarwert einer vorschüssigen laufenden Prämienzahlung eines n-jährigen Versicherungskontrakts in Termen von CT! Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Prämienbarwert und dem Leistungsbarwert einer Kapitallebensversicherung nach a i)? (4 min)

<u>Hinweis:</u> Setzen Sie dabei die Kenntnis der stochastischen geometrischen Summe voraus!

c) i) Charakterisieren Sie die Leistungsseite einer Risikolebensversicherung mit einer Vertragslaufzeit der Länge n und einer arithmetisch fallenden Versicherungssumme in Termen der gestutzten Lebensdauer CT. Die im Zeitpunkt x + 1 (potentiell) zu zahlende Leistung beträgt 1. Diese Leistung vermindert sich pro Folgeperiode um den Betrag 1/n. (4 min)

  ii) Bestimmen Sie auf dieser Grundlage den (stochastischen) Leistungsbarwert dieser Versicherung! (2 min)

<u>Lösungshinweise:</u>

a)

i) Für den Leistungsbarwert LBW_{EF} einer n-jährigen Erlebensfallversicherung gilt:

$$LBW_{EF} = v^n \cdot I\,(CT \geq n) = \begin{cases} 0 & CT = 0, \ldots, n-1 \\ v^n & CT = n,\ n+1, \ldots \end{cases}$$

Für den Leistungsbarwert LBW_{RL} einer n-jährigen Risikolebensversicherung gilt:

$$LBW_{RL} = v^{CT+1} \cdot I\,(CT \leq n-1) = \begin{cases} v^{CT+1} & CT = 0,\ 1, \ldots,\ n-1 \\ 0 & CT = n,\ \ n+1,\ \ldots \end{cases}$$

Für den Leistungsbarwert LBW_{KL} einer n-jährigen Kapitallebensversicherung gilt damit:

$$\begin{aligned} LBW_{KL} &= LBW_{EF} + LBW_{RL} \\ &= \begin{cases} v^{CT+1} & CT = 0, 1, \ldots,\ n-1 \\ v^n & CT = n,\ n+1, \ldots \end{cases} \end{aligned}$$

ii) Für die Varianz erhalten wir zunächst:

$$\begin{aligned} Var(LBW_{KL}) &= Var(LBW_{RL} + LBW_{EF}) \\ &= Var(LBW_{RL}) + Var(LBW_{EF}) + 2Cov(LBW_{RL}, LBW_{EF}) \\ &= Var(LBW_{RL}) + Var(LBW_{EF}) \\ &\quad + 2\left[E\,(LBW_{RL} \cdot LBW_{EF}) - E(LBW_{RL})\,E(LBW_{EF})\right]. \end{aligned}$$

Offenbar gilt aber:

$LBW_{RL} \cdot LBW_{EF} \equiv 0$ und damit $E\,(LBW_{RL} \cdot LBW_{EF}) = 0$.

Insgesamt erhalten wir damit:

$$Var\,(LBW_{KL}) = Var\,(LBW_{RL}) + Var\,(LBW_{EF}) - 2E\,(LBW_{RL})\,E\,(LBW_{EF}).$$

b) Für den Prämienbarwert PBW gilt mit d = 1 – v:

$$\text{PBW} = \begin{cases} 1 + v + v^2 + \ldots + v^{CT} & CT = 0, 1, \ldots, n-1 \\ 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} & CT = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{d}(1 - v^{CT+1}) & CT = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \frac{1}{d}(1 - v^n) & CT = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

Offenbar gilt:

$$\text{PBW} = \frac{1}{d}(1 - \text{LBW}_{KL}) .$$

c) i) Zum Zeitpunkt $x + t$ $(t \le n)$ erfolgt eine Zahlung der Höhe

$$1 - \frac{t-1}{n} = \frac{n-t+1}{n} .$$

Der Barwert dieser Zahlung beträgt

$$\left(1 - \frac{t-1}{n}\right) v^t .$$

ii) Damit gilt

$$\text{LBW}_{DRL} = \begin{cases} \left(1 - \frac{CT}{n}\right) v^{CT+1} & CT = 0, \ldots, n-1 \\ 0 & CT \ge n \end{cases}$$

$$= \left(1 - \frac{CT}{n}\right) v^{CT+1}\, I_{\{CT<n\}}$$

<u>Aufgabe 5:</u> (25 Minuten)

Ein 55-jähriger Versicherungsnehmer schließe eine DAX-gebundene Lebensversicherung auf den Erlebensfall mit einer Laufzeit von einem Jahr ab. Eine Todesfallleistung wird nicht fällig bzw. wird in der Analyse ausgeblendet, ebenso bleiben Betriebskosten außen vor.

a) Die Versicherungsleistung bei Erleben betrage mindestens 104% bezogen auf einen Betrag von EUR 18 000. Im Falle einer **negativen** DAX-Entwicklung betrage - <u>wenn</u> die Mindestversicherungsleistung hierdurch überschritten wird - die Rückzahlung EUR 18 000 zuzüglich einer Partizipation in Höhe von 40% der einjährigen (negativen) DAX-Rendite bezogen auf einen investierten Betrag von EUR 18 000. Bestimmen Sie das Rückzahlungsprofil des Produkts zum Zeitpunkt t = 1! (3 min)

b) Gegeben sei nun ein einperiodiges Binomialmodell für die DAX-Entwicklung. Der Startwert des DAX betrage DAX(0) = 6 000. Am Ende der Periode ist der DAX entweder um 40% gestiegen oder um 25% gefallen. Der risikolose Zins betrage 5%. Bestimmen Sie die Einmalprämie der DAX-gebundenen Lebensversicherung gemäß Teilaufgabe a) durch **direkte Duplikation des Rückzahlungsprofils**! (10 min)

c) Zerlegen Sie nun das Rückzahlungsprofil gemäß Aufgabenteil a) unter Zugrundelegung des Binomialmodells gemäß Aufgabenteil b) so, dass die **eingebettete Option** expliziert wird. Welche Modalitäten weist diese Option auf? Welchen fairen Wert besitzt diese Option? (12 min)

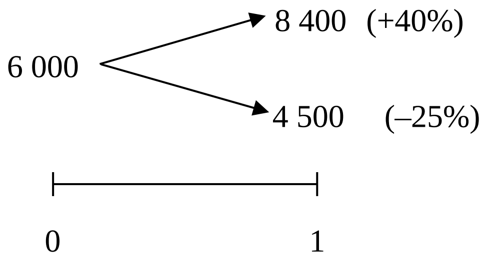
<u>Lösungshinweise:</u>

a)
$$L_1 = \max\{18000\,(1.04),\, 18000 - 18000\,(0.4)\,R_{DAX}\}$$
$$= \max\{18720,\, 18000(1 - 0.4\,R_{DAX})\},$$

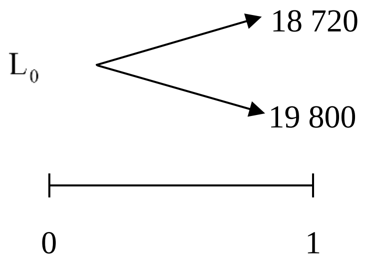
wobei

$$R_{DAX} = \frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)} \; .$$

b) DAX-Entwicklung:



Wenn der DAX steigt, so beträgt die Rückzahlung 18 720. Wenn der DAX fällt, beträgt die Rückzahlung 18 000 (1 + 0.4(0.25)) = 18 000 (1.1) = 19 800.



Duplikation in t = 1:

(I) $8\,400\, x + 1.05\, y = 18\,720$
(II) $4\,500\, x + 1.05\, y = 19\,800.$

Aus (I) – (II) folgt $3\,900\, x = -\,1\,080$ und damit $x = -\,0.276923$.

Aus (I) folgt dann

$$y = [18\,720 + 8\,400\,(0.276923)]\,(1.05)^{-1} = 20\,043.96\,.$$

Wert des Duplikationsportfolios in t = 0:

$$\begin{aligned} 6\,000\, x + y &= -\,6\,000\,(0.276923) + 20\,043.96 \\ &= 20\,043.96 - 1\,661.54 = 18\,382.42\,. \end{aligned}$$

Die Einmalprämie beträgt damit

$$EP = 18\,382.42 \cdot p_{55}\,.$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} L_1 &= \max\left\{18\,720,\ 18\,000 - \frac{18\,000\,(0.4)}{\mathrm{DAX}(0)}\left[\mathrm{DAX}(1) - \mathrm{DAX}(0)\right]\right\} \\ &= 18\,720 + \max\left\{-\,720 + 1.2\ \left[\mathrm{DAX}(0) - \mathrm{DAX}(1)\right], 0\right\} \\ &= 18\,720 + 1.2\,\max\left\{\mathrm{DAX}(0) - \mathrm{DAX}(1) - \frac{720}{1.2}, 0\right\} \\ &= 18\,720 + 1.2\,\max\left\{6\,000 - \mathrm{DAX}(1) - 600, 0\right\} \\ &= 18\,720 + 1.2\,\max\left\{5\,400 - \mathrm{DAX}(1), 0\right\} \end{aligned}$$

Eingebettet ist ein einjähriger DAX-Put mit einem Ausübungspreis von EUR 5 400.

Faire Bewertung:

i) Es muss gemäß b) gelten

$18\,382.42 = 18\,720\,(1.05)^{-1} + 1.2\, P_{DAX}\,(5\,400).$

Hieraus folgt

$$P_{DAX}(5\,400) = \frac{18\,382.42 - 17\,828.57}{1.2} = 461.54\ .$$

ii) Alternativ über Duplikation des Puts. Das Rückzahlungsprofil des DAX-Put lautet: $(0, 900)^T$.