Prüfung Grundprinzipien der Versicherungs- und Finanzmathematik 2017

<u>Aufgabe 1:</u> (25 Minuten)

a) Gegeben sei ein einperiodiger State Space-Markt mit drei Zuständen, der aus drei Wertpapieren bestehe, einer sicheren Anlage zu 10% sowie zwei risikobehafteten Wertpapieren. Wertpapier 1 weist dabei einen anfänglichen Preis von 20.5 und den Rückflussvektor $(22,22,24)^T$ auf, Wertpapier 2 einen anfänglichen Preis von 9.5 und den Rückflussvektor $(11,9,11)^T$.

i) Bestimmen Sie die zugehörige State Space-Matrix V und den anfänglichen Preisvektor w!

ii) Weisen Sie nach, dass der vorstehend spezifizierte State Space-Markt arbitragefrei ist! Wie lautet der preiserzeugende Vektor?

iii) Bestimmen Sie die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten!

iv) Bestimmen Sie den arbitragefreien Preis eines Finanztitels mit dem Rückflussvektor $(40,20,80)^T$!

(8 min)

b) Formulieren Sie für einen endlichen State Space-Markt die Eigenschaft der starken Arbitragefreiheit sowie die Eigenschaft des Law of One Price. Weisen Sie nach, dass aus der starken Arbitragefreiheit das Law of One Price folgt.

(6 min)

c) Betrachten Sie einen einperiodigen State Space-Markt mit s Zuständen und n+1 Finanztiteln. Der Finanztitel 0 entspreche dabei der risikolosen Anlage zum sicheren Zins r. Der preiserzeugende Vektor $w^* = (w_1^*, \ldots, w_s^*)^T$ des State Space-Markts existiere und sei strikt positiv, d.h. der Markt ist arbitragefrei.

i) Wie ist die Vollständigkeit dieses Markts definiert? Unter welcher Bedingung an die State Space-Matrix V ist der Markt vollständig?

ii) Begründen Sie, warum bei einem vollständigen arbitragefreien Markt gemäß i) die arbitragefreien Preise eindeutig sind.

iii) Wie wird in diesem Markt der Vektor q der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten definiert?

iv) Betrachten Sie nun allgemein ein Portfolio x mit anfänglichem Preis w(x), Rückflussvektor v(x) bzw. korrespondierendem Vermögensendwert V_x. Leiten Sie die Beziehung zwischen w(x) und v(x) unter Verwendung der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten gemäß iii) her. Welche strukturelle Beziehung impliziert dies in Termen von V_x?

(11 min)

<u>Lösungsskizze:</u>

Aufgabenteil a)

i) $V = \begin{pmatrix} 1.1 & 22 & 11 \\ 1.1 & 22 & 9 \\ 1.1 & 24 & 11 \end{pmatrix}$

$w = (1,\ 20.5, 9.5)^T$

ii) Zu überprüfen ist, ob das Gleichungssystem

$V^T x = w$,

wobei $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, eine strikt positive Lösung besitzt.

Dies führt auf das folgende Lineare Gleichungssystem (dabei multiplizieren wir die erste Zeile mit 20 und die dritte mit 2)

(I) $22\, x_1 + 22\, x_2 + 22 x_3 = 20$

(II) $22\, x_1 + 22\, x_2 + 24\, x_3 = 20.5$

(III) $22\, x_1 + 18\, x_2 + 22\, x_3 = 19$.

Aus (II) – (I) folgt $x_3 = 0.25$ und aus (I) – (III) folgt $x_2 = 0.25$. Aus (I) folgt dann $x_1 = 9/22 = 0.4091$.

Das Gleichungssystem besitzt damit eine strikt positive Lösung, der State Space-Markt ist somit arbitragefrei.

Der preiserzeugende Vektor lautet $(9/22, 0.25, 0.25)^T$.

iii) Der risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsvektor q ergibt sich zu:

$$q = 1.1(9/22, 0.25, 0.25)^T$$
$$= (0.45, 0.275, 0.275)^T \ .$$

iv) Die arbitragefreie Bewertung ergibt sich durch Diskontierung des risikoneutralen Erwartungswerts, d.h.

$$P = (1.1)^{-1}[40\,(0.45) + 20\,(0.275) + 80\,(0.275)]$$
$$= (1.1)^{-1}\,(45.50) = 41.36 \ .$$

b) Gegeben sei ein Portfoliovektor x. Es bezeichnen V(x) den Vektor der zufallsabhängigen Rückflüsse des Portfolios x in t = 1 und w(x) den Preis des Portfolios x in t = 0.

Starke Arbitragefreiheit:
(1) $V(x) \geq 0$ und $V(x) \neq 0 \Rightarrow w(x) > 0$
(2) $V(x) = 0 \Rightarrow w(x) = 0$

Law of One Price (LOP)
$V(x_1) = V(x_2) \Rightarrow w(x_1) = w(x_2)$

Beweis von LOP erfolgt auf Basis der zweiten Teilbedingung für die starke Arbitrage-freiheit.
$V(x_1) = V(x_2) \Rightarrow V(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow w(x_1 - x_2) = 0$
$\Rightarrow w(x_1) = w(x_2)$.

Aufgabenteil c)

i) Der Markt ist vollständig, wenn jeder Finanztitel repräsentiert durch einen Vektor des $\mathbb{R}^s$ als Linearkombination der Rückflussvektoren der Basis-Finanztitel, d.h. der Spalten der State Space Matrix V dargestellt werden kann.

Der Markt ist vollständig, wenn $rg(V) = s$ (voller Zeilenrang), da Zeilenrang gleich Spaltenrang.

ii) Der Markt ist arbitragefrei, wenn das LGS $V^T x = w$ eine (strikt positive) Lösung besitzt. Das LGS ist lösbar, wenn $rg(V^T) = rg(V^T, w)$ und eindeutig lösbar, wenn $rg(V^T) = s$. Gemäß i) sind damit Vollständigkeit und Eindeutigkeit des Preissystems äquivalent.

iii) $q \coloneqq (1 + r)w^*$

iv) Bei Annahme der Arbitragefreiheit gilt $V^T w^* = w$. Aus $v(x) = Vx$ folgt $w(x) = w^T x = w^{*T} V x = \frac{1}{1+r} q^T v(x)$.
Der Ausdruck $q^T v(x)$ entspricht dem Erwartungswert von V_x unter der Wahrscheinlichkeitsbelegung q. Bezeichnet man das durch q induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß mit Q, so gilt auf der strukturellen Ebene:

$$\pi(V_x) = \frac{1}{1 + r} E_Q(V_x),$$

d.h. der arbitragefreie Preis des Vermögensendwerts V_x entspricht dem zum sicheren Zins diskontierten Erwartungswert von V_x unter Q.

Aufgabe 2: (23 Minuten)

a) Es seien $Z = \{Z_1,...,Z_T\}$ und $V = \{V_1,...,V_T\}$ zwei Zahlungsreihen mit zugehörigen Barwerten P_Z und P_V bzw. Macaulay-Durationen D_Z und D_V. Weisen Sie nach, dass für die Duration D_W der Zahlungsreihe $W = Z + V$ gilt

$$D_W = x_Z D_Z + x_V D_V,$$

wobei $x_Z = P_Z/P$, $x_V = P_V/P$ sowie $P = P_Z + P_V$.

(3 min)

b) Bezeichne T einen vorgegebenen Absicherungshorizont. Gegeben seien zwei Bonds A und B (mit genügend hohen Nennwerten) mit Durationen $D_A > T$ und $D_B < T$. Welchen Anteil x besitzt Bond A im durationsimmunisierenden Portfolio ?

(4 min)

c) Wir gehen aus von einem fristigkeitsunabhängigen Marktzins r und betrachten marktkonforme Kuponbonds (d.h., der Nominalzins i des Bonds entspricht jeweils dem Marktzins) unterschiedlicher Laufzeiten n.

Die Duration eines solchen marktkonformen Kuponbonds mit Laufzeit n beträgt

$$D(i) = \frac{1+i}{i}\,[1-(1+i)^{-n}].$$

Gegeben sei nun ein Zeitpunkt T.

i) Welchen Wert nimmt ein in t = 0 zum Marktzins investiertes Vermögen N zum Zeitpunkt T an?

ii) Immunisieren Sie den Wert dieses Endvermögens in T durch eine geeignete Investition in marktkonforme Kuponbonds! Wie lautet die Immunisierungsstrategie? (Vernachlässigen Sie dabei Ganzzahligkeitsüberlegungen).

iii) Welche Restriktion ist an T zu stellen, damit eine Immunisierung möglich ist?

(6 min)

d) Aktuar Z erwartet zu den Zeitpunkten $t = 1{,}2$ und 3 Zahlungsverpflichtungen in Höhe von $L_1 = 50$ Mio., $L_2 = 60$ Mio. und $L_3 = 70$ Mio. Am Markt werden die folgenden Standardbonds gehandelt (die Kurse beziehen sich jeweils auf einen Nennwert von 100).

	Kurs	Restlaufzeit	Nominalzins	Yield to Maturity
Bond 1	108,00	1	10,00%	1,85%
Bond 2	105,00	2	5,00%	2,41%
Bond 3	100,00	3	2,00%	2,00%

i) Bestimmen Sie, ausgehend von den drei Standardbonds, die Spot Rates $\{r_1, r_2, r_3\}$ für Zerobonds mit den Laufzeiten 1, 2 und 3 Jahre.

ii) Bestimmen Sie die Stückzahlen $\{N_1, N_2, N_3\}$ eines Portfolios P aus den drei Standardbonds so, dass die Zahlungsverpflichtungen exakt gedeckt sind! Welches ist der Wert des Portfolios P ? (Vernachlässigen Sie dabei wiederum Ganzzahligkeitsüberlegungen!)

(10 min)

<u>Lösungsskizze:</u>

a) Es gilt $D_Z \cdot P_Z = \sum_{t=1}^{T} tZ_t(1+r)^{-t}$ und $D_V \cdot P_V = \sum_{t=1}^{T} tV_t(1+r)^{-t}$. Damit gilt für die Zahlungsreihe W

$$D_W \cdot P_W = \sum_{t=1}^{T} t(Z_t + V_T)(1+r)^{-t}$$

$$= D_Z \cdot P_Z + D_V \cdot P_V.$$

Hieraus folgt:

$$D_W = D_Z \cdot \frac{P_Z}{P_W} + D_V \cdot \frac{P_V}{P_W}.$$

Mit $x_Z = P_Z/P_W$ und $x_V = P_V/P_W$ folgt die Behauptung.

b) Man verwende das Resultat von Teilaufgabe a). Mit $x = P_A/(P_A + P_B)$ folgt $1 - x = P_B/(P_A + P_B)$. Damit folgt für die Duration D des Portfolios

$$D = xD_A + (1-x)D_B.$$

Für eine Immunisierung in T ist $D = T$ zu erfüllen. Aus

$$xD_A + (1-x)D_B = T$$

folgt schließlich

$$x = \frac{T - D_B}{D_A - D_B}.$$

<u>Aufgabenteil c):</u>

i) $V_T = N(1+r)^T = N(1+i)^T$

ii) Ansatz für Immunisierungsstrategie:

$$D(i) = \frac{1+i}{i}[1-(1+i)^{-n}] = T$$

Hieraus folgt

$$(1+i)^n = \frac{1+i}{1+i-Ti}$$

und damit

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1+i}{1+i-Ti}\right)}{\ln(1+i)} = 1 - \frac{\ln(1+i-Ti)}{\ln(1+i)}$$

Die Immunisierungsstrategie besteht darin, einen marktkonformen Standardbond der Laufzeit n zu erwerben.

iii) Es ist $1+i-Ti>0$ sicherzustellen, d.h. $T<(1+i)/i$.

Aufgabenteil d)

i) Die Spot Rate r_1 kann direkt aus der Tabelle abgelesen werden, es gilt: $r_1 = 0.0185$.

Weiter gilt

$$P_2 = 105 = 5(1.0185)^{-1} + 105(1+r_2)^{-2}$$

Hieraus resultiert: $r_2 = 0.0242$.

Ferner gilt

$$P_3 = 100 = 2(1.0185)^{-1} + 2(1.0242)^{-2} + 102(1+r_3)^{-3}.$$

Hieraus resultiert: $r_3 = 0.0199$.

Die Spot Rates belaufen sich somit auf $\{1.85\%, 2.42\%, 1.99\%\}$.

ii) Zunächst ist N_3 auf Basis von Bond 3 zu bestimmen. Es muss gelten:

$$102\ N_3 = 70 \text{ Mio.}$$

Hieraus resultiert $N_3 = 686\,274.51$.

Weiter gilt:

$$105\ N_2 + 2\ N_3 = 60 \text{ Mio.}$$

Hieraus resultiert: $N_2 = 558\,356.68$.

Schließlich gilt

$$110\ N_1 + 5\ N_2 + 2\ N_3 = 50 \text{ Mio.}$$

Hieraus resultiert: $N_1 = 416\,687.89$.

Der Wert des Portfolios beläuft sich damit auf

$$\begin{aligned} P &= 108\ N_1 + 105\ N_2 + 100\ N_3 \\ &= 172.2572 \text{ Mio.} \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (26 min)

a) Ein anfänglicher Kreditbetrag der Höhe S_0 soll mit gleichhohen nachschüssigen Zahlungen A (Annuität) in n Jahren inklusive aufgelaufener Zinsen getilgt werden. Der als fristigkeitsunabhängig angenommene Kreditzins beträgt r.

Weisen Sie nach, dass die Annuität A gegeben ist durch

$$A = S_0 \frac{q^n (q-1)}{q^n - 1}$$

(3 min)

b) Vorgegeben seien nunmehr die Größen S_0 , A und r. bestimmen Sie die erforderliche Kreditlaufzeit n.

(5 min)

c) Weisen Sie nach, dass für t = 1, …, n die Restschuld RS_t am Ende der jeweiligen Periode gegeben ist durch

$$RS_t = S_0 \frac{q^n - q^t}{q^n - 1}.$$

Hinweis: Gehen Sie von dem Ansatzpunkt aus, dass in einem vollkommenen Kapitalmarkt sich die Restschuld zum Zeitpunkt t als Differenz der aufgezinsten Schuld bis t und der aufgezinsten Annuitätenzahlungen der Teilaufgabe a) bis zum Zeitpunkt t ergeben muss.

(8 min)

d) Aktuarin ZZ schließt nun im Alter x (definitionsgemäß t=0) eine Risikolebensversicherung ab, deren Auszahlung im Todesfall sich kongruent zur Restschuld nach Teilaufgabe c) entwickelt. Stellen Sie den Leistungsbarwert LBW_{DRL} dieser Versicherung in Abhängigkeit von der gestutzten Lebensdauer $CT = CT_x$ dar!
Bestimmen Sie den korrespondierenden erwarteten Leistungsbarwert. Verwenden Sie dabei die Größe ${}_{t|}q_x$!

(10 min)

Lösungsskizze:

a) Barwert der nachschüssigen Rückzahlungen (q = 1 + r)

$$Aq^{-1} + Aq^{-2} + \ldots + Aq^{-n}$$
$$= Aq^{-n}(q^{n-1} + \ldots + q + 1) = A\frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$$

Damit gilt

$$S_0 = A\,\frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$$

und hieraus folgt

$$A = S_0\frac{q^n\,(q - 1)}{q^n - 1}$$

b) Für die Annuität gilt zunächst

$$A = S_0 \frac{q^n (q-1)}{q^n - 1} = \frac{S_0 r}{1 - q^{-n}} .$$

Hieraus folgt

$$A - Aq^{-n} = S_0 r$$

und weiter

$$q^n = \frac{A}{A - S_0 r}$$

sowie

$$n \ln q = \ln(A) - \ln(A - S_0 r)$$

und schließlich

$$n = \frac{\ln(A) - \ln(A - S_0 r)}{\ln q} .$$

c) Nach Hinweis gilt ($q = 1 + r$)

$$\begin{aligned} RS_t &= S_0 q^t - A (q^{t-1} + \ldots + q + 1) \\ &= S_0 q^t - A \frac{q^t - 1}{q - 1} \\ &= S_0 q^t - S_0 \frac{q^n (q - 1)}{q^n - 1} \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \\ &= S_0 \left[q^t - \frac{q^n (q^t - 1)}{q^n - 1} \right] \\ &= S_0 \frac{q^t (q^n - 1) - q^n (q^t - 1)}{q^n - 1} \\ &= S_0 \frac{q^n - q^t}{q^n - 1} \end{aligned}$$

d) Ist t der Todeszeitpunkt, so erfolgt eine Zahlung der Höhe RS_t. Der Todeszeitpunkt in Termen der gestutzten Lebensdauer entspricht CT + 1. Damit ist für CT = 0, …, n-1 der Barwert der Zahlung in t = CT + 1 gegeben durch

$$RS_{CT+1} \cdot q^{-(CT+1)} = S_0 \frac{q^n - q^{CT+1}}{q^n - 1} q^{-(CT+1)}$$

$$= S_0 \frac{q^{n-(CT+1)} - 1}{q^n - 1} = S_0 \frac{q^{n-1-CT} - 1}{q^n - 1}$$

Insgesamt gilt

$$LBW = \begin{cases} S_0 \frac{q^{n-1-CT} - 1}{q^n - 1} & CT = 0,\dots, n - 1 \\ 0 & CT \geq n \end{cases}$$

und ferner

$$E(LBW) = \frac{S_0}{q^{n-1}} \sum_{t=0}^{n-1} (q^{n-1-CT} - 1)\, P(CT = t)$$

$$= \frac{S_0}{q^{n-1}} \sum_{t=0}^{n-1} (q^{n-1-CT} - 1)\ {}_{t|}q_x$$

Aufgabe 4: (16 min)

a) Betrachten Sie eine binäre Put-Option mit dem folgenden Auszahlungsprofil: Notiert der Basiswert am Ende der Laufzeit auf oder unter dem Schwellenwert X, so erhält der Käufer der Option den fixen Betrag N. Ansonsten verfällt die Option wertlos.

Unterstellen Sie für die Kursentwicklung des Basistitels einen einperiodigen Binomialprozess mit Startwert $s_0 = 100$ sowie einer prozentualen Aufwärtsbewegung von 15% bzw. einer prozentualen Abwärtsbewegung von 10 %. Der einperiodige Zinssatz für eine sichere Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme betrage r = 1%.

i) Skizzieren Sie zunächst die Entwicklung des Basistitels sowie der Option!

ii) Bestimmen Sie auf der Basis des **Duplikationsprinzips** den arbitragefreien Preis in t = 0 der einperiodigen binären Put-Option mit X = 100 und N = 1. Geben Sie **explizit** die zuggrundeliegende Duplikationsstrategie an.

iii) Bestimmen Sie auf der Basis des **Duplikationsprinzips** den arbitragefreien Schlussabrechnungspreis F_0 eines einperiodigen Forward auf den Basistitel. Interpretieren Sie das Ergebnis!

(6 min)

b) Versicherungsunternehmen BBB verkauft eine einjährige aktienindexgebundene Lebensversicherung zur Gesamtprämie EUR 20 000 an einen x-jährigen Kunden. Die Modalitäten der Versicherung in Bezug auf den Erlebensfall lauten wie folgt:
Es wird eine Rückzahlung der Gesamtprämie garantiert. Im Falle einer **negativen** DAX-Entwicklung erhält der Versicherte einen Bonus von 50% auf die einjährige DAX-Rendite bezogen auf einen maßgeblichen Investitionsbetrag in Höhe von EUR 19 000.

Das Unternehmen sieht sich der folgenden Anlagesituation in t = 0 gegenüber: Es herrscht ein sicherer Zins von 5%, der DAX steht bei 9 500 und einjährige DAX-Puts mit einem Ausübungspreis von 9 500 weisen eine Optionsprämie von EUR 520 auf.

i) Wie lautet das Leistungsprofil der Erlebensfallleistung in t = 1?

ii) Welche Option ist in diesem Leistungsprofil eingebettet?

iii) Wie lautet der marktkonsistente Wert dieses Leistungsprofils in t = 0?

iv) Welche faire Prämie resultiert hieraus?

v) Welcher Betrag verbleibt dem Unternehmen zur Deckung einer Todesfallleistung und von Betriebskosten?

(4 min)

c) Alternativ wird – bei gleichen Kapitalmarktbedingungen – das Leistungsprofil der aktienindexgebundenen Lebensversicherung im Erlebensfall unter b) wie folgt festgelegt:
Auf einen Betrag in Höhe von EUR 19 000 wird eine garantierte Mindestverzinsung von 4% gewährt. Alternativ kommt im Falle einer **positiven** DAX-Entwicklung eine 50%-ige Partizipation, bezogen auf einen maßgeblichen Investitionsbetrag von EUR 19 000 zum Zuge – jedoch nur, wenn dies zu einer höheren Auszahlung führt.

i) Wie lautet das Leistungsprofil der Erlebensfallleistung in t = 1?

ii) Welche Option ist in diesem Leistungsprofil eingebettet?

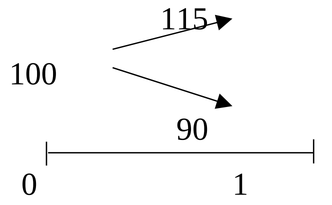
iii) Wie lautet der marktkonsistente Wert dieses Leistungsprofils in t = 0?

(6 min)

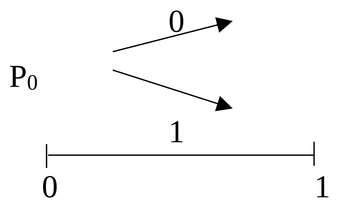
Lösungsskizze:

Aufgabenteil a)

i) Entwicklung Basistitel:



Entwicklung Option:



ii) Duplikation:

(I) $1{,}01x_1 + 115x_2 = 0$

(II) $1{,}01x_1 + \ \ 90x_2 = 1$

(I)-(II): $25x_2 = -1$, $x_2 = -1/25 = -\,0.04$

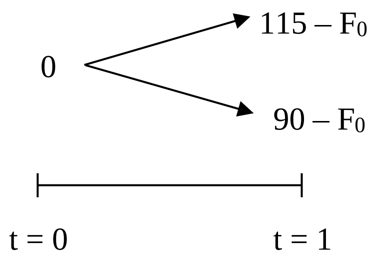
(I): $x_1 = 4.5545$

Arbitragefreier Preis:

$$1 \cdot x_1 + 100x_2 = 0.5545.$$

Duplikationsstrategie in t = 0: 0.04 Aktien (short) und riskolose Anlage des Betrags 4.5545.

iii) Für die Forwardposition gilt aus Sicht des Investors:



Dabei ist F_0 der zu bestimmende Forwardpreis. Erwirbt der Investor x Einheiten des Basistitels und y der sicheren Anlage, so gelten für die Duplikationsposition damit die folgenden Bedingungen:

$100x + y = 0$ (t = 0)

$115x + 1.01\,y = 115 - F_0$ (t = 1, Fall a)

$90x + 1.01\,y = 90 - F_0$ (t = 1, Fall b)

Aus (II) – (III) folgt x = 1 und damit y = -100. Aus (II) und (III) folgt damit jeweils $F_0 = 101$, d.h. der Forwardpreis entspricht dem zum sicheren Zins aufgezinsten heutigen Wert des Basistitels (Cost-of-Carry-Preis).

Aufgabenteil b):

i) Rückzahlungsprofil in t = 1 (DAX(0) = 9500)

$$L_1 = \max\{20000,\ 20000 - 19000 \cdot 0.5\,\frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)}\}$$

$$= \max\{20000,\ 20000 + 9500 - DAX(1)\}$$

ii) $L_1 = 20000 + \max\{9500 - DAX(1),\ 0\}$

Eingebettet ist ein einjähriger DAX-Put mit Ausübungspreis X = 9500.

iii) $L_1 = 20000(1.05)^{-1} + 520$

$= 19047.62 + 520 = 19567.62$

iv) $19567.62 \cdot p_x$

v) $20000 - 19567.62 \cdot p_x$

Aufgabenteil c):

i) Rückzahlungsprofil in t = 1

$$L_1 = \max\{1.04 \cdot 19000,\ 19000 + 19000 \cdot 0.5\,\frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)}\}$$

$$= \max\{19760,\ 19000 + (DAX(1) - 9500)\}$$

ii) Zerlegung des Rückzahlungsprofils:

$L_1 = 19760 + \max(-760, DAX(1) - 9500)$

$= 19760 + \max(DAX(1) - 10260, 0)$

Eingebettet ist ein einjähriger DAX-Call mit einem Ausübungspreis in Höhe von X = 10260.

iii) Fairer Wert L_0 in t = 0:

$L_0 = 19760(1.05)^{-1} + C_0(10260) = 18819.05 + C_0(10260).$

Dabei bezeichnet $C_0(10260)$ den Marktpreis eines einjährigen DAX-Calls mit Ausübungspreis X = 10260 in t = 0.